

Aplikace matematiky

Josef Schmid

Teplotní pole válcově souměrných prostředí se zdroji tepla libovolného průběhu při okrajových podmínkách, proměnných po obvodu

Aplikace matematiky, Vol. 7 (1962), No. 5, 353–374

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102818>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1962

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

TEPLOTNÍ POLE VÁLCOVĚ SOUMĚRNÝCH PROSTŘEDÍ SE ZDROJI TEPLA LIBOVOLNÉHO PRŮBĚHU PŘI OKRAJOVÝCH PODMÍNKÁCH, PROMĚNNÝCH PO OBVODU

JOSEF SCHMID

(Došlo dne 11. srpna 1961.)

Práce se zabývá řešením teplotního pole ve válcově souměrných tělesech, složených z libovolného počtu vrstev, centricky i excentricky uspořádaných při libovolném průběhu tepelných zdrojů pro případ, kdy okrajové podmínky jsou po obvodu proměnné.

Je uvedeno řešení některých úloh, vyskytujících se při podrobném tepelném výpočtu palivových článků jaderných reaktorů.

I. ÚVOD

V některých oborech technické praxe, ve vědě a výzkumu je možno nalézt celou řadu úloh, kdy je třeba poměrně přesně určit teplotní pole ve válcově souměrných prostředích při okrajových podmínkách, proměnných po obvodu a pro tepelné zdroje, závisící na poloměru a azimutálním úhlu.

Do této skupiny problémů je možno zařadit úlohy, které bývají řešeny při výpočtu bezpečnosti palivového článku jaderného reaktoru proti přehřátí. Prohnutí nebo dotyk tyček v palivovém článku tyčkového typu vede k nestejnomořnému ochlazování a nakonec ke vzrůstu maximální teploty jak na povrchu povlaku, tak uvnitř tyčky. Jako další úlohy je možno jmenovat: excentricitu povlaku, respektování závislosti tepelného výkonu na obou souřadnicích při podrobném tepelném výpočtu trubkového palivového článku, proměnnost kontaktního odporu po obvodu atd.

Je tedy účelné se zabývat problémem řešení teplotního pole pro případ, že okrajové podmínky jsou po obvodu proměnné a tepelné zdroje jsou funkcí poloměru a azimutálního úhlu.

Ve výpočtech předpokládáme, že tepelná vodivost materiálů a součinitel přestupu tepla u třetí okrajové podmínky nezávisí na teplotě. Zanedbáváme též vedení tepla ve směru osy z .

2. POUŽITÁ OZNAČENÍ

r, φ	polární souřadnice [m], [rad]
R	poloměr rozhraní dvou prostředí [m]
t	teplota [°C]
λ	tepelná vodivost [kcal/mh°C]
α	součinitel přestupu tepla [kcal/m ² h°C]
g	hustota tepelných zdrojů [kcal/m ³ h]
\bar{g}	tepelný tok [kcal/m ² h]
ϱ	tepelný odpor kontaktu [m ² h°C/kcal]
e	excentricita.

3. OBECNÉ ŘEŠENÍ POISSONOVY ROVNICE

Úloha je popsána rovnicí vedení tepla

$$(1) \quad -\lambda \nabla^2 t = g(\mathbf{r}).$$

Pro válcovou geometrii při zanedbání vedení tepla ve směru osy z lze rovnici (1) přepsat do tvaru [1]

$$(2) \quad \frac{\partial^2 t(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial t(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 t(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} = -Q(r, \varphi),$$

kde

$$Q(r, \varphi) = \frac{1}{\lambda} g(r, \varphi).$$

Hledíme řešení rovnice (2) ve tvaru řady

$$t = \sum_{n=0}^{\infty} [{}^c f_n(r) \cos n\varphi + {}^s f_n(r) \sin n\varphi].$$

Dosadíme-li derivace $\partial t/\partial r$, $\partial^2 t/\partial r^2$ a $\partial^2 t/\partial \varphi^2$ předpokládaného tvaru řešení a Fourierovu řadu pro zdroje

$$Q(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} [{}^c \bar{g}_n(r) \cos n\varphi + {}^s \bar{g}_n(r) \sin n\varphi]$$

do rovnice (2), dostáváme

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} [{}^c f_n''(r) \cos n\varphi + {}^s f_n''(r) \sin n\varphi] + \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} [{}^c f_n'(r) \cos n\varphi + {}^s f_n'(r) \sin n\varphi] - \\ & - \frac{1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 [{}^c f_n(r) \cos n\varphi + {}^s f_n(r) \sin n\varphi] = - \sum_{n=0}^{\infty} [{}^c \bar{g}_n(r) \cos n\varphi + {}^s \bar{g}_n(r) \sin n\varphi]. \end{aligned}$$

Tuto rovnici rozepíšeme pro jednotlivé funkce proměnné φ a dostáváme pro každé n obvyčejnou lineární diferenciální rovnici tvaru

$$(3) \quad {}^l f_n''(r) + \frac{1}{r} {}^l f_n'(r) - \frac{1}{r^2} n^2 {}^l f_n(r) = - {}^l \bar{g}_n(r) \quad (n = 0, 1, 2, \dots; l = c, s).$$

Řešení těchto rovnic lze uskutečnit pomocí metody integračních faktorů [2]. Lze odvodit

$${}^c f_0(r) = A_0 + B_0 \lg r - \int_{r_0}^r \frac{1}{r'} \int_{r'_0}^{r'} {}^c \bar{g}_0(r'') r'' dr'' dr' = A_0 + B_0 \lg r + {}^c Z_0,$$

$${}^c f_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n} - r^n \int_{r_0}^r (r')^{-(2n+1)} \int_{r'_0}^{r'} {}^c \bar{g}_n(r'') (r'')^{n+1} dr'' dr' = A_n r^n + B_n r^{-n} + {}^c Z_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$${}^s f_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n} - r^n \int_{r_0}^r (r')^{-(2n+1)} \int_{r'_0}^{r'} {}^s \bar{g}_n(r'') (r'')^{n+1} dr'' dr' = C_n r^n + D_n r^{-n} + {}^s Z_n, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(integrály je třeba chápat jako neurčité integrály; r'_0 a r_0 jsou vhodně zvolené meze).

