

Aplikace matematiky

Recense

Aplikace matematiky, Vol. 8 (1963), No. 2, 156–161

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102847>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1963

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

RECESE

Frank L. Wolf: ELEMENTS OF PROBABILITY AND STATISTICS. (Základy pravděpodobnosti a statistiky.) McGraw-Hill, New York 1962, stran XV + 322, 8 tabulek, cena 58 s.

Kniha je velmi zdařile napsanou učebnicí základů teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky; je značně elementární jak způsobem výkladu tak i obsahem. Je určena pro pracovníky z různých jiných odvětví, pro biology, lékaře, zemědělské výzkumníky, techniky, ekonomy atd., kteří se chtějí naučit nejběžnějším metodám matematické statistiky; tento okruh čtenářů budeme mít také v dalším na mysli.

Nejprve si všimněme blíže obsahu.

Kapitola první pojednává o ryze praktických otázkách, o sbírání statistických dat a jejich zhušťování, ale již druhá kapitola je věnována zavedení množin a množinových operací.

Autor předpokládá, že čtenář zná z matematiky pouze algebru (a dokonce že z ní už ledacos zapomněl). Proto v kapitole třetí uvádí, které věci bude pokládat za známé, a doplňuje je (resp. snad jen osvětluje v paměti čtenáře) dalšími potřebnými pojmy, jako symbolem Σ pro sčítání, nerovnostmi apod.

Kapitoly čtvrtá a pátá se zabývají průměry a mírami disperse pro empirické soubory.

V kapitole šesté autor přechází k teoretickým partiím a seznamuje zde čtenáře s pojmem pravděpodobnosti a s jednoduchými větami o ní.

Kapitola sedmá se zabývá diskrétními rozloženími a jejich vlastnostmi, následující osmá kapitola pak bodovými a intervalovými odhady a testy pro tato rozložení; výklad je podán obecně, ale prakticky se pak jedná jen o binomické rozložení.

Od kapitoly deváté se autor obrací ke spojitým rozložením. Nejprve podává o nich obecný výklad, poté v kapitolách desáté až třinácté uvádí postupně rozložení normální, χ^2 , F a t a vždy zároveň i běžné intervalové odhady a testy, které se pomocí těchto rozložení provádějí: testy průměrů a rozptylů, χ^2 test dobré shody, jednoduché třídění analýsy rozptylu. –

Poslední kapitola čtrnáctá obsahuje výklad o dvojrozměrných rozloženích a test nenulovosti korelačního koeficientu.

Je připojen ještě soubor 8 nejběžnějších statistických tabulek.

Myslím, že se autorovi vskutku úspěšně podařilo najít onu potřebnou a obtížně uskutečnitelnou rovnováhu mezi popularností výkladu a jeho přesností. Aby usnadnil čtenáři pochopení důležitých faktů, autor vždy začíná svůj výklad velmi názorně a přístupně, bez matematiky. Nebojí se dokonce ani osvěžit knihu dramatisací, na několika místech podává úvodní výklad ve formě dialogu dvou osob (v 6-1 o modelu reality pomocí pravděpodobností, v 8-3 o testování hypotéz). V dalším textu však vždy po takovém názorném úvodu následuje výklad zcela přesný, seriosní, matematicky bezvadný. (To platí v plné míře o výkladu o diskrétních rozloženích, kdežto pro spojitá rozložení autor neměl k dispozici potřebný matematický aparát; přesto i zde jeho snaha o kompromis byla úspěšná.) Nenašel jsem v knize ani jedinou z těch chyb, do kterých tak často upadají podobné populární učebnice. Velmi správné je, že v knize se zdůrazňuje logická stránka používaných metod a jejich logické souvislosti (např. testování a intervaly spolehlivosti). Cenný a užitečný pro čtenáře je také pěkný výklad v 6-1 o principiální otázce, jak se realita odráží v matematických a pravděpodobnostních modelech.

