Zdeněk Koutský

Theorie der Impulszähler und ihre Anwendung

Aplikace matematiky, Vol. 7 (1962), No. 2, 116–140

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102794`

THEORIE DER IMPULSZÄHLER UND IHRE ANWENDUNG

ZDENĚK KOUTSKÝ

(Eingegangen am 23. Februar 1961.)

Im folgenden Artikel wird das Modell eines Impulszählers mit k Lagen (Zuständen) dargestellt. Dieser Impulszähler ist unsymmetrisch, d. h. er kann in verschiedenen Lagen verschiedene Ruhezeiten (Kippzeiten) haben und ebenso sind in verschiedenen Lagen für den Übergang in die nächste Lage verschiedene Impulshöhen nötig. Die Quellen der Impulse werden mit Poisson'schen Prozessen beschrieben. Diese sind voneinander unabhängig und besitzen verschiedene Impulshöhen. Es werden besonders die Grenzverteilung der Impulsanzahl sowie die Folgerungen untersucht, welche die Herstellung der Zufallszahlen auf physikalischem Wege beeinflussen können.

EINLEITUNG

In der Praxis ist öfters das Problem der Feststellung der Anzahl der aus einer gewissen Impulsquelle in einem gegebenen Zeitabschnitt hervorgegangenen Impulse zu lösen. Eine beliebige Einrichtung, die diese Feststellung verwirklichen kann, wird weiters Impulszähler benannt. Diese Einrichtung kann mechanisch, elektromagnetisch, elektronisch und desgleichen sein. Sollen diese Vorrichtungen Impulse einrechnen, so müssen die Impulse folgende drei Bedingungen erfüllen und zwar muss der Impuls

a) eine gewisse minimale Impulshöhe (Amplitude),
b) eine gewisse Impulsform,
c) die aufeinanderfolgenden Impulse eine gewisse Minimal-Entfernung haben.

Die Impulsanzahl, die ein Zähler aufzählen kann, ist selbstverständlich begrenzt (z. B. k). Deshalb verbinden wir die Zähler in eine Kaskade, sodass wir die endliche Anzahl in einem Kod (in einem Zahlsystem mit Radix k) bekommen. Wenn wir nur einen Zähler benützen, bekommen wir einen modulo k Zähler.

Für verschiedene Lagen eines Zählers (d. h. nach Einrechnung verschiedener Impulsanzahl) können die unter a) – c) angeführten Forderungen zufolge technischer Mängel dieses Zählers durch verschiedene Nominalwerte erfüllt werden.

Es ist offenbar, dass diese technischen Mängel bei der Zählung der periodischen, gleichförmigen Impulse mit gleichen Impulshöhen verursachen, dass der Zähler zufolge des unverhältnismässig kleinen Impulsabstandes oder kleiner Impulshöhe zu arbeiten aufhört. (Er bleibt in einer gewissen Lage stehen.)

Dagegen, wenn es sich um Zählung der Impulse, die in zufälligen Zeitabschnitten erscheinen und zufällige Impulshöhe besitzen, handelt, hört der Zähler nicht auf zu arbeiten, sondern er zählt dann ungenau, d. h. einige Impulse, deren Impulshöhen oder deren Zeitabstand vom vorhergehenden Impuls zu klein ist, werden nicht gezählt werden.

Das ganze Problem der Zähler erklären wir einigermassen eingehend an den elektronischen Impulszählern und zwar an dem binären Zähler und an dem Ringzähler.

Das Beispiel eines binären Zählers bietet uns ein bistabiles Flip-Flop. Eine Kaskadenschaltung der bistabilen Flip-Flop zeigt uns dann die Impulsanzahl in gewissem Zeitintervall in binärem System (Kod).

Nun beschreiben wir kurz behufs besserer Begreifung der später angeführten mathematischen Formulation die technischen Eigenschaften und Arbeitsweise der beiden Grundschaltungen: der binären und der ringförmigen Schaltung.

Eingehend werden diese beiden Schaltungen in [1], [4] beschrieben.

Grundelemente der ersten Schaltung (Flip-Flop) stellen zwei elektronische Systeme dar (weiters werden diese kurz nur Systeme genannt, da jedes elektronische System durch ein anderes, das verstärken kann, ersetzt werden kann), in solcher Schaltung, in der ein System Strom führt, das andere gesperrt ist.

Dieser angenommene Zustand ist stabil. Da diese Schaltung symmetrisch ist, hat der Kreis zwei stabile Zustände, die wir mit „0“ und „1“ bezeichnen. Diese Zustände können wir mit Glimmlampen leicht signalisieren. Der Impuls mit vorgeschriebenen Eigenschaften, der gleichzeitig den beiden Gittern zugeführt wird, verursacht, dass sich die beiden Systeme ihre Rollen auswechseln, d. h. das System, das früher Strom geführt hat, ist jetzt gesperrt und umgekehrt (das Umkippen des Kreises). Diese Verhältnisse in der erwähnten Schaltung, wie schon früher angeführt, sind stabil und alle anderen Umstände haben keine Umkippungswirkung.

Aus der beschriebenen Funktion dieser Schaltung geht hervor, dass ein bistabiles Flip-Flop einen modulo $- 2 -$ Zähler darstellt.

Grundelemente des zweiten Kreises sind k Systempaare in solcher Schaltung, in der in jedem Paar nur ein System Strom führen kann. Der ganze Kreis ist in stabilem Zustand dann und nur dann, wenn aus einer Gruppe von k Systemen, deren Katoden gekoppelt sind, nur ein System Strom führt, dagegen aus der zweiten Gruppe von k Systemen, deren Katoden auch gekoppelt sind, $k - 1$ Systeme Strom führen. Ein Impuls an die Katoden der Gruppe von k Systemen, in der $k - 1$ Systeme geöffnet sind, verursacht, dass auch das k-te System Strom führen wird und weiters, dass sich die beiden Systeme dieses Paares ihre Rolle auswechseln. Der Impuls, der infolge dieses Austausches an der Anode entstanden ist, wird dem Gitter des geöffneten

Systems des nächsten Systempaares angeführt. Da der ganze Kreis in einem nichtstabilen Zustand ist (in einer Gruppe von k Systemen sind alle Systeme geöffnet), verursacht dieser Impuls den Funktionaustausch der beiden Systeme dieses nächsten Systempaares. Der infolge dieses zweiten Funktionaustausches entstehende Impuls verursacht weiters keine Änderungen mehr, da der ganze Kreis schon in stabilem Zustand ist.

Wir sagen, dass der Zähler einen Impuls gezählt hat und an die nächste Lage hinübergegangen ist bzw. nachdem er in der Lage „k — 1" gewesen war, wieder in die Lage „0" zurückgekehrt ist.

Eine weitere Änderung kann wieder nur ein Impuls an die Katode verursachen.

Insofern wir uns nur auf einen Kreis beschränken, bekommen wir einen modulo — k-Zähler.

Für zuverlässige Arbeit dieser Zähler müssen drei früher angegebene Bedingungen erfüllt werden. Die Nominalwerte hängen dann von weiteren mehreren Faktoren ab, wie z. B. von der Grundauffassung der Schaltung, von der Wahl der Elektronenröhre oder eines anderen verstärkungfähigen Elementes, von den Parasitkapazitäten usw.