Řešení parciální diferenciální rovnice (2) lze tedy napsat ve tvaru

$$(4) \quad t(r, \varphi) = A_0 + B_0 \lg r + {}^c Z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n r^n + B_n r^{-n} + {}^c Z_n) \cos n\varphi + (C_n r^n + D_n r^{-n} + {}^s Z_n) \sin n\varphi].$$

Derivace $\partial t(r, \varphi) / \partial r$, kterou budeme potřebovat v dalším výpočtu, je možno napsat takto:

$$(5) \quad \frac{\partial t(r, \varphi)}{\partial r} = \frac{B_0}{r} + {}^c Z'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ [n(A_n r^{n-1} - B_n r^{-n-1}) + {}^c Z'_n] \cos n\varphi + [n(C_n r^{n-1} - D_n r^{-n-1}) + {}^s Z'_n] \sin n\varphi \}.$$

4. OKRAJOVÉ PODMÍNKY

Abychom si usnadnili řešení teplotního pole mezikruhové oblasti, složené z libovolného počtu vrstev (centricky nebo excentricky uspořádaných), bude výhodné se nejprve zabývat jednotlivými typy vnějších okrajových podmínek na vnitřním a vnějším poloměru mezikruhové oblasti. Výpočtové vztahy uvedeme pro vnitřní a vnější povrch společně (pokud se ve vzorcích vyskytnou nad sebou dvě znaménka, platí horní znaménko pro vnější poloměr a dolní pro vnitřní poloměr). Vnitřní (čtvrtá) okrajová podmínka se zabývá podmínkami na rozhraní dvou prostředí. V odstavci 5 použijeme odvozených vztahů pro řešení teplotního pole složené oblasti.

Zkoumejme nyní okrajové podmínky na povrchu oblasti a na rozhraní mezi vrstvami o nespojitých teplotních vlastnostech a hledejme závislosti, které pro integrační konstanty A_n , B_n , C_n , D_n z těchto podmínek vyplývají.

nebo po přeskupení členů

$$\pm \frac{\partial t(r, \varphi)}{\partial r} \Big|_{r=R} + \frac{\alpha(\varphi)}{\lambda} t(R, \varphi) = \frac{\alpha(\varphi)}{\lambda} t_0(\varphi),$$

kde $\alpha(\varphi)$ a $t_0(\varphi)$ jsou známé funkce nezávisle proměnné φ . Dosadíme-li za $\partial t(r, \varphi)/\partial r$ a $t(R, \varphi)$ z rovnic (5) a (4) a za $\alpha(\varphi)/\lambda$ a $t_0(\varphi)$ Fourierovy řady těchto veličin, můžeme s použitím známých vztahů pro součiny trigonometrických funkcí odvodit rovnici tvaru

$$(9) \quad {}_3\mathbf{M} \cdot \mathbf{C} = {}_3\mathbf{F},$$

kde

$${}_3\mathbf{M} = \mathbf{K}_a \mathbf{M} \pm {}_2\mathbf{M}, \\ {}_3\mathbf{F} = \mathbf{K}_a(\mathbf{T}_0 - \mathbf{Z}) \mp \mathbf{Z}'.$$

Vektor \mathbf{T}_0 obsahuje Fourierovy součinitele rozvoje pro t_0 a matice \mathbf{K}_a je pouze funkce Fourierových koeficientů rozvoje pro $\alpha(\varphi)/\lambda$,

$$\mathbf{K}_a = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2a_0 & a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & a_3 & b_3 & a_4 & \dots \\ 2a_1 & 2a_0 + a_2 & b_2 & a_1 + a_3 & b_1 + b_3 & a_2 + a_4 & b_2 + b_4 & a_3 + a_5 & \dots \\ 2b_1 & b_2 & 2a_0 - a_2 & -b_1 + b_3 & a_1 - a_3 & -b_2 + b_4 & a_2 - a_4 & -b_3 + b_5 & \dots \\ 2a_2 & a_1 + a_3 & -b_1 + b_3 & 2a_0 + a_4 & b_4 & a_1 + a_5 & b_1 + b_5 & a_2 + a_6 & \dots \\ 2b_2 & b_1 + b_3 & a_1 - a_3 & b_4 & 2a_0 - a_4 & -b_1 + b_5 & a_1 - a_5 & -b_2 + b_6 & \dots \\ 2a_3 & a_2 + a_4 & -b_2 + b_4 & a_1 + a_5 & -b_1 + b_5 & 2a_0 + a_6 & b_6 & a_1 + a_7 & \dots \\ 2b_3 & b_2 + b_4 & a_2 - a_4 & b_1 + b_5 & a_1 - a_5 & b_6 & 2a_0 - a_6 & -b_1 + b_7 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{bmatrix}.$$

4.4. Čtvrtá okrajová podmínka

Tato podmínka popisuje podmínky na styku dvou povrchů. Předpokládáme-li, že styk je dokonalý, musí být splněna podmínka rovnosti teplot v místě styku a podmínka rovnosti tepelných toků v bezprostřední blízkosti styku obou vrstev. Ve skutečnosti klade styk dvou povrchů procházejícímu teplu odpor (kontaktní odpor ϱ), takže se teploty obou povrchů liší. Podmínky lze tedy napsat ve tvaru

$$t_2(R, \varphi) = t_1(R, \varphi) + \lambda_1 \varrho(\varphi) \frac{\partial t_1(r, \varphi)}{\partial r} \Big|_{r=R}, \\ -\lambda_2 \frac{\partial t_2(r, \varphi)}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\lambda_1 \frac{\partial t_1(r, \varphi)}{\partial r} \Big|_{r=R}.$$