K přehlednosti a jasnosti velmi napomáhá grafická úprava důležitých výsledků (včetně např. popisu testovacích postupů), které jsou uváděny ve formě číslovaných matematických vět tištěných kursivou; podobně postupy užití testů pro hypotézy jednostranné a oboustranné jsou vždy přehledně uspořádány v tabulce. K lepšímu pochopení výkladu také přispívá to, že autor se neostýchá lečteré věci znova opakovat, třeba v trochu pozměněné formulaci. Poněkud problematické je hojně používání „spinnerů“, jakýchsi kruhových grafů pro spojitá rozložení, které mají vnitřní stupnici rovnoměrnou a vnější stupnice odpovídá znázorněnému rozložení; pravděpodobnosti lze z nich odečíst ovšem mnohem lépe než z grafů hustoty, ale jinak jsou zcela nenázorné ve srovnání s hustotami.

Přes toto příznivé zhodnocení asi mnozí z řad nestatistiků by mohli namítnout, že kniha je přece příliš obtížná a že existují jiné knihy podstatně snadnější. Je pravda, že jsou snadnější knihy, avšak z nich je možno se naučit nejvýše formálnímu dosazování do vzorečků, nikoliv však opravdu matematické statistice. Naproti tomu v recenzované knize čtenář je veden nejen k umění dosazovat, nýbrž k logickému porozumění užívaným metodám, a to je nesrovnatelně cennější. „K matematice nevede žádná královská cesta“, ale v této knize autor tuto cestu vážným zájemcům co nejvíce usnadňuje.

Zbývá ještě vytknout nedostatky knihy. Předně uvedme, že některé obrázky nejsou dobré: na str. 36 graf funkce x^2 má pro $|x| > 1$ úplně přímkový průběh; na téže stránce je řada dalších grafů rýsována nepřesně; na str. 39 je znázornění roviny v prostoru zcela nejasné; na str. 206 při srovnání normálních rozložení s různými rozptyly je užito přehnaně velkého rozptylu $\sigma^2 = 25$, takže srovnání je naopak už málo názorné; na str. 291 obraz dvojrozměrného normálního rozložení je dosti nenázorný (v jiných knihách bývají lepší obrazy). Kniha obsahuje mnoho cvičení, někdy až zbytečně mnoho (např. 29 cvičení jen na sumarizaci dat), ale téměř výhradně taková praktická cvičení, pro něž data lze shromáždit přímo ve třídě posluchačů (např. testujte, zda posluchači s brýlemi mají významně vyšší postavu než ostatní). Autor to pokládá za přednost, avšak recendentovi se zdají takové příklady příliš formální a málo přesvědčivé. Řada cvičení a snad většina příkladů v textu je z oblasti průzkumu veřejného mínění. Rovněž pořadí zařazení některých témat je diskutabilní. Podle předmluvy autor pokládá opět za přednost, že výklad o množinách je zařazen již jako druhá kapitola. Recensent se však domnívá, že tento výklad patří až ke kapitole o teoretické pravděpodobnosti; na svém nynějším místě totiž porušuje logický sled výkladu o empirických rozloženích a může příliš brzy čtenáře-laika odradit. Dále odstavec 7-3 o náhodných číslech patří spíše hned za výklad o výběrech v 7-1, nikoliv až za binomické rozložení v 7-2. Za jedině méně zdařilé místo knihy pokládá recensent úvodní výklad o normálním rozložení v 10-1. Je sice uveden vzorec jeho hustoty, ale ten čtenáři-nematematikovi neřekne nic, takže pak asi nebude jasné, čím je normální rozložení prakticky charakterizováno; měl být více zdůrazněn typický zvonovitý tvar jeho křivky hustoty; recensent nenašel vůbec zmínku o tom, že toto rozložení je v intervalu $(-\infty, \infty)$, a dokonce z obrázků na str. 204 by se zdálo, že je pouze na konečném intervalu; mělo být snad také důkladněji objasněno pomocí nějaké populární verze centrální limitní věty, proč je normální rozložení tak časté a důležité. Pro frekvenci se užívá označení FR , které však na první pohled se plete s RF pro relativní frekvenci; ostatně podle autorova jinak logického systému označení by frekvence měla být spíše značena F . Na str. 93 v definici podmíněné pravděpodobnosti $P(B|A)$ chybí požadavek $P(A) \neq 0$. Na str. 138 $P(X = 6 | p = \gamma)$ není podmíněná pravděpodobnost, jak tvrdí autor, jelikož p je parametr rozložení. Na str. 249 a 268 nebude čtenáři jasné, jak je možné, že nějaké rozložení (F a t) nemá průměr a rozptyl; pro čtenáře by bylo názornější říci, že $\sigma^2 = \infty$.