Aus [1] können wir eine vollkommene Symetrie angeführter Schaltungen ersehen. Selbstverständlich bei der technischen Ausführung ist es unmöglich diese Symetrie (auch bei einer sorgsamen Auswahl der Bauteile) einzuhalten. Infolge dadurch entstehender Asymetrie entstehen während des Betriebes des Zählers einige Fehler, die wir in zwei Gruppen zusammenfassen können.

1) In verschiedenen Lagen des Kreises sind für den Übergang in die nächste Lage verschiedene Impulshöhen nötig. (Der Kreis hat in verschiedenen Lagen verschiedene Empfindlichkeit mit Bezug auf die Impulshöhe.)

2) In verschiedenen Lagen hat der Kreis verschiedene Kippzeiten (Ruhezeit). (Der Kreis hat in verschiedenen Lagen verschiedene Unterscheidungsfähigkeit der aufeinanderfolgenden Impulse.)

Als Ruhezeit eines Kreises benennen wir die Zeit, während welcher der Kreis auf den zugeführten Impuls durch Übergang in die nächste Lage nicht mehr reagiert.

Die Theorie der bistabilen Multivibratore, die bei den Impulszählern angewendet werden, ist kompliziert und ihre Probleme sind zur Zeit noch nicht vollkommen gelöst (besonders im Falle des nichtperiodischen Impulseinganges). Das folgende mathematische Modell, obwohl es viele komplizierte Probleme vereinfacht, führt zu einem neuen noch nicht beschriebenen Modell der Impulszähler. Es zeigt noch weiters, dass wir mit diesem Modell auf rein mathematischem Wege einige Unklarheiten, welche bei der Produktion der Zufallzahlen (auf physikalischem Wege) entstehen, erklären können.

Diese Arbeit zielt auf den Aufbau eines mathematischen Modells des Impulszählers dahin (§§ 1, 2); mit Hilfe dieses Modells soll in §§ 3—7 der Einfluss der technischen Gebrechen der Zähler auf die gleichmässige Verteilung der Zufallszahlen entdeckt werden. Als Produktionmethode der Zufallszahlen wird die Addierung der Zufallsimpulse modulo k in einem gegebenen Zeitintervall benützt (z. B. der Fall der Abzählung von Teilchen eines radioaktiven Zerfalles oder eines vereinfachten Modells der Geräuschdurchgänge durch bestimmtes Potentialniveau). Im § 9 wird ein allgemeines Modell der Impulszählung erläutert.

§ 1. MATHEMATISCHES MODELL DER IMPULSZÄHLER

Da bereits die weiteren Zähler der Kaskadeschaltung annähernd höchstens nur auf der Hälfte der Frequenz des ersten Zählers arbeiten brauchen, werden wir stets nur die Fehler des ersten Zählers der Kaskadeschaltung abschätzen. Deshalb werden wir ferner voraussetzen, dass die Kaskade nur einen Zähler besitzt. Es handelt sich daher um Zählung mod k (resp. mod 2).

Definition. Der Zähler ist im Zeitaugenblick t im Zustand „i" ($i = 0, 1, \ldots, k - 1$) als er im Zeitintervall $\langle 0, t\rangle$ $n \equiv i \pmod k$ Impulse gezählt hat.

Weiters werden wir für den Zähler folgende Anfangsbedingungen voraussetzen.

a) Der Zähler ist im Zustand „0".

b) Der Zähler besitzt keine Ruhezeit.

Diese beiden Voraussetzungen sind vom technischen Standpunkt immer erfüllbar, denn zwischen zwei Zeitintervallen, in denen die Impulse gezählt werden, der Zähler annuliert ist und das Zeitintervall zwischen dieser Annulierung und dem Beginn folgender Zählung immer genug lang gemacht werden kann.

Dem Eingang des Zählers werden die Impulse aus m Impulsquellen zugeführt. Wir werden voraussetzen:

V 1.1. Jede von den m Impulsquellen sendet Impulse derselben Impulshöhe, dagegen sind die Impulshöhen zwei verschiedener Impulsquellen von einander verschieden.

V 1.2. Stochastische Unabhängigkeit der Impulsquellen.

V 1.3. Die Tätigkeit der l-ten Impulsquelle können wir mittels Poissonprozess der Intensität λ_l beschreiben.

V 1.4. Nach einem einrechenbaren Impulse entsteht eine gewisse Ruhezeit, die wir primäre Ruhezeit nennen werden. Ihre Länge ist eine Zufallsgrösse, deren Verteilungsfunktion $H_i'(t)$ vom Zustand i abhängig ist.

Definition. *Einen Zähler, dessen Ruhezeit sich nicht durch den Eintritt eines angezählten Impulses, der nicht gezählt wird, verlängert, da dieser Impuls während der Ruhezeit nach einem vergangenen angezählten Impulse gekommen ist, werden wir als den Zähler des ersten Typus bezeichnen.*

Den Zähler, dessen Ruhezeit sich durch den Eintritt eines angezählten Impulses, der nicht gezählt wird, verlängert, wenn auch der Impuls während der Ruhezeit nach einem vergangenen angezählten Impulse gekommen ist, werden wir als den Zähler des zweiten Typus bezeichnen.

Bei den Zählern des ersten Typus ist

$$H'_i(t) = H_i(t)\,,$$

wo $H_i(t)$ reelle Ruhezeit (weiters nur Ruhezeit) ist, dagegen gilt bei den Zählern zweites Typus

$$H'_i(t) \neq H_i(t)\,.$$

V 1.5. Die Längen der Ruhezeiten sind in allen Zuständen stochastisch unabhängig.

V 1.6. Die Länge der Ruhezeit ist von keinem von den Poissonprozessen, mittels denen die Impulsquellen beschrieben werden, stochastisch abhängig.

§ 2. DIE VERTEILUNGSFUNKTION DER IMPULSANZAHL

Aus der Voraussetzung V 1.3 bekommen wir die Wahrscheinlichkeit, dass die Impulsquelle l im Zeitintervall $\langle 0, t\rangle$ keinen Impuls sendet

$$e^{-\lambda_l t}\,, \tag{2.1}$$

wobei λ_l die Intensität des entsprechenden Poisson'schen Prozesses (kurz die Intensität der l-ten Impulsquelle) ist.

Bezeichnen wir

$$\mu_i = \sum_j \lambda_{lj}\,, \tag{2.2}$$

wobei wir mit $\lambda_{l_1}, \lambda_{l_2}, \ldots$ die Intensität der Impulsquellen bezeichnen, deren Impulshöhe grösser als die im gegebenen Zustande notwendige Impulshöhe ist.

Aus den Voraussetzungen V 1.2 und V 1.3 und aus dem Additionsatz der Poissonverteilungsfunktion stellt man unmittelbar fest, dass der Zähler nach der Ruhezeit im Zustande i längstens die Zeit t mit der Wahrscheinlichkeit

$$C_i(t) = 1 - e^{-\mu_i t} \tag{2.3}$$

verbleibt.