Dosadíme do těchto rovnic řady (4) a (5), rozvineme kontaktní odpor do Fourierovy

nedbáme-li pro jednoduchost kontaktní odpor, můžeme okrajové podmínky napsat ve tvaru

$$t_2(\bar{r}, \varphi') = t_1(R, \varphi),$$

$$-\lambda_2 \left[\frac{\partial t_2(r', \varphi')}{\partial r'} \right]_{r'=\bar{r}} \cos \varepsilon - \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial t_2(\bar{r}, \varphi')}{\partial \varphi'} \sin \varepsilon = -\lambda_1 \frac{\partial t_1(r, \varphi)}{\partial r} \Big|_{r=R}.$$

Vztahy mezi úhly v obou souřadnicových soustavách a hodnotami \bar{r} a R jsou tvaru

$$(11) \quad \cos \varphi' = \frac{\cos \varphi - e}{\sqrt{(1 - 2e \cos \varphi + e^2)}}, \quad \sin \varphi' = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{(1 - 2e \cos \varphi + e^2)}},$$

$$\bar{r} = R \sqrt{(1 - 2e \cos \varphi + e^2)},$$

$$\cos \varepsilon = \frac{1 - e \cos \varphi}{\sqrt{(1 - 2e \cos \varphi + e^2)}}, \quad \sin \varepsilon = \frac{e \sin \varphi}{\sqrt{(1 - 2e \cos \varphi + e^2)}},$$

kde

$$e = \frac{b}{R}.$$

Předpokládejme, že excentricita je malá a rozvedme výrazy (11) podle binomické věty. Ponecháme-li v rozvoji pouze lineární členy excentricity e , dostaneme po úpravách pro průběh teplot v pásmu 2 na poloměru $r' = \bar{r}$ vztah (omezíme se na $n \leq 3$)

$$t_2(\bar{r}, \varphi') = t_2(R, \varphi) =$$

$$= {}_2A_0 + {}_2B_0(\lg R - e \cos \varphi) + {}_2Z_0 - e \cos \varphi {}_2\bar{Z}_0 +$$

$$+ V_1 \cos \varphi + X_1 \sin \varphi + \frac{1}{2}e[(W_1 - V_1) +$$

$$+ (W_1 + V_1) \cos 2\varphi + (Y_1 + X_1) \sin 2\varphi] +$$

$$+ V_2 \cos 2\varphi + X_2 \sin 2\varphi + e[(W_2 - V_2) \cos \varphi + (Y_2 - X_2) \sin \varphi +$$

$$+ (W_2 + V_2) \cos 3\varphi + (Y_2 + X_2) \sin 3\varphi] +$$

$$+ V_3 \cos 3\varphi + X_3 \sin 3\varphi + \frac{3}{2}e[(W_3 - V_3) \cos 2\varphi + (Y_3 - X_3) \sin 2\varphi],$$

kde

$$V_n = {}_2A_n R^n + {}_2B_n R^{-n} + {}_2Z_n, \quad X_n = {}_2C_n R^n + {}_2D_n R^{-n} + {}_2Z_n,$$

$$W_n = -{}_2A_n R^n + {}_2B_n R^{-n} - \frac{1}{n} {}_2\bar{Z}_n, \quad Y_n = -{}_2C_n R^n + {}_2D_n R^{-n} - \frac{1}{n} {}_2\bar{Z}_n$$

a kde

$${}_2\bar{Z}_n = R {}_2Z'_n.$$

Po dosazení do okrajových podmínek lze odvodit

$$(12) \quad \mathbf{C}_2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{C}_1 + {}_e\mathbf{F},$$

5. ŘEŠENÍ OKRAJOVÝCH ÚLOH

Zabýváme se nyní řešením teplotního pole soustav, složených z libovolného počtu vrstev, centricky nebo excentricky uspořádaných.

Ukončíme-li matice a vektory, popisující okrajové podmínky, u N -té harmonické složky, dostáváme pro jednu vrstvu $2 + 4N$ neznámých integračních konstant. Pro mezikruhovou oblast, skládající se z L vrstev, máme celkem

$$K = (2 + 4N)L$$

integračních konstant. Okrajové podmínky na rozhraních reprezentují

$$(L - 1)(2 + 4N)$$

rovníc, zatímco okrajové podmínky na vnitřním a vnějším povrchu

$$2(1 + 2N)$$

rovníc. Počet hledaných integračních konstant souhlasí s počtem rovnic.

Vzeme za základ výpočtu integrační konstanty nejbliže ke středu položené zony, tj. \mathbf{C}_1 a vyloučíme postupně ostatní integrační konstanty. Dostáváme

$$(14) \quad \mathbf{C}_l = {}_4\mathbf{M}_{1,l} \mathbf{C}_1 + {}_4\mathbf{F}_{1,l} \quad (l = 2, 3, \dots, L),$$

kde

$$\begin{aligned} {}_4\mathbf{M}_{1,l} &= {}_4\mathbf{M}_{l-1,l} \cdot {}_4\mathbf{M}_{l-2,l-1} \cdots {}_4\mathbf{M}_{2,3} \cdot {}_4\mathbf{M}_{1,2}, \\ {}_4\mathbf{F}_{1,l} &= {}_4\mathbf{M}_{l-1,l} \cdot {}_4\mathbf{M}_{l-2,l-1} \cdots {}_4\mathbf{M}_{2,3} \cdot {}_4\mathbf{F}_{1,2} + {}_4\mathbf{M}_{l-1,l} \cdot {}_4\mathbf{M}_{l-2,l-1} \cdots {}_4\mathbf{M}_{3,4} \cdot \\ &\quad \cdot {}_4\mathbf{F}_{2,3} + \cdots + {}_4\mathbf{M}_{l-1,l} \cdot {}_4\mathbf{F}_{l-2,l-1} + {}_4\mathbf{F}_{l-1,l}. \end{aligned}$$

