

# Aplikace matematiky

---

František Šubart

Příspěvek ke grafickému řešení rovnice vedení tepla

*Aplikace matematiky*, Vol. 8 (1963), No. 2, 150–155

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102846>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1963

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

PŘÍSPĚVEK KE GRAFICKÉMU ŘEŠENÍ ROVNICE VEDENÍ TEPLA

FRANTIŠEK ŠUBART

(Došlo dne 19. března 1962.)

V příspěvku je popsán způsob grafického řešení rovnice nestacionárního vedení tepla ve válcové, resp. kulové stěně.

Vývoj grafických metod řešení diferenciálních rovnic stojí v poslední době v souvislosti se širokým užíváním samočinných počítačů poněkud v pozadí. Přesto tam, kde jde o rychlou orientaci o průběhu řešení a kde není požadována vysoká přesnost, mají grafické metody stále svůj význam. V tomto příspěvku je popsáno grafické řešení diferenciální rovnice pro válcové (kulové) stěny. Tohoto řešení je možno použít i pro řešení speciální pohybové rovnice, rovnice difuze aj., neboť jsou formálně stejně jako uvažovaná rovnice vedení tepla.

Rovnice nestacionárního vedení tepla v nekonečně dlouhém válci, jehož materiálové vlastnosti jsou isotropní a na čas nezávislé, má v polárních souřadnicích pro rotačně symetrický problém tvar

$$(1) \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{\partial t}{r \partial r} \right), \quad \bullet$$

kde  $t = t(r, \tau)$  značí teplotu obecně závislou na poloze (poloměru  $r$ ) a čase  $\tau$ ,  $a$  je součinitel teplotní vodivosti, tj. materiálová veličina podle hořejšího předpokladu konstantní.

Budeme-li uvažovat v rov. (1) konečné změny všech veličin, pak obdržíme diferenční rovnici

$$(2) \quad \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = a \left[ \frac{\Delta^2 t}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r} \frac{\Delta t}{\Delta r} \right].$$

Zavedme označení teploty  $t_{n,m}$ , což značí teplotu na poloměru  $r_n = n \Delta r$  a v čase  $m \Delta \tau$  (obr. 1). Při tom jsou  $n$  a  $m$  celá čísla,  $n$  probíhá od 1 až do počtu dílů na něž je rozdělena stěna válce, resp.  $m$  probíhá od 1 až do konečného (žádaného) počtu časových úseků.

Zřejmě potom platí

$$(3) \quad \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{1}{\Delta \tau} (t_{n,m+1} - t_{n,m}).$$

Protože platí pro poměr diferencí v místě  $n$  a v čase  $m$ , zprava a zleva

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta r}\right)_+ = \frac{1}{\Delta r} (t_{n+1,m} - t_{n,m}) \quad \text{a} \quad \left(\frac{\Delta t}{\Delta r}\right)_- = \frac{1}{\Delta r} (t_{n,m} - t_{n-1,m}).$$

můžeme psát

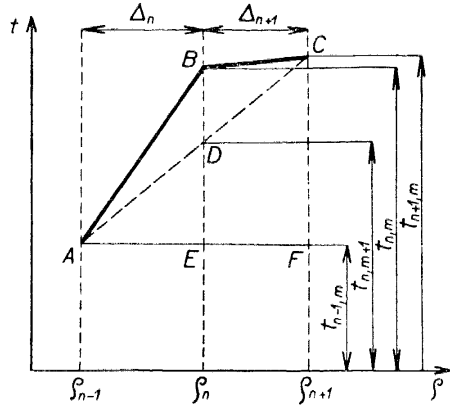
$$(4) \quad \frac{\Delta t}{\Delta r} = \frac{1}{2 \Delta r} (t_{n+1,m} - t_{n-1,m})$$

a podobně

$$(5) \quad \frac{\Delta^2 t}{(\Delta r)^2} = \frac{1}{(\Delta r)^2} (t_{n+1,m} + t_{n-1,m} - 2t_{n,m}).$$

Dosadíme-li rov. (3), (4) a (5) do rov. (2) s uvážením  $r_n = n \Delta r$ , dostaneme vztah

$$(6) \quad t_{n,m+1} - t_{n,m} = a \frac{\Delta \tau}{(\Delta r)^2} \left[ t_{n+1,m} + t_{n-1,m} - 2t_{n,m} + \frac{1}{2n} (t_{n+1,m} - t_{n-1,m}) \right].$$



Obr. 1.