Wir definieren die Zufallsgrösse $\gamma_{i,n}(\omega)$, wo wir mit ω ein elementares Zufallsereignis bezeichnen, als eine Zeit, während der ein Zähler im Zustande i bleibt, wenn er in diesem Zustande bereits zum n-mal ist. Alle diese Zufallsgrössen sind nach unseren Voraussetzungen unabhängig und besitzen (mit Ausnahme $\gamma_{0,1}(\omega)$) dieselbe Verteilungsfunktion, die wir als $F_i(t)$ bezeichnen.

Diese Verteilungsfunktion ist abhängig wie von der Ruhezeit im gegebenen Zustande i, als auch von der Zeit, bis zu der aus denjenigen Impulsquellen ein Impuls ausgesandt wird, der einen Übergang zum folgenden Zustand verursachen kann und ist also (mit Rücksicht auf die Unabhängigkeit dieser Längen) gleich

$$P\{\omega : \gamma_{i,n}(\omega) \leqq t\} = F_i(t) = C_i(t) * H_i(t)\,. \tag{2.4}$$

Mit dem Symbol $*$ werden wir die Konvolution, d. h. ein Integral des Typus

$$C_i(t) * H_i(t) = \int_0^t C_i(t - x)\,\mathrm{d}H_i(x) = \int_0^t H_i(t - x)\,\mathrm{d}C_i(x) \tag{2.5}$$

bezeichnen.

Weiters (unmittelbar aus unseren Voraussetzungen) bekommen wir die Verteilungsfunktionen $\gamma_{0,1}$ und $\gamma_{0,n}$ für $n = 2, 3, \ldots$ in der Form

$$P\{\omega : \gamma_{0,1}(\omega)\} \leqq t = C_0(t) = 1 - e^{-\mu_0 t} \tag{2.6}$$

und

$$P\{\omega : \gamma_{0,n}(\omega) \leqq t\} = F_0(t) = C_0(t) * H_0(t)\,. \tag{2.7}$$

Weiters bestimmen wir die Verteilungsfunktion der Zufallsgrösse $\gamma_n^{(i)} = \sum_{j=1}^{i} \gamma_{j,n}(\omega)$, d. h. die Verteilungsfunktion der Zeit zwischen dem Übergange aus dem Zustande „1“ in den Zustand „2“ (weiters werden wir diesen Übergang kurz $1 \to 2$ bezeichnen) und dem Übergange $i \to i + 1$ für alle $n = 1, 2, \ldots$

$$G_i(t) = F_1(t) * F_2(t) * \ldots * F_i(t)\,. \tag{2.8}$$

Zum Schluss stellen wir fest, dass die Verteilungsfunktion der Zeit zwischen zwei folgenden Übergängen $1 \to 2$, d. h. die Verteilungsfunktion der Zufallsgrösse

$$\gamma^{(n)} = \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_{i,n} + \gamma_{0,n+1} \quad \text{für alle} \quad n = 1, 2, \ldots$$

die Form

$$G(t) = F_1(t) * F_2(t) * \ldots * F_{k-1}(t) * F_0(t) \tag{2.9}$$

hat.

Die n-malige Konvolution der Verteilungsfunktion $G(t)$ bezeichnen wir als $G^{(n)}(t)$, d. h.

$$G^{(n)}(t) = \underbrace{G(t) * G(t) * \ldots * G(t)}_{n}\,. \tag{2.10}$$

Weiters führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\Psi_j(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}F_j(t)\,, \tag{2.11}$$

$$\Phi_j(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}G_j(t)\,, \quad \Phi_0(s) = 1\,,$$

$$\Phi(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}G(t)\,.$$

Sei $C_0(t)$ die mit (2.6) definierte Verteilungsfunktion und μ_0 die Intensität derjenigen Impulsquellen, die den Übergang $0 \to 1$ verursachen können, dann gilt

$$\int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}C_0(t) = \frac{\mu_0}{s + \mu_0}\,. \tag{2.12}$$

Zum Schluss bezeichnen wir mit $P\{t, n\}$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Impulsanzahl im Zeitintervall $\langle 0, t\rangle$ höchstens n sein wird. Dann gilt folgender Satz.

Satz 2.1. *Die Laplace'sche Bildfunktion der Funktion $P\{t, pk + j\}$ ist durch die Formel*

$$\mathfrak{L}[P\{t, pk + j\}] = \int_0^\infty e^{-st} P\{t, pk + j\} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{s}\left\{1 - \frac{\mu_0}{s + \mu_0} [\Phi(s)]^p \, \Phi_j(s)\right\} \tag{2.13}$$

angegeben.

Beweis: Die Wahrscheinlichkeit $P\{t, n\}$ ist äquivalent mit der Wahrscheinlichkeit, dass der $n + 1$-ste Impuls erst nach dem Zeitaugenblick t gezählt wird. Dann ist (wenn wir mit $t_{n+1}(\omega)$ den Zeitaugenblick der Zählung des $n + 1$-sten Impulses bezeichnen)

$$P\{t, n\} = P\{t < t_{n+1}(\omega)\} = 1 - P\{t_{n+1}(\omega) \leqq t\} .$$

Sei $n = pk + j$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit $P\{t, n\} = P\{t, pk + j\}$ auch äquivalent der Wahrscheinlichkeit, dass der Zähler nicht im Zeitintervall $\langle 0, t\rangle$ $(p + 1)$ mal den $j + 1$-sten Zustand erlangen wird. Also mit Rücksicht auf die Voraussetzungen V 1.4–1.7 bekommen wir die Formel

$$P\{t, pk + j\} = 1 - C_0(t) * G^{(p)}(t) * G_j(t) . \tag{2.14}$$

Dann ist (z. B. nach [2], [3]) und (2.11)

$$\int_0^\infty e^{-st} P\{t, pk + j\} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{s}\left\{1 - \frac{\mu_0}{s + \mu_0} [\Phi(s)]^p \, \Phi_j(s)\right\} ,$$

w. z. b. w.

Wenn wir auf die Eigenschaften der Funktionen $P\{t, pk + j\}$, die aus der Wahrscheinlichkeitsbedeutung hervorgehen, Rücksicht nehmen, sehen wir, dass diese Funktionen durch ihre $\mathfrak{L}$ – Transformationen eindeutig bestimmt sind.

Bemerkung. Die Beziehung (2.13) ist eine allgemeine Form der Beziehung (3) im Artikel [6].

Wenn wir das erste Moment der Verteilungsfunktion $P\{t, pk + j\}$ durch

$$m(t) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k=1} [1 - P\{t, pk + j\}]$$

bezeichnen, bekommen wir seine $\mathfrak{L}$-Bildfunktion in der Form

$$\int_0^\infty e^{-st} \,\mathrm{d}m(t) = \frac{\mu_0}{s + \mu_0} \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \Phi_i(s)}{1 - \Phi(s)} . \tag{2.15}$$

Die Ausdrücke für höhere Momente sind verhältnismässig kompliziert.

Sei $P'\{t, pk + j\}$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Zähler im Zeitintervall $\langle 0, t\rangle$ gerade $pk + j$ Impulse $(p = 0, 1, 2, \ldots; \ j = 0, 1, 2, \ldots, k - 1)$ anrechnen wird. Dann beweisen wir leicht folgendes Lemma 2.1.