Dostaneme tedy tři maticové rovnice tvaru

$$\begin{aligned} {}_k\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{C}_1 &= {}_k\mathbf{F}_1, \\ {}_m\mathbf{M}_L \cdot \mathbf{C}_L &= {}_m\mathbf{F}_L, \\ \mathbf{C}_L &= {}_4\mathbf{M}_{1,L} \mathbf{C}_1 + {}_4\mathbf{F}_{1,L}, \end{aligned}$$

kde $k, m = 1, 2, 3$ charakterisují prvou, druhou nebo třetí okrajovou podmínku. Spojením posledních dvou rovnic a použitím označení¹⁾

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} {}_k\mathbf{M}_1 & & \\ & \cdots & \\ {}_m\mathbf{M}_L & \cdot & {}_4\mathbf{M}_{1,L} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} {}_k\mathbf{F}_1 & & \\ & \cdots & \\ {}_m\mathbf{F}_L & - & {}_m\mathbf{M}_L \cdot {}_4\mathbf{F}_{1,L} \end{bmatrix},$$

¹⁾ Horní část čtvercové matice \mathbf{M} řádu $2 + 4N$ tvoří obdélníková matice ${}_k\mathbf{M}_1$ typu $(1 + 2N, 2 + 4N)$ a dolní část matice ${}_m\mathbf{M}_L \cdot {}_4\mathbf{M}_{1,L}$ typu $(1 + 2N, 2 + 4N)$. Obdobný význam má označení \mathbf{F} .

můžeme soustavu přepsat do tvaru

$$(15) \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{C}_1 = \mathbf{F}.$$

V případě, že na obou povrchových plochách není okrajová podmínka druhého typu ($m = k \neq 2$), lze řešení rovnic (15) napsat ve tvaru

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{F}.$$

Ostatní integrační konstanty určíme ze vztahů (14). Jestliže se na obou rozhraních R_0 a R_L uplatňuje druhá okrajová podmínka, má matice \mathbf{M} nulitu rovnou jedné. Jestliže je však splněna podmínka

$$\int_0^{2\pi} \int_{R_0}^{R_L} g(r, \varphi) r dr d\varphi = R_0 \lambda_1 \int_0^{2\pi} \left. \frac{\partial t_1}{\partial r} \right|_{r=R_0} d\varphi - R_L \lambda_L \int_0^{2\pi} \left. \frac{\partial t_L}{\partial r} \right|_{r=R_L} d\varphi,$$

jsou prvky prvního řádku matice ${}_k \mathbf{M}_1$ a ${}_m \mathbf{M}_L \cdot {}_4 \mathbf{M}_{1,L}$ a také první složky vektorů ${}_k \mathbf{F}_1$ a ${}_m \mathbf{F}_L - {}_m \mathbf{M}_L \cdot {}_4 \mathbf{F}_{1,L}$ sobě úměrné. Soustava lineárních algebraických rovnic, reprezentovaná rovnicí (15), není tedy ve sporu. Škrtnutím prvního sloupce matice \mathbf{M} (který je nulový) a první řádky buď matice ${}_k \mathbf{M}_1$ nebo ${}_m \mathbf{M}_L \cdot {}_4 \mathbf{M}_{1,L}$ a odpovídající složky vektoru \mathbf{F} odstraníme nulitu matice \mathbf{M} a rovnici (15) můžeme bez obtíží řešit. Řešení je ovšem určeno až na aditivní konstantu.

Jestliže je oblast složena z více vrstev, navzájem excentricky umístěných, je výpočet obdobný. Osu x položíme do směru první, v úloze se vyskytující excentricity (do spojnice středů O a O' , viz obr. 1). Při přechodu na excentricky umístěnou vrstvu je třeba použít transformace (12). Narazíme-li v některé z dalších vrstev opět na excentrickou zónu, je nutno nejprve aplikovat transformaci (13), tj. pootočít souřadnicovou soustavu a pak použít vztahu (12). Obdobně je možno postupovat v případě, kdy po obvodu proměnná okrajová podmínka je kombinovaná s excentricitou. Podle konkrétního tvaru okrajových podmínek a uspořádání vrstev může být vhodnější vzít za základ integrační konstanty nejdále od středu položené zóny a postupovat směrem dovnitř seskupení.

6. PŘÍKLADY

Uvedeme pro ilustraci několik úloh, vyskytujících se při podrobném tepelném výpočtu palivových článků jaderných reaktorů.

