Václav Doležal

Zur Äquivalenz „Stern-Dreieck“

Aplikace matematiky, Vol. 7 (1962), No. 6, 457–462

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102829`

ZUR EQUIVALENZ „STERN-DREIECK"

VÁCLAV DOLEŽAL

(Eingegangen am 13. November 1961.)

In dieser Arbeit werden die Fragen der Equivalenz Stern-Vieleck, wenn diese aus parametrischen Zweipolen gebildet sind, untersucht; es werden Bedingungen abgeleitet, unter welchen die Equivalenz besteht.

Aus der klassischen Theorie der linearen Wechselstromschaltungen (mit konstanten Elementen) ist gut bekannt, dass zu jedem Stern $\mathfrak{S}$ ein Vieleck $\mathfrak{V}$ derart gebildet werden kann, dass $\mathfrak{V}$ sich nach aussen gerade so wie $\mathfrak{S}$ verhält. Umgekehrt, zu jedem Dreieck $\mathfrak{D}$ gibt es einen Stern $\mathfrak{S}$, welcher dem Dreiecke $\mathfrak{D}$ nach dem Verhalten nach aussen equivalent ist. Es entsteht die Frage, ob diese Behauptungen auch für parametrische Systeme gelten. Es sei schon hier angegeben, dass diese Frage im allgemeinen verneint werden muss. Trotzdem lassen sich einfache Bedingungen ableiten, unter welchen die oben beschriebene Equivalenz besteht.

Im Weiteren wird vorausgesetzt, dass der Leser mit manchen Tatsachen der Arbeit [1], wenigstens mit dem Admittanzbegriff vertraut ist. Zuerst seien einige Hilfsbegriffe eingeführt.

Es sei $n \geqq 2$ eine ganze Zahl; der parametrische n-Pol $\mathfrak{N}$ (d. h. ein aus zeitlich veränderlichen Elementen gebildetes System, welches durch n Klemmen $K_1, K_2, \ldots$ $\ldots, K_n$ nach aussen einschaltbar ist) soll normal heissen, wenn es eine Quadratmatrix Y, deren Elemente dem Operatorensysteme $\mathfrak{A}$ gehören (vergl. mit [1]), derart gibt, dass zwischen dem Vektor i, dessen Elemente die durch Klemmen $K_1, K_2, \ldots, K_n$ fliessenden Ströme darstellen, und dem Vektor u, dessen Elemente die auf $K_1, K_2, \ldots, K_n$ herrschenden Potentiale sind, die Beziehung

$$i = Yu \tag{1}$$

besteht. Dabei wird Y die „Admittanzmatrix" von $\mathfrak{N}$ genannt.

Zwei n-Pole $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ sollen equivalent heissen, wenn sie normal sind und ihre Admittanzmatrizen identisch sind.

Der parametrische n-Pol wird n-Stern genannt, wenn er aus Zweipolen $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \ldots$ $\ldots, \mathfrak{Z}_n$ in der aus Abb. 1. erkennbaren Weise gebildet ist. Der parametrische n-Pol wird n-Eck genannt, wenn er aus Zweipolen $\mathfrak{Z}_{ik}$, $i < k = 1, 2, \ldots, n$ laut Abb. 2. gebildet ist.

Jetzt kann man schon folgende Behauptung aussprechen:

Es seien $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \ldots, \mathfrak{Z}_n$ *parametrische Zweipole, welche die Admittanzen* $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_n$ *besitzen, wobei* $\sum_{i=1}^{n} A_i$ *einen regulären Operator darstellt; dann gilt: Der aus den Zweipolen* $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \ldots, \mathfrak{Z}_n$ *gebildete n-Stern ist normal, wobei für die entsprechende Admittanzmatrix* $Y = [Y_{ik}]$ *die Gleichungen*

$$
\begin{aligned}
Y_{ik} &= - A_i Z A_k \quad \text{für} \quad i \neq k\,;\ i, k = 1, 2, \ldots, n\,, \\
Y_{ii} &= A_i - A_i Z A_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,, \\
Z &= \Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big)^{-1}
\end{aligned} \tag{2}
$$

gelten.