Lemma 2.1. *Die $\mathfrak{L}$-Bildfunktionen der Funktionen $P'\{t, 0\}$, $P'\{t, pk\}$, $P'\{t, pk + 1\}$ und $P'\{t, pk + j\}$ für $p = 0, 1, 2, \ldots; j = 2, 3, \ldots, k - 1$ sind mit folgenden Formeln bestimmt*

$$\text{(2.16)} \qquad \mathfrak{L}[P'\{t, 0\}] = \frac{1}{s + \mu_0},$$

$$\mathfrak{L}[P'\{t, pk\}] = \frac{1}{s} \frac{\mu_0}{s + \mu_0} [\Phi(s)^{p-1} [\Phi_{k-1}(s) - \Phi(s)],$$

$$\mathfrak{L}[P'\{t, pk + 1\}] = \frac{1}{s} \frac{\mu_0}{s + \mu_0} [\Phi(s)]^p [1 - \Phi_1(s)],$$

$$\mathfrak{L}[P'\{t, pk + j\}] = \frac{1}{s} \frac{\mu_0}{s + \mu_0} [\Phi(s)]^p [\Phi_{j-1}(s) - \Phi_j(s)].$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Beziehung

$$P'\{t, pk + j\} = P\{t, pk + j\} - P\{t, pk + j - 1\}$$

und eines einfachen Additionsgesetzes der Laplace-Transformation.

Sei weiter

$$P_k\{t, j\} = \sum_{p=0}^{\infty} P'\{t, pk + j\}.$$

$P_k\{t, j\}$ ist offensichtlich die Wahrscheinlichkeit, dass der Zähler im Zeitintervall $\langle 0, t\rangle$ gerade $j \pmod k$ Impulse anrechnen wird ($j = 0, 1, 2, \ldots, k - 1$). Dann folgt unmittelbar aus den Grundsätzen der $\mathfrak{L}$-Transformation dieser Satz.

Satz 2.2. *Die $\mathfrak{L}$-Bildfunktionen der Funktionen $P_k\{t, 0\}$, $P_k\{t, 1\}$ und $P_k\{t, j\}$ ($j = 2, 3, \ldots, k - 1$) werden nachfolgend angegeben*

$$\text{(2.17)} \qquad \mathfrak{L}[P_k\{t, 0\}] = \frac{1}{s} + \frac{1}{s} \frac{\mu_0}{s + \mu_0} \left[\frac{\Phi_{k-1}(s) - \Phi(s)}{1 - \Phi(s)} - 1\right],$$

$$\mathfrak{L}[P_k\{t, 1\}] = \frac{1}{s} + \frac{\mu_0}{s + \mu_0} \frac{1 - \Phi_1(s)}{1 - \Phi(s)},$$

$$\mathfrak{L}[P_k\{t, j\}] = \frac{1}{s} + \frac{\mu_0}{s + \mu_0} \frac{\Phi_{j-1}(s) - \Phi_j(s)}{1 - \Phi(s)} \quad (j = 2, 3, \ldots, k - 1).$$

Dieser Satz dient als Grundsatz für die Anwendung dieser Theorie an das Problem der Zufallszahlen, die auf physikalischem Wege produziert werden.

Deshalb werden wir uns in den nächsten Paragraphen 3–8 mit der Analyse der Beziehungen (2.17) befassen.

§ 3. FUNKTIONWERTE $P_k\{t, j\}$ FÜR ENDLICHE t

Wir haben bisher keine einschränkenden Voraussetzungen für die Verteilungsfunktion der primären Ruhezeit des Zählers eingeführt.. Um einige ganz konkrete Resultate zu erreichen, führen wir eine weitere Voraussetzung ein.

V 3.1. Die Verteilungsfunktionen der primären Ruhezeit des Zählers $H_i(t)$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$ haben im Punkte β_i eine Sprungsstelle (mit einer Sprunghöhe gleich 1), d. h. die primäre Ruhezeit ist eine Konstante.

Obwohl die Voraussetzung V 3.1 einschränkend ist, (wir wählen nämlich aus einer grossen Menge von Verteilungfunktionen nur eine spezielle) widerspricht doch diese Voraussetzung den bestehenden Ansichten auf die Arbeit dieser Zähler nicht.

Also mit Rücksicht auf diese neue Voraussetzung werden wir uns jetzt mit den beiden Typen der Zähler befassen.

Der Zähler des Typus I.

Aus den Beziehungen (2.4) und (2.7) bekommen wir jetzt

$$F_i(t) = \int_0^t C_i(t-x)\,\mathrm{d}H_i(x) = \int_0^t [1 - e^{-\mu_i(t-x)}]\,\mathrm{d}H_i(x)$$

und weiters

$$F_i(t) = \begin{cases} 0\,, & 0 \leqq t \leqq \beta_i\,, \\ 1 - e^{-\mu_i(t-\beta_i)}\,, & \beta_i \leqq t\,. \end{cases} \tag{3.1}$$

Jetzt können wir auch die Ausdrücke für die Funktionen $\Psi_i(s)$, $\Phi_j(s)$ und $\Phi(s)$, die in (2.11) definiert sind, bekommen. Ist

$$\Psi_i(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}F_i(t) = \int_{\beta_i}^\infty e^{-st}\mu_i e^{\mu_i(t-\beta_i)}\,\mathrm{d}t = \frac{\mu_i e^{-s\beta_i}}{s+\mu_i} \tag{3.2}$$

und weiters

$$\Phi_j(s) = \prod_{i=1}^{j} \Psi_i(s) = \frac{\mu^{(j)} e^{-s\beta^{(j)}}}{\prod_{i=1}^{j}(s+\mu_i)}\,, \tag{3.3}$$

$$\Phi(s) = \prod_{i=0}^{k-1} \Psi_i(s) = \frac{\mu e^{-s\beta}}{\prod_{i=0}^{k-1}(s+\mu_i)}\,, \tag{3.4}$$

wobei

$$\mu^{(j)} = \prod_{i=1}^{j}\mu_i\,, \quad \mu = \prod_{i=0}^{k-1}\mu_i\,, \tag{3.5}$$
$$\beta^{(j)} = \sum_{i=1}^{j}\beta_i\,, \quad \beta = \sum_{i=0}^{k-1}\beta_i$$

ist.

Die eben erhaltenen Resultate (3.2)–(3.4) setzen wir in (2.17) ein. Dann bekommen wir folgenden Satz.

Satz 3.1. *Wenn die Voraussetzungen V 1.1–1.6 und V 3.1 erfüllt werden, dann sind die Funktionen $P_k\{t, j\}$ für $j = 0, 1, \ldots, k-1$ eindeutig mit ihren $\mathfrak{L}$-Bildfunktionen*

(3.6)
$$\mathfrak{L}[P_k\{t, 0\}] = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}\frac{\mu_0}{s+\mu_0}\left[\frac{\mu^{(k-1)}e^{-s\beta^{(k-1)}}}{\prod\limits_{i=1}^{k-1}(s+\mu_i)} - \frac{1-\dfrac{\mu_0 e^{-s\beta_0}}{s+\mu_0}}{1-\dfrac{\mu e^{-s\beta}}{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(s+\mu_i)}} - 1\right],$$

$$\mathfrak{L}[P_k\{t, 1\}] = \frac{1}{s}\frac{\mu_0}{s+\mu_0}\,\frac{1-\dfrac{\mu_1 e^{-s\beta_1}}{s+\mu_1}}{1-\dfrac{\mu e^{-s\beta}}{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(s+\mu_i)}},$$

$$\mathfrak{L}[P_k\{t, j\}] = \frac{1}{s}\frac{\mu_0}{s+\mu_0}\,\frac{\mu^{(j-1)}e^{-s\beta^{(j-1)}}}{\prod\limits_{i=1}^{j-1}(s+\mu_i)}\,\frac{1-\dfrac{\mu_j e^{-s\beta_j}}{s+\mu_j}}{1-\dfrac{\mu e^{-s\beta}}{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(s+\mu_i)}}$$

bestimmt.