Zabývejme se tyčkovým palivovým článkem. Mají-li tyčky v palivovém článku malý průměr, mohou nastat vlivem vyhořívání uranu takové deformace, že se dvě tyčky dotknou. Změněné poměry práce článku vedou k nerovnoměrnému ochlazování a k vzrůstu maximálních teplot. Zvolme pro výpočet průběh součinitele přestupu tepla podle obr. 3 a předpokládejme, že zdroje tepla jsou po průřezu konstantní. Výraz pro α (v místě dotyku je $\alpha = 0$) má tvar

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \leq \varphi < \bar{\varphi}, \\ \frac{\pi}{\pi - \bar{\varphi}} - \frac{\varphi}{\pi - \bar{\varphi}} & \text{pro } \bar{\varphi} \leq \varphi \leq \pi. \end{cases}$$

Protože je úloha souměrná vzhledem k ose x , bude vzorec (4) obsahovat pouze členy s $\cos n\varphi$. Teplotní pole v palivu a povlaku je dáno výrazy

$$(16) \quad t_1 = {}_1A_0 + {}^cZ_0 + \sum_{n=1}^{\infty} {}_1A_n r^n \cos n\varphi, \quad 0 \leq r < R_1,$$

$$t_2 = {}_2A_0 + {}_2B_0 \lg r + \sum_{n=1}^{\infty} ({}_2A_n r^n + {}_2B_n r^{-n}) \cos n\varphi, \quad R_1 \leq r \leq R_2,$$

kde

$${}^cZ_0 = -\frac{r^2 q}{4\lambda_1}$$

a kde R_1 je poloměr paliva, R_2 vnější poloměr povlaku, λ_1 součinitel tepelné vodivosti paliva, λ_2 součinitel tepelné vodivosti povlakového materiálu.

Fourierova řada pro součinitel přestupu tepla je tvaru

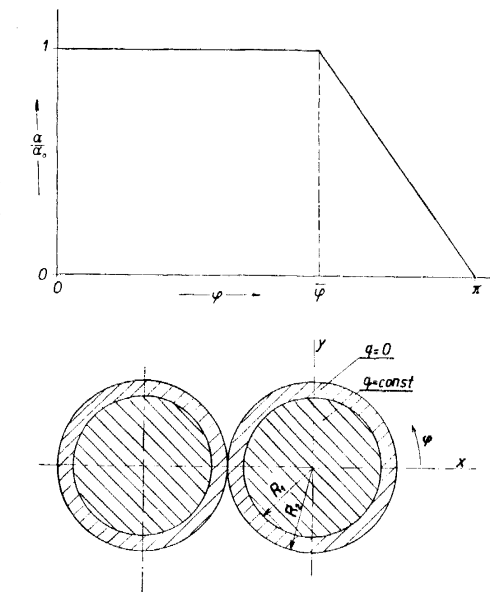
$$\alpha = \alpha_0 \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \cos n\varphi,$$

kde

$$\bar{a}_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\bar{\varphi}}{\pi} \right),$$

$$\bar{a}_n = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{\pi - \bar{\varphi}} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot [(-1)^n - \cos n\bar{\varphi}].$$

Fourierovy koeficienty funkce $a(\varphi) = \alpha(\varphi)/\lambda_2$ jsou dány vztahem



Obr. 3. Zvolený průběh součinitele přestupu tepla pro dotyk dvou palivových elementů tyčkového článku jaderného reaktoru.

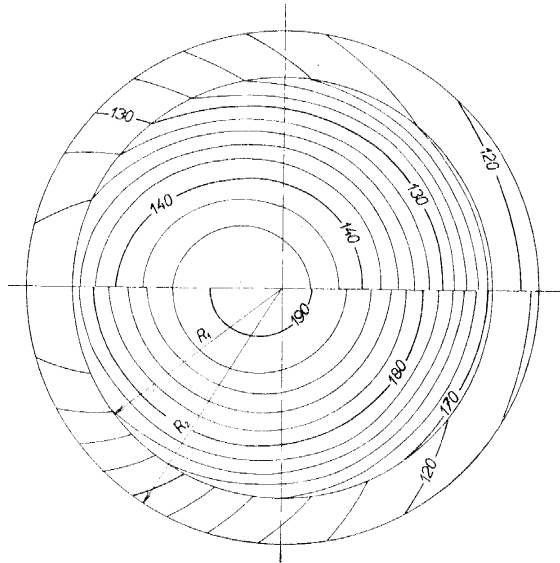
$$a_n = \bar{a}_n \frac{\alpha_0}{\lambda_2}.$$

Okrajovou podmínku na rozhraní paliva a povlaku lze napsat ve tvaru (viz (10))

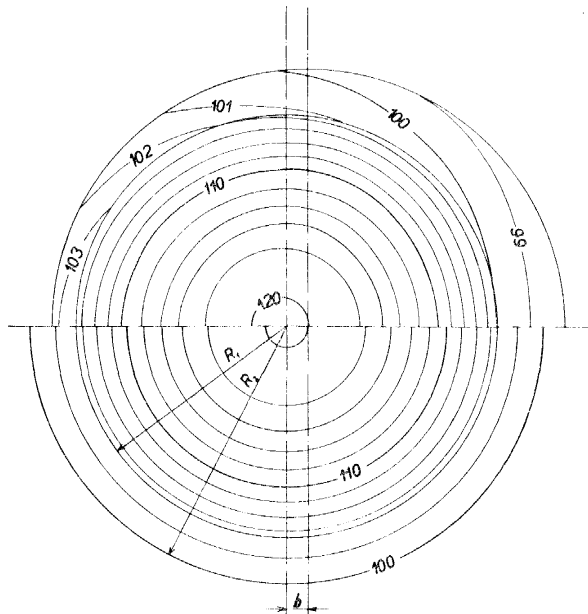
$$(17) \quad \mathbf{C}_2 = ({}_4M'_{1,2} + {}_4\Delta_{1,2}) \mathbf{C}_1 + {}_4F'_{1,2} + {}_4\delta_{1,2},$$

kde

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} {}_1A_0 \\ 0 \\ {}_1A_1 \\ 0 \\ {}_1A_2 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} {}_2A_0 \\ {}_2B_0 \\ {}_2A_1 \\ {}_2B_1 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$



Obr. 4. Teplotní pole palivového elementu článku tyčkového typu při dotyku dvou tyček. Horní část: bez uvažování kontaktního odporu. Dolní část: s respektováním po obvodu konstantního kontaktního odporu. ($x_0 = 4300 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$, $\Delta t_0 = 100^\circ\text{C}$, $R_1 = 2 \text{ mm}$, $R_2 = 2,45 \text{ mm}$, $g = 5,3 \cdot 10^8 \text{ kcal/m}^3\text{h}$, $\lambda_1 = 28,2 \text{ kcal/mh}^\circ\text{C}$, $\lambda_2 = 138 \text{ kcal/mh}^\circ\text{C}$, $q = 10^{-4} \text{ m}^2\text{h}^\circ\text{C/kcal}$.)