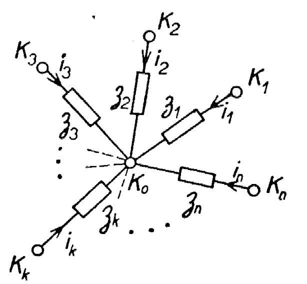

Abb. 1.

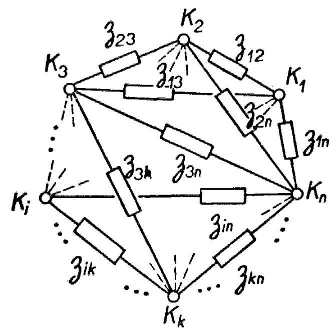

Abb. 2.

Tatsächlich, bezeichnet man mit $u_1, u_2, \ldots, u_n$ die auf Klemmen $K_1, K_2, \ldots, K_n$ herrschenden Potentiale, mit u_0 das auf dem der Zweipolen $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \ldots, \mathfrak{Z}_n$ gemeinsammen Knoten K_0 herrschende Potential, und mit $i_1, i_2, \ldots, i_n$ die die Klemmen $K_1, K_2, \ldots, K_n$ durchfliessenden Ströme, so kann man laut der Admittanzdefinition schreiben

$$
i_k = A_k(u_k - u_0)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{3}
$$

Da nach dem zweiten Kirchhoffschen Gesetze die Gleichung $\sum_{k=1}^{n} i_k = 0$ für den Knoten K_0 gelten muss, so ergibt sich laut (3)

$$
\Big(\sum_{k=1}^{n} A_k\Big)\, u_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k u_k\,, \tag{4}
$$

woraus $u_0 = Z \sum_{k=1}^{n} A_k u_k$ folgt. Setzt man für u_0 in (3) ein, so ergeben sich unmittelbar die Gleichungen (2).

Man beachte, dass die Matrix Y allgemein nicht symmetrisch ist.

Analog kann man behaupten:

Es seien $\mathfrak{Z}_{ik}$, $i < k = 1, 2, \ldots, n$ die parametrischen Zweipole, welche die Admittanzen A_{ik} besitzen. Das aus den Zweipolen $\mathfrak{Z}_{ik}$ gebildete n-Eck ist dann normal, und für die entsprechende Admittanzmatrix $Y = [Y_{ik}]$ gilt

$$(5) \qquad \begin{aligned} Y_{ik} &= - A_{ik} \quad \textit{für} \quad i \neq k\,;\; i, k = 1, 2, \ldots, n\,, \\ Y_{ii} &= \sum_{\mu=1, \mu \neq i}^{n} A_{i\mu}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,, \end{aligned}$$

wo $A_{ik} = A_{ki}$ für $i > k$ gesetzt wurde.

Wirklich, wenn u_k, i_k die Bedeutung des Potentials bzw. des Stromes der Klemme K_k hat, so gilt

$$(6) \qquad i_k = \sum_{\mu=1, \mu \neq k}^{n} A_{k\mu}(u_k - u_\mu)\,,$$

woraus die Gleichungen (5) unmittelbar folgen.

Man beachte gleichzeitig, dass die Admittanzmatrix des n-Eckes immer symmetrisch ist.

Widmen wir jetzt unsere Aufmerksamkeit den Fragen der Equivalenz! Vor allem sei folgender Hilfsbegriff eingeführt: Das System $\{X_\nu\}$ von Operatoren soll subkommutativ heissen, wenn 1) jeder Operator $X_a \in \{X_\nu\}$ regulär ist, 2) für beliebige drei Operatoren X_α, X_β, $X_\gamma \in \{X_\nu\}$ die Gleichung

$$(7) \qquad X_\alpha X_\beta^{-1} X_\gamma = X_\gamma X_\beta^{-1} X_\alpha$$

besteht. Man beachte, dass (7) durch

$$(8) \qquad X_\alpha^{-1} X_\beta X_\gamma^{-1} = X_\gamma^{-1} X_\beta X_\alpha^{-1}$$

ersetzt werden kann.