Beweis: Wenn alle Voraussetzungen erfüllt sind, bekommen wir die Beziehungen (3.6) durch den Fortgang, der vor dem Satze 3.1 beschrieben wurde.

Die Eindeutigkeit der Funktion geht aus der Theorie der Laplace-Transformation und dem Charakter der Originalfunktionen hervor.

Der Zähler des Typus II.

Für die in (2.11) definierten Bildfunktionen bekommen wir folgende Ausdrücke (dabei ist (3.8) aus [6] übernommen):

(3.8)
$$\Psi_i(s) = \frac{\mu_i e^{-\beta_i(\mu_i+s)}}{s+\mu_i e^{-\beta_i(\mu_i+s)}},$$

(3.9)
$$\Phi_j(s) = \frac{\mu^{(j)} e^{-(\beta^{(j)}s + \sum_{i=1}^{j}\beta_i\mu_i)}}{\prod\limits_{i=1}^{j}(s+\mu_i e^{-\beta_i(\mu_i+s)})},$$

(3.10)
$$\Phi(s) = \frac{\mu e^{-(s\beta + \sum_{i=0}^{k-1}\beta_i\mu_i)}}{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(s+\mu_i e^{-\beta_i(\mu_i+s)})},$$

wo μ, $\mu^{(j)}$, β und $\beta^{(j)}$ wieder mit (3.5) definiert sind.

Durch Einsetzen der Beziehungen (3.8)–(3.10) in (2.17) bekommen wir folgenden Satz 3.2 für den Zähler des zweiten Typus.

Satz 3.2. *Wenn die Voraussetzungen V 1.1 – V 1.6 und V 3.1 erfüllt sind, dann sind die Funktionen $P_k\{t, j\}$ für $j = 0, 1, \ldots, k-1$ mit ihren $\mathfrak{L}$-Bildfunktionen*

(3.11)
$$\mathfrak{L}[P_k\{t, 0\}] = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}\frac{\mu_0}{s+\mu_0}\left[\frac{\dfrac{\mu^{(k-1)}e^{-(\beta^{(k-1)}s+\sum_{i=1}^{k-1}\beta_i\mu_i)}}{\prod_{i=1}^{k-1}\left(s+\mu_i e^{-\beta_i(\mu_i+s)}\right)} - \dfrac{\mu e^{-(s\beta+\sum_{i=0}^{k-1}\beta_i\mu_i)}}{\prod_{i=0}^{k-1}\left(s+\mu_i e^{-\beta_i(\mu_i+s)}\right)}}{1-\dfrac{\mu\, e^{-(s\beta+\sum_{i=0}^{k-1}\beta_i\mu_i)}}{\prod_{i=0}^{k-1}\left(s+\mu_i e^{-\beta_i(\mu_i+s)}\right)}} - 1\right],$$

$$\mathfrak{L}[P_k\{t, 1\}] = \frac{1}{s}\frac{\mu_0}{s+\mu_0}\,\frac{1-\dfrac{\mu_1 e^{-\beta_1(\mu_1+s)}}{s+\mu_1 e^{-\beta_1(\mu_1+s)}}}{1-\dfrac{\mu e^{-(s\beta+\sum_{i=0}^{k-1}\beta_i\mu_i)}}{\prod_{i=0}^{k-1}\left(s+\mu_i e^{-\beta_i(\mu_i+s)}\right)}},$$

$$\mathfrak{L}[P_k\{t, j\}] = \frac{1}{s}\frac{\mu_0}{s+\mu_0}\,\frac{\mu^{(j-1)}e^{-(\beta^{(j-1)}s+\sum_{i=1}^{j-1}\beta_i\mu_i)}}{\prod_{i=1}^{j-1}\left(s+\mu_i e^{-\beta_i(\mu_i+s)}\right)}\cdot\frac{1-\dfrac{\mu_j e^{-\beta_j(\mu_j+s)}}{s+\mu_j e^{-\beta_j(\mu_j+s)}}}{1-\dfrac{\mu e^{-(s\beta+\sum_{i=0}^{k-1}\mu_i\beta_i)}}{\prod_{i=0}^{k-1}\left(s+\mu_i e^{-\beta_i(\mu_i+s)}\right)}}$$

eindeutig angegeben.

Diesen Satz beweisen wir ganz ähnlich wie den Satz 3.1.

In allgemeinem Falle ist die genaue Ausrechnung der Wahrscheinlichkeiten $P_k\{t, j\}$ für endliche t kompliziert, doch kann diese mittels einer universalen Rechenmaschine durchgeführt werden.

In speziellen Fällen können wir die Originalfunktion ohne Schwierigkeiten feststellen. Wenn wir einen zweistufigen Zähler (d. h. der Zähler hat nur zwei Zustände) ohne Ruhezeiten erwägen, dann bekommen wir aus Satz 3.1 nachstehende Folgerung.

Folgerung. *Wenn im Satz 3.1 $k = 2$, $\beta_0 = \beta_1 = 0$ gilt, dann bekommen wir aus* (3.6)

(3.12)
$$P_2\{t, 1\} = \frac{\mu_0}{\mu_0+\mu_1}\left(1 - e^{-(\mu_0+\mu_1)t}\right).$$

Beweis: Aus (3.6) bekommen wir

$$\mathfrak{L}[P_2\{t, 1\}] = \frac{1}{s} \frac{\mu_0}{s + \mu_0 + \mu_1}$$

und mit Hilfe [2] die obenangeführte Folgerung.

§ 4. GRENZWERT DER FUNKTIONEN $P_k\{t,j\}$ FÜR $t \to \infty$

Aus § 3 haben wir ersehen, dass die Ausrechnung der Funktionen $P_k\{t, j\}$ für endliche t kompliziert ist. Deshalb bestimmen wir wenigstens die Grenzwerte dieser Funktionen für $t \to \infty$.

Satz 4.1. *Wenn die Voraussetzungen des Satzes 3.1 erfüllt sind, dann gilt für die Zähler des ersten Typus*

$$\lim_{t \to \infty} P_k\{t, j\} = \frac{(1 + \mu_j\beta_j) S'_j}{\beta\mu + \sum_{i=0}^{k-1} S'_i}, \tag{4.1}$$

wobei

$$S'_i = \mu_0\mu_1 \ldots \mu_{i-1}\mu_{i+1} \ldots \mu_{k-1} = \frac{\mu}{\mu_i} \tag{4.2}$$

ist.