Zdůrazněme ovšem, že tyto nedostatky jsou buď nepříliš významné, nebo jsou věci subjektivního názoru.

Závěrem tedy můžeme knihu vřele doporučit čtenářům-nestatistikům ke studiu. Profesionální statistiky pak může zajímat po metodické stránce. Domnívám se, že je to jedna z nejlepších knih ve světové literatuře na této elementární úrovni.

Zbyněk Šidlik

W. W. Rogosinski: VOLUME AND INTEGRAL. (Obsah a integrál.) Oliver and Boyd, Edinburgh-London 1962. Stran 160, obr. 11, cena 10 s. 6 d.

Kniha je určena pro úvodní studium teorie míry a integrálu. Je vhodná pro studující matematiky jako úvod do Lebesgueovy teorie, a i když obsahuje výklad téměř všech důležitých pojmů a vět, je vhodné doplnit její studium jinými prameny, např. pro porovnání různých možných zavedení Lebesgueova integrálu atp.

Kniha má celkem 6 kapitol. V první kapitole jsou vyloženy v dalším potřebné věci z teorie množin a z teorie bodových množin v euklidovském prostoru (např. Borelova pokrývací věta atd.).

Kapitola druhá obsahuje teorii Jordanovy míry (autor užívá názvu „content“ — obsah) a závěr kapitoly je věnován jejimu zhodnocení.

Kapitola třetí se zabývá teorií Lebesgueovy míry. Jsou dokázány věty o limitních vlastnostech míry a Vitaliova věta.

V kapitole čtvrté je zaveden Riemannův integrál a je poukázáno na některé jeho nevýhody.

Definice Lebesgueova integrálu je v kapitole páté. Zde jsou rovněž dokázány limitní vlastnosti Lebesgueova integrálu, Fubiniova věta a vyšetřena souvislost mezi Riemannovým a Lebesgueovým integrálem.

V kapitole šesté se vyšetřuje souvislost mezi derivací a integrálem. Je dokázána druhá věta o střední hodnotě a věty o integraci per partes a substituci (pro jednorozměrné integrály).

Kniha je psána jasně, důkazy jsou úplné. Pěkné knížce lze přát na její cestě za čtenáři mnoho úspěchů.

Rudolf Výborný

J. C. Burkill: THE THEORY OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS. (Teorie obyčejných diferenciálních rovnic.) Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1962. 2. vydání, 112 stran, cena 8 s. 6 d.

Tato poměrně drobná učebnice diferenciálních rovnic vyšla v knižnici matematických učebnic pro university. Je určena posluchačům druhých nebo třetích ročníků, a to ovšem nejen matematikům, ale i přírodovědcům a technikům. Kniha je rozvržena do devíti kapitol: I. Existence řešení, II. Lineární rovnice, III. Oscilační věty, IV. Řešení pomocí nekonečných řad, V. Singularity rovnic, VI. Řešení ve tvaru křivkových integrálů, VII. Legendreovy funkce, VIII. Besselovy funkce, IX. Asymptotické řady. Toto druhé vydání je kromě toho doplněno dvěma dodatky: I. Laplaceova transformace a II. Siločáry a ekvipotenciální plochy.

Je dáno už rozsahem knížky, že autor si může všimnout jen určitých vybraných partií teorie diferenciálních rovnic. Je však někdy až překvapující, kolik faktů se mu podaří exaktně dokázat na tak malém počtu stran. Myslím, že autor sledoval především dva cíle: ukázat souvislost teorie diferenciálních rovnic s ostatními důležitými částmi matematické analýsy, a přitom aby probraná látka byla významná z hlediska aplikací (což je konečně zdůrazněno i oběma dodatky). Jak už je téměř zvykem v anglosaské literatuře, každá kapitola je opatřena řadou cvičení, na nichž se má čtenář přesvědčit, zda správně porozuměl obecným větám uvedeným v hlavním textu. Kniha je napsána neobyčejně hezky a je ji možno doporučit nejen začátečníkům v teorii diferenciálních rovnic, ale i těm, kteří si chtějí spíše osvěžit poznatky již dříve získané. I tento čtenář se však může setkat s lecčím novým; tak např. ukázka řešení diferenciálních rovnic pomocí křivkových integrálů (v komplexním i reálném oboru) se nyní už zřídka objevuje v základních učebnicích diferenciálních rovnic.