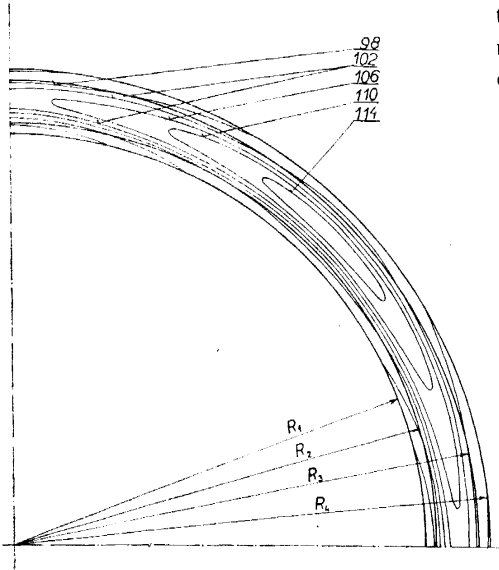
Obr. 5. Teplotní pole palivového článku při excentricitě povlaku ($e = 0,1$).

Dosadíme-li z rovnice (17) za vektor \mathbf{C}_2 do (18), dostáváme

$${}_3\mathbf{M}({}_4\mathbf{M}'_{1,2} + {}_4\mathbf{A}_{1,2}) \mathbf{C}_1 = -{}_3\mathbf{M}({}_4\mathbf{F}'_{1,2} + {}_4\delta_{1,2}).$$

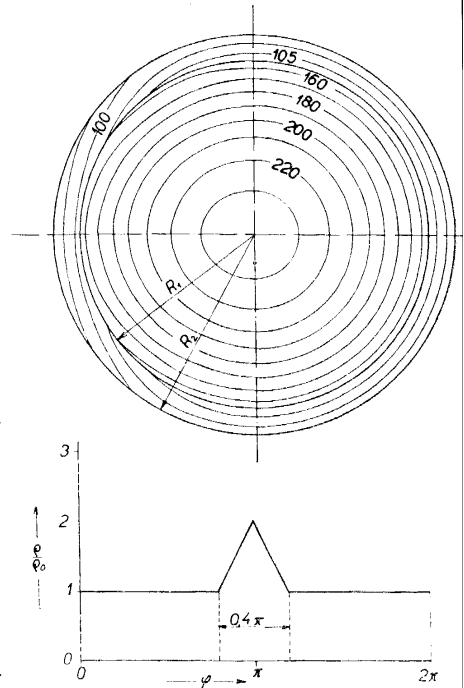
Řešením této rovnice (například postupným vylučováním neznámých) určíme složky vektoru \mathbf{C}_1 a pomocí rovnice (17) integrační konstanty \mathbf{C}_2 . Dosazením do (16) určíme teplotní pole článku.

Na horní polovině obr. 4 je vyneseno teplotní pole pro případ, kdy zanedbáme kontaktní odpor mezi palivem a povlakem. V dolní polovině je průběh teplot při respektování po obvodu konstantního kontaktního odporu (na obrázku jsou vyneseny rozdíly teplot oproti teplotě chladiva).



Obr. 6. Teplotní pole trubkového palivového článku se zdroji tepla proměnnými po poloměru i po obvodu. ($\lambda_1 = 3500 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$, $\lambda_4 = 4500 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$, $R_1 = 39 \text{ mm}$, $R_2 = 40 \text{ mm}$, $R_3 = 44 \text{ mm}$, $R_4 = 45 \text{ mm}$, $g = 8,5 \cdot 10^7(1 + 29r)(1 - 0,1 \cos \varphi) \text{ kcal/m}^3\text{h}$.)

Při řešení teplotního pole palivového článku s excentricky umístěným povlakem je třeba na styku paliva a povlaku použít rovnici (12) místo rovnice (10). Při konkrétním řešení je v tomto případě výhodnější opustit maticový zápis rovnic a nejprve vyloučit integrační konstanty paliva. Na horní polovině obr. 5 je ukázán vliv excentricity



Obr. 7. Průběh teplot ve válcovém palivovém článku pro případ po obvodu proměnného kontaktního odporu. ($\lambda = 4000 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$, $R_1 = 10 \text{ mm}$, $R_2 = 11,5 \text{ mm}$, $g = 9,2 \cdot 10^7 \text{ kcal/m}^3\text{h}$, $\lambda_1 = 28,2 \text{ kcal/mh}^\circ\text{C}$, $\lambda_2 = 138 \text{ kcal/mh}^\circ\text{C}$, $q = 10^{-4} \text{ m}^2\text{h}^\circ\text{C/kcal}$.)

($e = 0,1$) na teplotní pole článku; na dolní polovině je pro srovnání průběh teplot při centrickém uspořádání.

Třetí úloha se zabývá podrobným tepelným výpočtem článku, složeného z několika koncentrických trubek. Pro periferní trubku tohoto článku (ve čtvercové mříži reaktoru) bylo vypočteno teplotní pole pro případ, kdy tepelné zdroje jsou funkcí poloměru i azimutálního úhlu (obr. 6). Na poloměrech R_1 a R_4 jsou okrajové podmínky třetího typu (viz rovnice (9)) a na poloměrech R_2 a R_3 podmínky tvaru (10). Pro jednoduchost byl uvažován po obvodu konstantní součinitel přestupu tepla a na styku paliva a povlaku zanedbán kontaktní odpor.