Beweis: Zuerst beweisen wir den Satz für den Fall $j = 1$.

Wir bezeichnen

$$F_1(s) = \frac{1 - \dfrac{\mu_1 e^{-s\beta_1}}{s + \mu_1}}{1 - \dfrac{\mu e^{-s\beta}}{\prod_{i=0}^{k-1}(s + \mu_i)}}. \tag{4.3}$$

Wir beweisen, dass

$$\lim_{s \to 0} F_1(s) = F_1 = \frac{(1 + \mu_1\beta_1) S'_1}{\beta\mu + \sum_{i=0}^{k-1} S'_i} \tag{4.4}$$

gilt. Ist zuerst

$$\lim_{s \to 0} F_1(s) = \lim_{s \to 0} \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(s + \mu_i)(\mu_1 + s - \mu_1 e^{-s\beta_1})}{(s + \mu_1)\left[\prod_{i=0}^{k-1}(s + \mu_i) - \mu e^{-s\beta}\right]}. \tag{4.5}$$

Wir entwickeln $e^{-s\beta_1}$ und $e^{-s\beta}$ in eine Reihe- in zwei erste Glieder und in den Rest $\mathscr{X}(s^n)$. (Dabei zeigt $\mathscr{X}(s^n)$, dass die niedrigste Potenz in der Reihe (bzw. Polynom) s^n

ist und einen vom Null verschiedenen Koeffizient hat). Dann führen wir das Produkt $\prod_{i=0}^{k-1}(s + \mu_i)$ bis in den ersten Grad nach s durch.

Dann bekommen wir (mit Rücksicht auf (4.2))

$$F_1(s) = \frac{[\mu + s\sum_{i=0}^{k-1} S'_i + \mathscr{X}(s^2)]\,[1 + \mu_1\beta_1 - \mathscr{X}(s)]}{(\mu_1 + s)\,[\mu\beta + \sum_{i=0}^{k-1} S'_i + \mathscr{X}(s)]}\,.$$

Daraus folgt bereits unmittelbar (4.4).

Mit Rücksicht auf (4.3) schreiben wir weiter

$$\mathfrak{L}[P_k(\{t, 1\}] = \frac{1}{s}\frac{\mu_0}{s + \mu_0}\,F_1(s)\,.$$

Offensichtlich gilt golgende Identität

$$\frac{1}{s}\frac{\mu_0}{s + \mu_0}\,F_1(s) = \frac{1}{s}\frac{\mu_0}{s + \mu_0}\,[F_1(s) - F_1] + \frac{1}{s}\frac{\mu_0}{s + \mu_0}\,F_1\,. \tag{4.6}$$

Wir beweisen, dass

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{\mu_0}{s + \mu_0}\,[F_1(s) - F_1]\right\} \sim o(1) \tag{4.7}$$

gilt. Dazu ist hinreichend zu beweisen, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity}\,\frac{1}{iy}\,\frac{\mu_0}{iy + \mu_0}\,[F_1(iy) - F_1]\,\mathrm{d}y \tag{4.8}$$

für $t \geqq T$ gleichmässig konvergent ist. Das ist insbesondere der Fall, wenn

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{iy}\,\frac{\mu_0}{iy + \mu_0}\,[F_1(iy) - F_1]\right|\mathrm{d}y$$

konvergiert (siehe [3], Seite 486).

Zuerst stellen wir fest, dass der Integrand an der imaginären Achse für endliche t (insbesondere im Nullpunkt) begrenzt ist. Dazu genügt es, wenn das absolute Mitglied des Zählers des folgenden Ausdruckes

$$\frac{F_1(s) - F_1}{s} = \frac{1}{s}\left\{\frac{[\mu + s\sum_{i=0}^{k-1} S'_i + \mathscr{X}(s^2)]\,[1 + \mu_1\beta_1 - \mathscr{X}(s)]}{(\mu_1 + s)\,[\mu\beta + \sum_{i=0}^{k-1} S'_i + \mathscr{X}(s)]} - \frac{(1 + \mu_1\beta_1)\,S'_1}{\mu\beta + \sum_{i=0}^{k-1} S'_i}\right\}$$

gleich Null ist. Dieses Mitglied ist aber gleich

$$\mu(1 + \mu_1\beta_1)\,(\mu\beta + \sum_{i=0}^{k-1} S'_i) - \mu_1 S'_1(1 + \mu_1\beta_1)\,(\mu\beta + \sum_{i=0}^{k-1} S'_i)\,,$$

also ist es (weil nach (4.2) $\mu = \mu_1 S'_1$ gilt,) wirklich gleich Null.

Weiter stellen wir unmittelbar fest, dass

$$\lim_{y \to \pm\infty} F_1(iy) = 1$$

gilt, sodass der absolute Wert des Integranden in (4.8) für $y \to \pm\infty$ unterschiedslos mit $o(y^{-2})$ ist.

Dadurch haben wir die absolute (und auch gleichmässige) Konvergenz völlig bewiesen. Also können wir

$$P_k\{t, 1\} \sim o(1) + F_1(1 - e^{-\mu_0 t}) \tag{4.9}$$

schreiben. Daraus geht schon unmittelbar

$$\lim_{t \to \infty} P_k\{t, 1\} = F_1$$

und also auch die Behauptung unseres Satzes für $j = 1$ hervor.

Für beliebige $j \neq 0,1$ mit Bezeichnung

$$F_j(s) = \frac{1 - \dfrac{\mu_j e^{-s\beta_j}}{s + \mu_j}}{1 - \dfrac{\mu e^{-s\beta}}{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(s + \mu_i)}} \, \frac{\mu^{(j-1)} e^{-s\beta^{(j-1)}}}{\prod\limits_{i=0}^{j-1}(s + \mu_i)},$$

mit demselben Fortgang zuerst

$$\lim_{s \to 0} F_j(s) = F_j = \frac{(1 + \mu_j\beta_j)\, S_j'}{\mu\beta + \sum\limits_{i=0}^{k-1} S'},$$

dann

$$P_k\{t, j\} \sim o(1) + F_j(1 - e^{-\mu_0 t})$$

und endlich

$$\lim_{t \to \infty} P_k\{t, j\} = F_j\,.$$

Für $j = 0$ mit dem Einsetzen von

$$F_0(s) = \frac{1 - \dfrac{\mu_0 e^{-s\beta_0}}{s + \mu_0}}{1 - \dfrac{\mu e^{-s\beta}}{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(s + \mu_i)}} \cdot \frac{\mu^{(k-1)} e^{-s\beta^{(k-1)}}}{\prod\limits_{i=1}^{k-1}(s + \mu_i)}$$

in (3.6) bekommen wir

$$\mathfrak{L}[P_k\{t, 0\}] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\frac{\mu_0}{s + \mu_0} + \frac{1}{s}\frac{\mu_0}{s + \mu_0}[F_0(s) - F_0] + F_0\frac{\mu_0}{s + \mu_0}$$

und weiter

$$\lim_{t \to \infty} P_k\{t, 0\} = F_0 = \frac{(1 + \mu_0\beta_0)\, S'_0}{\mu\beta + \sum_{i=0}^{k-1} S'_i}.$$

Dadurch ist der Beweis des Satzes vollendet.