Bemerkung. Der Begriff der „Subkommutativität" ist offensichtlich schwächer als der Kommutativitätsbegriff. Wirklich, ist das System $\{X_\nu\}$ kommutativ, d. h. wenn $X_\alpha X_\beta = X_\beta X_\alpha$ für je zwei Elemente X_α, X_β gilt, so sieht man leicht ein, dass $\{X_\nu\}$ auch subkommutativ ist, (vorausgesetzt, dass X_ν regulär sind.) Das Umgekehrte gilt jedoch nicht; nimmt man nämlich das System $S = \{X_1, X_2, X_3\}$, wo $X_1 = X_2$ und $X_2 X_3 \neq X_3 X_2$ in Betracht, so ist es klar, dass (7) erfüllt ist, und dass das System S nicht kommutativ ist.

Jetzt kann man schon den folgenden einfachen Satz aussprechen:

Satz 1. *Es seien A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ die Admittanzen der Zweipole, aus welchen der n-Stern $\mathfrak{S}$ gebildet ist, und es existiere $Z = (\sum_{i=1}^{n} A_i)^{-1}$. Wenn für jedes Paar $i, k = 1, 2, \ldots, n$ die Gleichung*

$$(9) \qquad A_i Z A_k = A_k Z A_i$$

gilt, so gibt es ein n-Eck $\mathfrak{B}$, welches dem n-Sterne $\mathfrak{S}$ equivalent ist. Für die Admittanzen A_{ik} der das n-Eck $\mathfrak{B}$ bildenden Zweipole $\mathfrak{Z}_{ik}$ gilt dann

$$A_{ik} = A_i Z A_k\,, \quad i < k = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{10}$$

Ausserdem gilt: Die Bedingung (9) *ist erfüllt, wenn* $\{A_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *ein subkommutatives System bildet.*

Der Beweis ist einleuchtend; bildet man das n-Eck $\mathfrak{B}$ mit den Zweipoladmittanzen laut (10), so ist klar, (vegl. mit (2), (5)), dass alle sich entsprechenden Elemente der Admittanzmatrizen von $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{B}$, mit Ausnahme der diagonalen, gleich sind. Laut (5) gilt jedoch

$$Y_{ii} = \sum_{\mu=1,\mu\neq i}^{n} A_{i\mu} = \sum_{\mu=1,\mu\neq i}^{n} A_i Z A_\mu = A_i Z\Big(\sum_{\mu=1}^{n} A_\mu - A_i\Big) = A_i - A_i Z A_i\,,$$

womit die Gleichheit der diagonalen Elemente und somit auch die Equivalenz bewiesen ist. Wenn jetzt $\{A_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ subkommutativ ist und wählt man irgendzwei Indizes i, k, so folgt aus (8) dass $A_i^{-1} A_j A_k^{-1} = A_k^{-1} A_j A_i^{-1}$ gilt; addiert man diese Gleichungen für $j = 1, 2, \ldots, n$, so ergibt sich $A_i^{-1} Z^{-1} A_k^{-1} = A_k^{-1} Z^{-1} A_i^{-1}$, w. z. b. w.