Pro kouli je obdobně diferencní rovnice v případě sféricky symetrického problému

$$(7) \quad \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = a \left[ \frac{\Delta^2 t}{(\Delta r)^2} + \frac{2}{r} \frac{\Delta t}{\Delta r} \right]$$

a po dosazení

$$(8) \quad t_{n,m+1} - t_{n,m} = a \frac{\Delta \tau}{(\Delta r)^2} \left[ t_{n+1,m} + t_{n-1,m} - 2t_{n,m} + \frac{1}{n} (t_{n+1,m} - t_{n-1,m}) \right].$$

Zavedme nyní geometrický model válcové stěny (obr. 1) pro nějž bude platit

$$(9) \quad \varrho_{n+1} - \varrho_n = \Delta_{n+1}$$

a definujme poměr sousedních úseků rovnicí

$$(10) \quad \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = \frac{2n-1}{2n+1}$$

pro  $n = 1, 2, \dots$ . Potom můžeme psát pro poměr  $(n+1)$ -ho a prvního úseku

$$(11) \quad \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_1} = \prod_{i=1}^n \frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_i} = \prod_{i=1}^n \frac{2i-1}{2i+1} = \frac{1}{2n+1},$$

kde  $n = 1, 2, \dots$ . Poměr obecných úseků  $n$ -tého a  $k$ -tého potom bude

$$(12) \quad \frac{A_n}{A_k} = \frac{2k - 1}{2n - 1}$$

pro  $n, k = 1, 2, \dots$

Z obr. 1 potom ihned plyne

$$(13) \quad \overline{BD} = \overline{BE} - \overline{DE} = \overline{BE} - \overline{CF} \frac{A_n}{A_n + A_{n+1}},$$

$$\overline{BD} = t_{n,m} - t_{n,m+1},$$

$$\overline{BE} = t_{n,m} - t_{n-1,m},$$

a

$$\overline{CF} = t_{n+1,m} - t_{n-1,m}.$$

Po dosazení těchto vztahů do rov. (13) s uvážením rov. (10) a úpravě bude

$$(14) \quad t_{n,m+1} - t_{n,m} = \frac{1}{2} \left[ t_{n+1,m} + t_{n-1,m} - 2t_{n,m} + \frac{1}{2n} (t_{n+1,m} - t_{n-1,m}) \right].$$

Chceme-li využít jednoduché grafické metody podobně jako u řešení nestacionárního vedení tepla v rovinné stěně, pak volíme

$$(15) \quad a \frac{\Delta\tau}{(\Delta r)^2} = \frac{1}{2},$$

kterýžto vztah omezuje naši volbu některé diference. Jestliže rov. (15) dosadíme do rov. (6) zjistíme, že výsledek je shodný s rov. (14). Je možno tedy vyslovit větu: *Aby konstrukce provedená v geometrickém modelu, naznačená na obr. 1, byla řešením diferenční rovnice (2), stačí, aby byly splněny rovnice (10) a (15).*

Zřejmě úplně obdobně stačí u koule splnit rov. (15) a rovnici

$$(16) \quad \frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{n - 1}{n + 1}$$

pro  $n = 2, 3, \dots$  příp. poměr

$$(17) \quad \frac{A_{n+1}}{A_2} = \prod_{i=1}^n \frac{A_{i+1}}{A_i} = \prod_{i=2}^n \frac{i - 1}{i + 1} = \frac{2(n - 1)!}{(n + 1)!} = \frac{2}{n(n + 1)}$$

pro  $n = 2, 3, \dots$ . Obecný úsek vztahujeme ke druhému úseku, neboť první je nekonečně veliký. Druhý a další úseky jsou konečné, musí proto platit  $A_i/A_1 = 0$  pro  $i = 2, 3, \dots$ . Poměr obecných úseků je

$$(18) \quad \frac{A_n}{A_k} = \frac{k(k - 1)}{n(n - 1)}$$

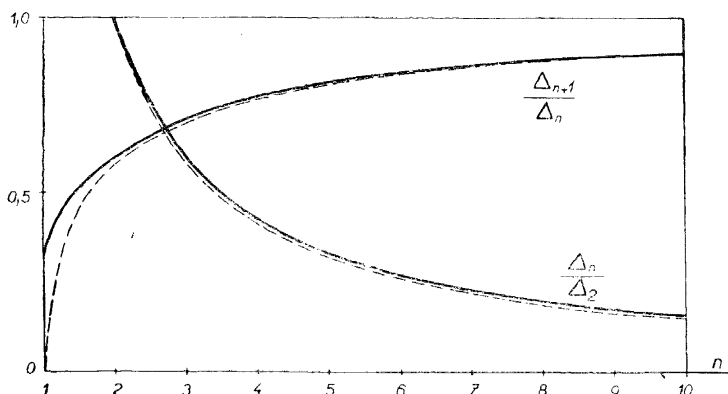
pro  $n, k = 2, 3, \dots$

Podobné řešení je podáno v [2]. Ukážeme, že řešení [2] je pouze přibližné, zvláště pro první úseky válcové stěny. Předpokládá se v něm transformace poloměrů v geometrickém modelu  $\xi = \ln r$ , což po převedení do našeho způsobu řešení dává pro poměr sousedních úseků vztah

$$(19) \quad \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = \ln \frac{n+1}{n} \bigg/ \ln \frac{n}{n-1}.$$

Zřejmě je

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = 1.$$



Obr. 2.