Für den Zähler des zweiten Typus bekommen wir ähnlich den folgenden Satz.

Satz 4.2. *Wenn die Voraussetzungen des Satzes 3.1 erfüllt sind, dann gilt für die Zähler des zweiten Typus*

(4.10)
$$\lim_{t \to \infty} P_k\{t, j\} = \frac{S''_j}{\sum_{i=0}^{k-1} S''_i},$$

wobei

(4.11)
$$S''_i = \mu_0\mu_1 \dots \mu_{i-1}\mu_{i-1} \dots \mu_{k-1} e^{-\sum_{\substack{i=0 \\ i+j}}^{k-1} \beta_i\mu_i}$$

ist.

§ 5. SPEZIALFÄLLE

In diesem Paragraph erörten wir Spezialfälle der allgemeinen Beziehungen (4.1) und (4.10).

A. Wenn der Zähler in allen Zuständen die gleiche Empfindlichkeit hinsichtlich der Impulshöhen hat, dann gilt

(5.1)
$$\mu_0 = \mu_1 = \dots = \mu_{k-1} = \lambda$$

und für einen Zähler des ersten Typus bekommen wir aus (4.1)

(5.2a)
$$\lim_{t \to \infty} P_k\{t, j\} = \frac{\lambda\beta_j + 1}{\lambda\beta + k}$$

und für einen Zähler des zweiten Typus aus (4.10)

(5.2b)
$$\lim_{t \to \infty} P_k\{t, j\} = \frac{e^{-{}^{(j)}\beta\lambda}}{\sum_{i=0}^{k-1} e^{-{}^{(i)}\beta\lambda}},$$

wobei

(5.3)
$${}^{(i)}\beta = \beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{i-1} + \beta_{i+1} + \dots + \beta_{k-1}$$

ist.

B. Wenn der Zähler in allen Zuständen die gleiche Ruhezeit hat, dann gilt

(5.4)
$$\beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_{k-1} = \alpha$$

und aus (4.1) stellen wir erstens für einen Zähler des ersten Typus

$$\lim_{t\to\infty} P_k\{t, j\} = \frac{(1 + \mu_j\alpha)\, S'_j}{k\alpha\mu + \sum\limits_{i=0}^{k-1} S'_i}, \tag{5.5a}$$

zweitens für einen Zähler des zweiten Typus (aus 4.10)

$$\lim_{t\to\infty} P_k\{t, j\} = \frac{S'_j e^{-\alpha \sum\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{k-1} \mu_i}}{\sum\limits_{l=0}^{k-1} e^{-\alpha \sum\limits_{\substack{i=0\\ i\neq l}}^{k-1} \mu_i}} \tag{5.5b}$$

fest.

C. Im Falle eines völlig symmetrischen Zählers, für welchen also gleichzeitig (5.1) und (5.4) gilt-d. h. dieser Zähler hat in allen Zuständen die gleiche Empfindlichkeit hinsichtlich der Impulshöhen und die gleiche Ruhezeit-bekommen wir für die Zähler beider Typen

$$\lim_{t\to\infty} P_k\{t, j\} = \frac{1}{k}. \tag{5.6}$$

D. Wenn wir den Fall B für $\alpha = 0$ erwägen, d. h. der Zähler besitzt keine Ruhezeit, dann bekommen wir für die Zähler beider Typen

$$\lim_{t\to\infty} P_k\{t, j\} = \frac{S'_j}{\sum\limits_{i=0}^{k-1} S'_i}. \tag{5.7}$$

E. Im Falle eines vollkommenen Zählers (das ist der Fall sub C, wobei $\alpha = 0$ ist, bekommen wir wieder für beide Typen der Zähler

$$\lim_{t\to\infty} P_k\{t, j\} = \frac{1}{k}. \tag{5.8}$$

Wenn wir nur einen binären Zähler benützen, vereinfachen sich die Beziehungen (4.1) und (4.10) für den allgemeinen Fall

$$\mu_0 \neq \mu_1, \quad \beta_0 \neq \beta_1$$

für einen Zähler des ersten Typus auf

$$\lim_{t\to\infty} P_2\{t, 1\} = \frac{(1 + \mu_1\beta_1)\,\mu_0}{(\beta_0 + \beta_1)\,\mu_0\mu_1 + \mu_0 + \mu_1} \tag{5.9a}$$

und für einen Zähler des zweiten Typus auf

$$\lim_{t\to\infty} P_2\{t, 1\} = \frac{1}{1 + \dfrac{\mu_1}{\mu_0} e^{-(\beta_1\mu_1 - \beta_0\mu_0)}}. \tag{5.9b}$$

Wenn wir in (3.6) $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{k-1}$ als Veränderliche nehmen, sehen wir, dass $P_k\{t, j\}$ eine Funktion von mehreren Veränderlichen $t, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{k-1}$ darstellt, und wir schreiben $P_k\{t, j, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{k-1}\}$.

Wenn wir

$$\mu_i = a_i \lambda \tag{6.1}$$

voraussetzen, dann ist die Funktion $P_k\{t, j, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{k-1}\}$ eine Funktion von zweien Veränderlichen t und λ und deshalb schreiben wir $P_k\{t, j, \lambda\}$.

Wir ermitteln jetzt den Grenzwert $P_k\{t, j, \lambda\}$ für $\lambda \to \infty$ und beweisen folgenden Satz.

Satz 6.1. *Wenn die Voraussetzungen des Satzes 3.1 erfüllt sind, dann gilt für einen Zähler des ersten Typus*

$$\lim_{\lambda \to \infty} P_k\{t, 1, \lambda\} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad t \in (l\beta, \ l\beta + \beta_1), \\ 0 & \text{für} \quad t \in (l\beta + \beta_1, \ (l+1)\beta). \end{cases}$$

Für $l\beta$ und $l\beta + \beta_1$ $(l = 0, 1, 2, \ldots)$ ist nicht dieser Grenzwert definiert (t endlich).

Beweis: Wieder werden wir schreiben

$$\mathfrak{L}[P_k\{t, 1, \lambda\}] = \frac{1}{s} \frac{a_0 \lambda}{a_0 \lambda + s} [F_1(s, \lambda) - F_1] + F_1 \frac{1}{s} \frac{a_0 \lambda}{a_0 \lambda + s}$$

und

$$\lim_{\lambda \to \infty} [P_k\{t, 1, \lambda\}] = \tag{6.2}$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \frac{a_0 \lambda}{a_0 \lambda + s} \cdot \{F_1(s, \lambda) - F_1\} \right] + \lim_{\lambda \to \infty} \mathfrak{L}^{-1} \left[F_1 \frac{1}{s} \frac{a_0 \lambda}{a_0 \lambda + s} \right].$$

Aus den Betrachtungen, die bei (4.8) durchgeführt wurden, sieht man, dass das erste Glied (6.2) alle Bedingungen für die Verwechselung des Umkehrprozesses und des Grenzüberganges erfüllt. (Die Funktion ist an der imaginären Achse im endlichen Intervall begrenzt, für $y \to \infty$ ist sie unterschiedslos mit $o(y^{-2})$ usw.)