Wie im klassischen Falle, so auch bei den parametrischen Systemen kann man nicht erwartes, dass zu einem n-Eck immer ein equivalenter n-Stern existiert; es ist nämlich klar, dass ein n-Eck durch $n(n-1)/2$ Elemente, während ein n-Stern nur durch n Elemente beschrieben ist. Die Gleichheit der Elementenanzahl findet nur für $n = 3$ statt. Es sei also jetzt dieser Fall näher betrachtet. Da gilt folgende Behauptung:

Satz 2. *Es seien A_{12}, A_{23}, A_{31} die Admittanzen der Zweipole, welche das Dreieck $\mathfrak{D}$ bilden. Wenn $\{A_{12}, A_{23}, A_{31}\}$ ein subkommutatives System ist und $W = A_{12}^{-1} + A_{23}^{-1} + A_{31}^{-1}$ einen regulären Operator darstellt, so gibt es einen 3-Stern $\mathfrak{S}$, welcher dem Dreiecke $\mathfrak{D}$ equivalent ist. Für die Admittanzen der $\mathfrak{D}$ bildenden Zweipole gilt dann*

$$A_1 = A_{12} W A_{31}\,, \quad A_2 = A_{23} W A_{12}\,, \quad A_3 = A_{31} W A_{23}\,. \tag{11}$$

Beweis: Vor allem ist klar, dass $\{A_{12}, A_{23}, A_{31}, W^{-1}\}$ ein subkommutatives System bildet. Hieraus folgt, dass auch die durch (11) definierten Operatoren $\{A_1, A_2, A_3\}$ ein subkommutatives System bilden. Tatsächlich, A_1, A_2, A_3 sind offensichtlich regulär; ferner kann man schreiben

$$A_1 A_2^{-1} A_3 = A_{12} W A_{31} A_{12}^{-1} W^{-1} A_{23}^{-1} A_{31} W A_{23} =$$
$$= A_{31} W A_{12} A_{12}^{-1} W^{-1} A_{23}^{-1} A_{23} W A_{31} = A_{31} W A_{31}\,.$$

Analog bekommt man $A_3 A_2^{-1} A_1 = A_{31} W A_{31}$, woraus $A_1 A_2^{-1} A_3 = A_3 A_2^{-1} A_1$ folgt. Weitere zwei Gleichungen ergeben sich durch zyklischen Wechsel der Indizes.

Setzt man jetzt $A = A_1 + A_2 + A_3$, so gilt:

$$
\begin{aligned}
(12) \qquad & A_1^{-1}AA_2^{-1} = A_1^{-1} + A_2^{-1} + A_1^{-1}A_3A_2^{-1} = \\
&= A_{31}^{-1}W^{-1}A_{12}^{-1} + A_{12}^{-1}W^{-1}A_{23}^{-1} + A_{31}^{-1}W^{-1}A_{12}^{-1}A_{31}WA_{23}A_{12}^{-1}W^{-1}A_{23}^{-1} = \\
&= A_{12}^{-1}W^{-1}A_{31}^{-1} + A_{12}^{-1}W^{-1}A_{23}^{-1} + A_{12}^{-1}W^{-1}A_{31}^{-1}A_{31}WA_{23}A_{23}^{-1}W^{-1}A_{12}^{-1} = \\
&= A_{12}^{-1}W^{-1}(A_{31}^{-1} + A_{23}^{-1} + A_{12}^{-1}) = A_{12}^{-1} .
\end{aligned}
$$

Durch zyklischen Wechsel folgt

$$(13) \qquad A_2^{-1}AA_3^{-1} = A_{23}^{-1} , \quad A_3^{-1}AA_1^{-1} = A_{31}^{-1} .$$

Aus (12) folgt weiter, dass A ein regulärer Operator ist. Laut (12), (13) kann man also schreiben

$$(14) \qquad A_1A^{-1}A_2 = A_{12} , \quad A_2A^{-1}A_3 = A_{23} , \quad A_3A^{-1}A_1 = A_{31} .$$

Betrachten wir jetzt den 3-Stern $\mathfrak{S}$ der aus Zweipolen $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$, $\mathfrak{Z}_3$ mit Admittanzen A_1, A_2, A_3 gebildet ist. $\mathfrak{S}$ ist offensichtlich normal; aus der Subkommutativität von $\{A_1, A_2, A_3\}$ und aus (14) folgt jedoch laut Satz 1, dass $\mathfrak{S}$ dem Dreiecke $\mathfrak{D}$ equivalent ist, w. z. b. w.