Poslední příklad se týká určení průběhu teplot pro válcový palivový článek s respektováním po obvodu proměnného kontaktního odporu mezi palivem a povlakem (obr. 7). Takový případ může nastat při nedokonalém provedení povlaku. Zvolený průběh kontaktního odporu na úhlu φ je na dolní části obr. 7.

6. ZÁVĚR

Uvedená metoda umožňuje řešení teplotního pole ve válcově souměrných tělesech s libovolným průběhem tepelných zdrojů a po obvodu proměnnými okrajovými podmínkami. Úloha byla řešena rozvinutím zdrojů a okrajových podmínek do Fourierových řad. Použití maticového počtu umožnilo stručný a přehledný zápis výpočtových vztahů a poměrně jednoduché zpracování i numerické řešení okrajových úloh. Předloženou metodikou, použitou při řešení několika příkladů z jaderné techniky, je možno jistě řešit celou řadu úloh z technické praxe a výzkumu.

Autor považuje za svou povinnost poděkovat Ing. V. STACHOVI C. Sc. za cenné rady a náměty, které mu poskytl během vypracování této práce.

Literatura

- [1] Tichonov A. N., Samarskij A. A.: Rovnice matematické fyziky. Nakladatelství ČSAV, Praha 1955.
- [2] Морс. Ф. М., Феибах Г.: Методы теоретической физики. Изд. иностранной литературы Москва, 1960.

Резюме

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧЕСКИХ СРЕД С ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА ЛЮБОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ, ПЕРЕМЕННЫХ ПО ОКРУЖНОСТИ

ИОСЕФ ШМИД (Josef Schmid)

В некоторых отраслях, например, при подробном температурном расчете тепловыделяющего элемента ядерного реактора, встречаются задачи, касаю-

щиеся решения температурного поля при любом распределении источников тепла и переменных по окружности краевых условиях.

Решение уравнения Пуассона в цилиндрической геометрии

$$(1) \quad -\lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} \right) = g(r, \varphi)$$

можно написать в форме

$$(2) \quad t = A_0 + B_0 \lg r + {}^c Z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n r^n + B_n r^{-n} + {}^c Z_n) \cos n\varphi + (C_n r^n + D_n r^{-n} + {}^s Z_n) \sin n\varphi],$$

где

$${}^l Z_n = -r^n \int_{r_0}^{r'} (r')^{-(2n+1)} \int_{r_0}^{r''} {}^l \bar{g}_n(r'') (r')^{n+1} dr'' dr', \quad l = \begin{cases} c(n = 0, 1, 2, \dots) \\ s(n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

и где ${}^l \bar{g}_n(r)$ являются коэффициентами Фурье функции $g(r, \varphi)/\lambda$.

$$\frac{g(r, \varphi)}{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} ({}^c \bar{g}_n(r) \cos n\varphi + {}^s \bar{g}_n(r) \sin n\varphi).$$

По окружности переменные краевые условия были разложены в ряд Фурье, и решение краевых задач было осуществлено с помощью матричного исчисления. Наружные краевые условия (первое, второе, третье) можно написать в форме

$${}_k \mathbf{M} \mathbf{C} = {}_k \mathbf{F}, \quad (k = 1, 2, 3),$$

и условие на границе двух сред в форме

$$(3) \quad \mathbf{C}_2 = {}_4 \mathbf{M}_{1,2} \mathbf{C}_1 + {}_4 \mathbf{F}_{1,2},$$

где \mathbf{M} — матрицы, \mathbf{F} — векторы и \mathbf{C}_1 или \mathbf{C}_2 — векторы, составляющие которых являются постоянными $A_0, B_0, A_1, B_1, C_1, D_1, \dots$. Была также решена задача с эксцентрически помещенными слоями (для малой эксцентricности). Трансформация сдвига системы координат и поворот системы координат имеют аналогичную форму, как уравнение (3).

При решении температурного поля кольцевой области, состоящей из L слоев (центрически или эксцентрически расположенных) необходимо прежде всего исключить интегративные постоянные промежуточных полос с помощью соотношений

$$\mathbf{C}_l = {}_4 \mathbf{M}_{1,l} \mathbf{C}_1 + {}_4 \mathbf{F}_{1,l},$$

где

$$\begin{aligned} {}_4 \mathbf{M}_{1,l} &= {}_4 \mathbf{M}_{l-1,l} \cdot {}_4 \mathbf{M}_{l-2,l-1} \cdots {}_4 \mathbf{M}_{2,3} \cdot {}_4 \mathbf{M}_{1,2}, \\ {}_4 \mathbf{F}_{1,l} &= {}_4 \mathbf{M}_{l-1,l} \cdots {}_4 \mathbf{M}_{2,3} \cdot {}_4 \mathbf{F}_{1,2} + {}_4 \mathbf{M}_{l-1,l} \cdots {}_4 \mathbf{M}_{3,4} \cdot {}_4 \mathbf{F}_{2,3} + \cdots + {}_4 \mathbf{M}_{l-1,l} \cdot \\ &\quad \cdot {}_4 \mathbf{F}_{l-2,l-1} + {}_4 \mathbf{F}_{l-1,l}, \end{aligned}$$

и затем решить систему уравнений

$$\begin{aligned} {}^k\mathbf{M}_1\mathbf{C}_1 &= {}^k\mathbf{F}_1, \\ {}^m\mathbf{M}_L\mathbf{C}_L &= \mathbf{F}_L, \\ \mathbf{C}_L &= {}^4\mathbf{M}_{1,L}\mathbf{C}_1 + {}^4\mathbf{F}_{1,L}. \end{aligned}$$

После оформления получаем уравнение для \mathbf{C}_1

$$\mathbf{M}\mathbf{C}_1 = \mathbf{F},$$

где

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \dots & {}^k\mathbf{M}_1 & \dots \\ \dots & {}^m\mathbf{M}_L \cdot {}^4\mathbf{M}_{1,L} & \dots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \dots & {}^k\mathbf{F}_1 & \dots \\ \dots & \mathbf{F}_L - {}^m\mathbf{M}_L \cdot {}^4\mathbf{F}_{1,L} & \dots \end{bmatrix}$$

(для $k = m = 2$ решение определено до аддитивной постоянной).