Otto Vejvoda

L. E. Elsgole: CALCULUS OF VARIATIONS. (Variační počet.) Pergamon Press, 1961. Stran 178, obr. 54, cena 30 s.

Kniha je překladem knihy Ельсгольц: Вариационное исчисление. Způsobem výkladu i svým zaměřením je kniha určena především inženýrům, technikům a pracovníkům přírodních věd, kteří potřebují pro svou práci znalost variačního počtu.

Je rozdělena do pěti kapitol. První obsahuje formulaci základních úloh s pevnou hranicí, odvození Eulerovy rovnice a řešení těchto úloh elementárními metodami v „uzavřeném tvaru“.

Kapitola druhá je věnována problémům s pohyblivou hranicí. Jsou vyšetřovány pouze (pochopitelně) funkcionály závislé na funkcích jedné proměnné. Dále jsou dosti podrobně probrány extremály s hroty a problém odrazu extremál. V této kapitole se vyšetřuje též jednostranná variace.

V kapitole třetí jsou vyšetřovány postačující podmínky, jsou formulovány podmínky Jacobiova, Weierstrassova a Legendrova.

Variační problémy s vedlejší podmínkou jsou studovány v kapitole čtvrté. Jsou probrány vedlejší podmínky ve tvaru „obyčejné“ rovnice (resp. rovnic) i ve tvaru diferenciálních rovnic. Závěr kapitoly tvoří isoperimetrické problémy.

Přímé metody jsou obsahem poslední kapitoly. Autor vysvětluje diferenční metodu, vyšetřuje Ritzovu metodu a nakonec probírá Kantorovičovu metodu.

Výklad je přiměřený okruhu čtenářů, jimž je kniha určena, a z toho co bylo řečeno je jasné, že i výběr látky je vhodný; zejména je třeba pochválit zařazení přímých metod. Bohužel v posledních kapitolách je autor méně podrobný i méně přesný než na začátku. Věcné chyby v knize nejsou, na několika místech nejsou podrobně vytčeny všechny předpoklady, např. na str. 90 je třeba o funkci F předpokládat, že má *spojité* derivace až do třetího řádu. Předností knihy je populární a jasný způsob výkladu. Studium knihy lze každému doporučit.

Rudolf Výborný

B. A. Fuchs, V. I. Levin: FUNCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE AND SOME OF THEIR APPLICATIONS. (Funkce komplexní proměnné a některé jejich aplikace.) Volume 2. Pergamon Press 1961. Stran 296, cena 50 s.

Recenzovaná kniha je překladem knihy Б. А. Фукс, В. И. Левин: Функции комплексного переменного и их приложения. Je určena inženýrům a technikům, kteří se chtějí hlouběji seznámit s partiemi teorie analytických funkcí, jež mají významné aplikace v technických a fyzikálních problémech.

První kapitola je věnována teorii algebraických funkcí. Je provedena klasifikace singularit algebraických funkcí a dáno vyjádření algebraické funkce řadami v okolí singularit. Jako metody k efektivnímu sestrojení těchto rozvoju je užito tzv. Newtonova diagramu. V závěru kapitoly je názorně sestrojena n -listá Riemannova plocha algebraické funkce.