B e m e r k u n g. Setzt man voraus, dass die Admittanzen A_{12}, A_{23}, A_{31} der Zweipole irgendeines Dreiecks $\mathfrak{D}$ regulär sind, so sieht man leicht ein, dass die Bedingung über die Subkommutativität von $\{A_{12}, A_{23}, A_{31}\}$ für die Equivalenz wesentlich ist. Tatsächlich, setzen wir voraus, dass ein solches Dreieck $\mathfrak{D}$ einem 3-Stern equivalent ist, d. h. dass es Admittanzen A_1, A_2, A_3 gibt, für welche a) der Operator $Z = (A_1 + A_2 + A_3)^{-1}$ existiert, b) die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
(15) \qquad A_1ZA_2 &= A_2ZA_1 = A_{12} , \\
A_2ZA_3 &= A_3ZA_2 = A_{23} , \\
A_3ZA_1 &= A_1ZA_3 = A_{31}
\end{aligned}
$$

bestehen. Aus (15) folgt zuerst, dass A_1, A_2, A_3 reguläre Operatoren sind. Ferner kann man schreiben

$$A_{12}A_{23}^{-1}A_{31} = A_1ZA_2A_2^{-1}Z^{-1}A_3^{-1}A_3ZA_1 = A_1ZA_1 .$$

Ähnlicherweise folgt $A_{31}A_{23}^{-1}A_{12} = A_1ZA_1$; durch zyklischen Wechsel ergeben sich weitere zwei Gleichungen, welche gemeinsam mit der vorhergehenden die Subkommutativität des Systems $\{A_{12}, A_{23}, A_{31}\}$ ausdrücken.

Zum Schluss möchte ich hiermit dem Herrn Dr. J. KUDREWICZ aus Warschau, welcher mich zu den eben angegebenen Unteruchungen angeregt hatte, meinen herzlichen Dank aussprechen.

Literatur

[1] *Doležal V.:* Über die Anwendung von Operatoren in der Theorie der linearen dynamischen Systeme. Aplikace matematiky 1961, Nr. 1.

Výtah

O EKVIVALENCI „HVĚZDA-TROJÚHELNÍK“

VÁCLAV DOLEŽAL

V práci jsou odvozeny podmínky ekvivalence „hvězda-mnohoúhelník“, jsou-li tyto vytvořeny z parametrických dvojpólů. Je ukázáno, že ke každé hvězdě existuje ekvivalentní mnohoúhelník, jestliže admitance dvojpólů hvězdy tvoří subkomutativní systém, tj. jestliže splňují jisté oslabené podmínky komutativity a regularity. Dále je dokázáno, že ke každému trojúhelníku existuje ekvivalentní hvězda, jestliže admitance dvojpólů trojúhelníka tvoří subkomutativní systém. Závěrem je pak poukázáno na to, že požadované podmínky subkomutativity jsou v jistém smyslu nutnými podmínkami.

Резюме

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ „ЗВЕЗДА – ТРЕУГОЛЬНИК“

ВАЦЛАВ ДОЛЕЖАЛ (Václav Doležal)

В работе выведены условия для эквивалентности „звезда—многоугольник“, когда последние образованы параметрическими двухполюсниками. Показано, что к любой звезде существует эквивалентный многоугольник, если адмитансы двухполюсников звезды образуют субкоммутативную систему, т. е. если они удовлетворяют некоторым ослабленным условиям коммутативности и регулярности. Далее показано, что к любому треугольнику существует эквивалентная звезда, если адмитансы двухполюсников треугольника образуют субкоммутативную систему. В заключение показано, что налагаемые условия субкоммутативности являются в определенном смысле необходимыми условиями.

Adresa autora: Inž. *Václav Doležal* C. Sc., Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, Praha 1.