Метод был применен для решения нескольких задач, появляющихся при расчете безопасности тепловыделяющего элемента против перегрева. Матричная запись формул дает возможность не только быстрого и обзорного общего расчета, но и сравнительно нетрудного численного вычисления.

Summary

THE TEMPERATURE FIELD OF A CYLINDRICALLY SYMMETRIC MEDIUM WITH ARBITRARY HEAT SOURCE DISTRIBUTION FOR VARYING BOUNDARY CONDITIONS

JOSEF SCHMID

In some technical problems we need to know the temperature field for arbitrary heat source distribution and boundary conditions varying along the perimeter. Such a case is for example the extensive thermal calculation of nuclear reactor fuel elements.

The solution of the Poisson equation in cylindrical coordinates,

$$(1) \quad -\lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} \right) = g(r, \varphi),$$

may be written in the form

$$(2) \quad t = A_0 + B_0 \lg r + {}^cZ_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n r^n + B_n r^{-n} + {}^cZ_n) \cos n\varphi + (C_n r^n + D_n r^{-n} + {}^sZ_n) \sin n\varphi]$$

with

$${}^lZ_n = -r^n \int_{r_0}^r (r')^{-(2n+1)} \int_{r'_0}^{r'} {}^l\bar{g}_n(r'') (r'')^{n+1} dr'' dr', \quad l = \begin{cases} c & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ s & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

where the ${}^l\bar{g}_n(r)$ are the Fourier coefficients of the function $g(r, \varphi)/\lambda$,

$$\frac{g(r, \varphi)}{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} ({}^c\bar{g}_n(r) \cos n\varphi + {}^s\bar{g}_n(r) \sin n\varphi).$$

The boundary conditions varying along the perimeter are expanded into a Fourier series and the solution was found using matrix methods. External boundary conditions (first, second, third) may be written in the form

$${}^k\mathbf{M}\mathbf{C} = {}^k\mathbf{F} \quad (k = 1, 2, 3)$$

and the condition on the interface in the form

$$(3) \quad \mathbf{C}_2 = {}_4\mathbf{M}_{1,2}\mathbf{C}_1 + {}_4\mathbf{F}_{1,2},$$

where the \mathbf{M} are matrices, \mathbf{F} vectors and \mathbf{C}_1 or \mathbf{C}_2 vectors whose components are constants $A_0, B_0, A_1, B_1, C_1, D_1, \dots$. The problem was solved also for the axially assymmetrical case (for a small excentricity). The transformation of the coordinate system is of a form similar to equation (3).

When solving the temperature field of the annular region consisting of L annuli (positioned centrally or excentrically) it is necessary first to eliminate the integration constants of the intermediate annuli using the relations

$$\mathbf{C}_l = {}_4\mathbf{M}_{1,l}\mathbf{C}_1 + {}_4\mathbf{F}_{1,l},$$

where

$$\begin{aligned} {}_4\mathbf{M}_{1,l} &= {}_4\mathbf{M}_{l-1,l} \cdot {}_4\mathbf{M}_{l-2,l-1} \cdots {}_4\mathbf{M}_{2,3} \cdot {}_4\mathbf{M}_{1,2}, \\ {}_4\mathbf{F}_{1,l} &= {}_4\mathbf{M}_{l-1,l} \cdots {}_4\mathbf{M}_{2,3} \cdot {}_4\mathbf{F}_{1,2} + {}_4\mathbf{M}_{l-1,l} \cdots {}_4\mathbf{M}_{3,4} \cdot {}_4\mathbf{F}_{2,3} + \cdots + \\ &\quad + {}_4\mathbf{M}_{l-1,l} \cdot {}_4\mathbf{F}_{l-2,l-1} + {}_4\mathbf{F}_{l-1,l} \end{aligned}$$

and then to solve the system of equations

$$\begin{aligned} {}^k\mathbf{M}_1\mathbf{C}_1 &= {}^k\mathbf{F}_1, \\ {}^m\mathbf{M}_L\mathbf{C}_L &= {}^m\mathbf{F}_L, \\ \mathbf{C}_L &= {}_4\mathbf{M}_{1,L}\mathbf{C}_1 + {}_4\mathbf{F}_{1,L}. \end{aligned}$$

After rearrangement we obtain the equation for \mathbf{C}_1

$$\mathbf{M}\mathbf{C}_1 = \mathbf{F},$$

where

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cdots & {}^k\mathbf{M}_1 & \cdots \\ \cdots & {}^m\mathbf{M}_L \cdot {}_4\mathbf{M}_{1,L} & \cdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \cdots & {}^k\mathbf{F}_1 & \cdots \\ \cdots & {}^m\mathbf{F}_L - {}^m\mathbf{M}_L \cdot {}_4\mathbf{F}_{1,L} & \cdots \end{bmatrix}$$

(for $k = m = 2$ the solution is determined up to an additive constant).

The method was applied to some problems in calculations of hot-channel factors. The matrix formulation makes possible not only a rapid and compact general calculation but also a numerically simple one.

Adresa autora: *Josef Schmid*, Ústav jaderného výzkumu ČSAV, Řež, p. Klecany.