Druhá kapitola se zabývá analytickou teorií diferenciálních rovnic. V úvodu jsou uvedeny některé základní věty o funkcích dvou komplexních proměnných, potřebné v dalším. Metodou majorantních funkcí je dokázána základní věta o existenci řešení počáteční úlohy pro diferenciální rovnici $dw/dz = f(z, w)$, je-li pravá strana regulární v okolí bodu (z_0, w_0) . Dále jsou vyšetřovány případy, kdy pravá strana je tvaru $f(z, w) = f_1(z, w)/f_2(z, w)$, kde f_1 a f_2 jsou funkce regulární v okolí bodu (z_0, w_0) . Podrobně je studováno chování řešení lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu v okolí bodů, v nichž mají koeficienty diferenciální rovnice izolovanou singularitu. Je uvedena Fuchsova podmínka, kterou musí splňovat koeficienty, aby daný bod γ byl regulárním bodem řešení, tj. aby v jeho okolí existoval fundamentální systém řešení tvaru $w(z) = (z - \gamma)^r \varphi(z)$ resp. $w(z) = (z - \gamma)^r [\varphi(z) \lg(z - \gamma) + (z - \gamma)^p \psi(z)]$, kde φ, ψ jsou holomorfní v bodě γ a různé od nuly v γ , r je komplexní, p celé číslo. Vyložená teorie je aplikována na Besselovu rovnici.

Třetí kapitola je věnována Laplaceově transformaci. Definice a základní vlastnosti jsou vysloveny v obecnosti, která umožňuje jejich dostatečně širokou aplikaci. Dále jsou dokázány limitní vztahy a uveden Laplaceův obraz řešení obyčejné diferenciální rovnice s konstantními koeficienty a Laplaceův obraz cylindrických funkcí prvního druhu. Jsou uvedeny podmínky postačující k tomu, aby Laplaceův obraz měl originál a aby platila inverzní formule. V závěru kapitoly je uvedena věta o rozkladu, užitečná pro aplikace.

Čtvrtá kapitola je věnována aplikacím aparátu Laplaceovy transformace k nalezení asymptotických rozvojų speciálních funkcí.

Poslední kapitola je věnována formulaci a řešení Hurwitzova problému pro polynomy. Je dokázáno známé Hurwitzovo kritérium a vyložena metoda Višněgradského pro polynomy závisící na parametrech.

Kniha je psána matematicky přesně, předpoklady vět jsou řádně vysloveny a důkazy jsou bez mezer. Vyložená teorie je bohatě ilustrována na množství příkladů, které obsahují většinou materiál důležitý pro aplikace. Vyskytují se drobné tiskové chyby, které si čtenář snadno sám opraví. Překladatel se úzkostlivě držel originálu (i s jeho tiskovými chybami, které jsou v překladu misty rozhojněny). Kniha je krásně vypravena, její překlad do cizího jazyka svědčí o jejich kvalitách.

Jaroslav Fuka

E. Kamke: MENGENLEHRE. (Teorie množin.) Walter de Gruyter & Co., Berlin 1962. Čtvrté vydání, stran 191, obr. 6, cena DM 5,80.

Čtvrté vydání této známé a osvědčené učebnice podává stejně jako vydání předchozí stručný a jasný výklad a přehled o teorii množin. Zcela v duchu tradic učebnic „Göschel“ nepředpokládá autor u čtenáře žádných předběžných speciálních znalostí, kniha je vhodná pro úvodní studium teorie množin, a jejím prostudováním získá čtenář takové vědomosti, které matematikovi nespecializujícímu se v oborech úzce souvisejících s teorií množin zcela postačí. Kniha je určena studujícím matematiky a matematikům vůbec.

Rudolf Výborný

RECENT DEVELOPMENTS IN GENERAL RELATIVITY. Vydaly Pergamon Press a Państwowe wydawnictwo naukowe, 1962. Stran 472, cena \$ 8,00.

Kniha sestává z dvou odlišných částí. První z nich obsahuje sedm delších přehledných článků, referujících o současném stavu základních problémů teorie relativity jako gravitační vlny, kvantifikování gravitačních polí, kosmologie, matematických problémů relativity a experimentálního ověřování.

Druhá část je 38 kratších původních prací věnovaných rovněž nejruznějším oblastem teorie relativity.

Pro matematika je nejzajímavější článek od LICHNEROWICZE a FOURÈS-BRUHATA (v první části, str. 73–87). Jedná se v něm o integraci rovnic pole (lokálně) a určení počátečních podmínek pro řešení. Dále je referováno o řešení rovnic pole v celém prostoru (globální problém). Krátká zmínka je o elektromagnetickém poli a unitární teorii. Předpoklady o varietě jsou tytéž jako v knize jednoho z autorů „Théorie relativistes de la gravitation...“

V druhé části jsou od A. Z. PETROVA dva příspěvky (str. 371–378 a 379–386). Prvý se zabývá klasifikací gravitačních polí pomocí algebraických invariantů. Druhý příspěvek se zabývá studiem grup, které nechávají invariantní metrický tensor. Touto a předcházející klasifikací dostáváme typy prostorů, které jsou známy jako řešení fyzikálních problémů.