Rozvedeme-li logaritmy z rov. (19) v řadu, pak je

$$\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \dots \right) \bigg/ \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{4n^4} + \dots \right)$$

a při zanedbání třetí a vyšší mocniny plyne teprve

$$\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = \frac{2n-1}{2n+1},$$

což je shodná rovnice s naší rovnicí (10). Zanedbáním vyšších mocnin vzniká pro malá  $n$  nepřijatelná chyba. Pro větší  $n$  je však možno vyjádření (19) dobře použít. Vyneseme-li závislost  $\Delta_{n+1}/\Delta_n = f_1(n)$  a  $\Delta_n/\Delta_2 = f_2(n)$ , obdržíme obr. 2, z něhož jsou patrné odchylky přesného a přibližného řešení (plně je vytaženo přesné řešení podané zde, čárkovaně řešení přibližné).

Uvedený grafický způsob řešení je velmi výhodný, neboť je dostatečně přesný pro řešení technických úloh, velmi jednoduchý a je možno jej použít pro řešení případů

s dosti obecnými okrajovými podmínkami. Např. pro podmínky, že je (index nula přísluší povrchu stěny)

a) zadána teplota stěny  $t_0 = t(\tau)$ ,

b) stěna izolovaná, tj. na stěně platí  $(\partial t / \partial r)_0 = 0$ ,

c) sdílení tepla ze stěny, tj. na stěně platí  $(\partial t / \partial r)_0 = f(t, \tau)$ . Při řešení poslední úlohy je třeba uvážit, že rozměry jednotlivých úseků jsou oproti skutečnosti transformovány a proto tedy platí

$$\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{\partial t}{\partial \varrho} \frac{d\varrho}{dr}.$$

Okrajová podmínka je obvykle formulována rovnicí

$$(20) \quad -\lambda \left( \frac{\partial t}{\partial r} \right)_0 = \alpha(T - t_0),$$

kde  $\lambda = \text{konst}$ ,  $\alpha = \alpha(\tau)$ ,  $T = T(\tau)$  a  $t_0 = t(\tau)$ , takže potom bude

$$(21) \quad \left( \frac{\partial t}{\partial \varrho} \right)_0 = \frac{\alpha(t_0 - T)}{\lambda} \left( \frac{d\varrho}{dr} \right)_0^{-1}.$$

Veličinu  $(d\varrho/dr)_0$  nahradíme veličinou  $(\Delta\varrho/\Delta r)_0$ , kterou určíme ze závislosti  $\Delta\varrho/\Delta n$  a  $n$ . Tuto operaci není třeba provádět graficky, jestliže má povrchová plocha poloměr pro nějž je  $n$  velké. Potom totiž platí vztah (19) dosti přesně a veličinu  $(d\varrho/dr)_0$  můžeme určit ve tvaru

$$\left( \frac{d\varrho}{dr} \right)_0 = \left( \frac{d\xi}{dr} \right)_0 = \frac{1}{r_0},$$

kde  $r_0$  je poloměr povrchu válcové stěny.

Jinak je způsob řešení zcela obdobný způsobu při řešení nestacionárního vedení tepla v rovinné stěně.

#### Literatura

- [1] Schmidt E.: Über die Anwendung der Differenzenrechnung auf technische Anheiz- und Abkühlungsprobleme. August Föppl Festschrift 1924, 179/189.
- [2] Schmidt E.: Das Differenzenverfahren zur Lösung von Differentialgleichungen der nicht-stationären Wärmeleitung, Diffusion und Impulsausbreitung. Forsch. Ing.-Wes. 13 (1942), 177/185.

## Резюме

### ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

ФРАНТИШЕК ШУБАРТ (František Šubart)

В статье описывается точное графическое решение нестационарного теплопровода в цилиндрическом и шарообразном теле. Доказаны условия для осуществления графической конструкции (уравнения 10, 15, 16).

## Summary

### THE GRAPHICAL SOLUTION OF THE HEAT EQUATION

FRANTIŠEK ŠUBART

In the paper there is given the exact graphical solution of the equation of unstable heat conduction for a cylindrical and spherical slab. The conditions for validity of the graphical construction are proved (eqs. 10, 15 and 16 respectively).

*Adresa autora:* Ing. František Šubart C. Sc., Tyršova 37, Brno 12.