Některé příspěvky sborníku jsou příbuzné pracím ze sborníku „Новейшие проблемы гравитации“ (stejní autoři). Experimentální verifikaci se zabývá ve sborníku referát GINZBURGA (str. 57–71), který je v podstatě shodný s jeho článkem ve sborníku „Эйнштейн и развитие физико-математической мысли“.

Sborník, spolu s velkým množstvím v poslední době vyšlé nebo připravované literatury o teorii relativity, dokumentuje, jak vzrůstá zájem o tuto otázku. Je to způsobeno do jisté míry tím, že efekty předvídané teorií se staly přístupné měření (Mössbauerův efekt) nebo bude možno v dohledné době využít k jejich verifikaci umělých satelitů (srovnej např. *Proceedings of I. R. E.* 48 (1960), str. 444–446).

Václav Alda

STROJE NA ZPRACOVÁNÍ INFORMACÍ, sborník 8. Nakladatelství ČSAV, Praha 1962. Stran 215, cena 19,50 Kčs.

Sborník obsahuje převážně práce členů kolektivu VÚMS MVS, které podávají zajímavý průřez tématy, jimiž se různé skupiny VÚMS zabývají. Důležitý je článek *Decimal Arithmetic Unit* A. SVOBODY a M. VALACHA, kde je dost podrobně popsán originální princip vytváření skalárního součinu ve střadači, použitý u stroje EPOS. — V článku *Основные вопросы зрительного процесса машин* M. VALACHA jsou rozvedeny zajímavé myšlenky, které naznačují, že by snad nebylo nemožné technicky realizovat zařízení, které by v součinnosti se samočinným počítačem na základě programu provádělo operace, jako je registrování pohybu v zorném poli, zapamatování si předmětu ležícího v určité vzdálenosti nebo pozorování předmětu pohybujícího se na pevném pozadí. — Článek J. KLÍRA *Weight Codes* podává teorii váhových kódů, tj. takových matic A z nul a jedniček řádu $L \times n$, že existuje vektor W celých (obecněji racionálních) čísel řádu n takový, že $AW = 0, 1, \dots, L - 1$. Na závěr je uvedena úplná tabulka vah W pro $L = 10, n = 4$.

Z matematických článků se články *Method of Programming the Simplex-Method Procedure on a Digital Computer M.* NOVÁKOVÉ a J. VLČKA (program pro stroj EPOS) a *Программа вычисления структурных факторов с помощью ВМ УРАЛ-1* J. NADŘCHALA, A. LÍNKY a S. NOVÁKA týkají úpravy řešení důležitých základních úloh vzhledem k technickým parametrům konkrétních strojů. — E. KINDLER v článku *Matrix Inversion on Computers with Fixed Point Operations* řeší podobnou úlohu. Předností je zde uvedení programu v ALGOLU-60. — Článek J. ZEZULY zcela všeobecně popisuje metodu pro řešení soustavy homogenních lin. rovnic. — Článek E. KINDLERA *Simple Algorithm for the Programming of Arithmetic Expressions* popisuje (a přesně rozpisuje v jakémsi rozšíření ALGOLU-60) metodu jednoduché kompilace aritmetických výrazů na tříadresový program. — Je třeba upozornit i na referát P. PELIKÁNA o jím sestrojeném reléovém zařízení, hrajícím s lidským soupeřem hru NIM. Řešení je pozoruhodné mazanou strategií stroje a malým počtem stavebních jednotek. — Z řady převážně technických statí se zmiňme o podrobném návrhu D. SINGRY analogového zařízení pro měření účinnosti některých zařízení chemického průmyslu. Praktické zkušenosti bohužel nejsou uvedeny; a to je současně nedostatek, který je možno vytknout řadě jinak zajímavých článků.

Petr Liebl