Deshalb gilt $\left(a = \prod_{i=0}^{k-1} a_i, \ A_i' = a/a_i\right)$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \frac{a_0 \lambda}{a_0 \lambda + s} \{F_1(s, \lambda) - F_1\} \right] = \mathfrak{L}^{-1} \left[\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{s} \frac{a_0 \lambda}{a_0 \lambda + s} \{F_1(s, \lambda) - F_1\} \right] = \tag{6.3}$$

$$= \mathfrak{L}^{-1} \left[\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{s} \frac{a_0 \lambda}{a_0 \lambda + s} \left\{ \frac{1 - \dfrac{a_1 \lambda e^{-s\beta_1}}{s + a_1 \lambda}}{1 - \dfrac{a \lambda^k e^{-s\beta}}{\prod_{i=0}^{k-1} (s + a_1 \lambda)}} - \frac{(1 + a_1 \lambda \beta_1) A_i' \lambda^{k-1}}{\beta a \lambda^k + \lambda^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} A_i'} \right\} \right] =$$

$$= \mathfrak{L}^{-1}\left[\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{s}\frac{a_0\lambda}{a_0\lambda+s}\left\{\frac{\lambda^k a(1-e^{-s\beta_1})+\lambda^{k-1}(\ )+\dots}{\lambda^k a(1-e^{-s\beta})+\lambda^{k-1}(\ )+\dots}-\frac{\lambda^k a\beta_1+\lambda^{k-1}A'_1}{\lambda^k a\beta+\lambda^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}A'_i}\right\}\right] =$$

$$= \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\left(\frac{1-e^{-s\beta_1}}{1-e^{-s\beta}}-\frac{\beta_1}{\beta}\right)\right] = \varphi(t)-\frac{\beta_1}{\beta},$$

wobei

$$\varphi(t) = \begin{cases}1, & t\in(l\beta, l\beta+\beta_1), \\ 0, & t\in(l\beta+\beta_1, (l+1)\beta)\end{cases} \tag{6.4}$$

ist.

Weiter ist

$$\lim_{\lambda\to\infty}\mathfrak{L}^{-1}\left[F_1\frac{1}{s}\frac{a_0\lambda}{a_0\lambda+s}\right] = \lim_{\lambda\to\infty}F_1(1-e^{-a_0\lambda t}) = \frac{\beta_1}{\beta}. \tag{6.5}$$

Wenn wir jetzt (6.3), (6.4) und (6.5) verbinden, bekommen wir die Behauptung des Satzes.

Für $j \neq 0,1$ bekommen wir

$$\lim_{\lambda\to\infty} P_k\{t, j, \lambda\} = \begin{cases}1 & \text{für} \quad t\in(l\beta+\beta^{(j-1)}, l\beta+\beta^{(j)}), \\ 0 & \text{für} \quad t\in(l\beta+\beta^{(j)}, (l+1)\beta+\beta^{(j-1)})\end{cases}$$

und für $j = 0$

$$\lim_{\lambda\to\infty} P_k\{t, 0, \lambda\} = \begin{cases}1 & \text{für} \quad t\in(l\beta+\beta^{(k-1)}, (l+1)\beta), \\ 0 & \text{für} \quad t\in((l+1)\beta, (l+1)\beta+\beta^{(k-1)}).\end{cases}$$

Ähnlich bekommen wir für einen Zähler des zweiten Typus folgenden Satz:

Satz 6.2. *Wenn die Voraussetzungen des Satzes 3.1 erfüllt sind, dann gilt für einen Zähler des zweiten Typus*

$$\lim_{\lambda\to\infty} P_k(t, 1, \lambda) = 1,$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} P_k(t, j, \lambda) = 0 \qquad (j = 0, 2, 3, \dots, k-1)$$

für alle endliche $t > 0$.

§ 7. ANALYSE DER ERZIELTEN ERGEBNISSE

Aus den Ergebnissen der Paragraphen 4–6 können wir einige wichtige Erkenntnisse für die Produktion der Zufallszahlen auf physikalischem Wege (besonders für die technische Realisation) ableiten. Infolge der technischen Mängel, die wir nicht vermeiden können, entstehen unregelmässige Abweichungen von der gleichmässigen Verteilung der Zufallszahlen. Dabei zeigen die erzielten Ergebnisse an einem mathematischen Modell direkt den Ursprung dieser Abweichungen. Daraus ergibt sich auch die Begründung der allgemeinen Theorie der Impulszähler.

Im § 8 wird eine Tabelle der Fehler nach der Beziehung (5.9a), d. h. für einen binären Zähler für einige Werte μ_0, μ_1, β_0, β_1 ausgerechnet. Diese können wir meistens für eine Realisation in Betracht nehmen.

Aus der Tabelle sehen wir z. B., dass es für die Erzielung eines kleineren Fehlers als 10^{-6} nötig ist, die Symmetrie des binären Zählers mit Rücksicht auf die Impulshöhe in den Grenzen 0,0001% (d. h., dass der Zähler in einer Lage um 0,0001% Impulse mehr als in der anderen Lage zu registrieren imstande ist) und in den Grenzen 0,01% für die Unterscheidungsfähigkeit der aufeinanderfolgenden Impulse zu erhalten.

Um der ersten Bedingung zu entsprechen, müssen wir besondere Pflege der Herrichtung der dem Eingang des Zählers zugeführten Impulse widmen, d. h. wir müssen eine genug wirksame Kette von Impulsverstärkern und Begrenzern zur Verfügung haben.

Um der zweiten Bedingung zu entsprechen, müssen wir sorgsam die Zählerelemente wählen, und den Zähler auch während des Betriebes einstellen.

Auf diese Weise zeigen die Ergebnisse dieser Arbeit den Technikern den Weg zur Unterdrückung des Einflusses der technischen Mängel, welchen diese auf die gleichmässige Häufigkeitsverteilung der Zufallszahlen haben können.

In der Tabelle können wir auch einen Fehler $2 \,.\, 10^{-13}$ finden. Dieser so kleine Fehler ist durch gewisse Übereinstimmung der Umstände verursacht. Der Zähler hat grössere Ruhezeit gerade in der Lage, in der er empfindlicher auf die Impulshöhe ist. Es steht fest, dass wir solche Werte μ_0, μ_1, β_0, β_1 finden könnten, für welche der Fehler Null wäre. Doch glauben wir, dass wir nicht diese theoretisch interesante Tatsache bei der technischen Konstruktion ausnützen könnten. Aus der Tabelle in § 8 können wir ersehen, dass die Grösse der Ruhezeit ohne Einfluss auf gleichmässige Häufigkeitverteilung bleibt, dagegen verkleinert sich der Fehler mit grösseren Werten von μ_i.

Diese Betrachtungen gelten jedoch für endliche Intervalle nicht. Dies zeigen die Sätze 6.1 und 6.2, aus deren hervorgeht, dass wir mit grösseren Werten von μ_i (d. h. mit grösseren Quellenintensitäten) gleichmässige Häufigkeitsverteilung nicht erreichen könnten, im Gegenteil, dass wir mit einer übermässigen Intensitätenvergrösserung ein recht schlechtes Resultat erzielen könnten. Wenn wir den Fehler genau für endliche Intervalle bestimmen sollen, müssen wir die Resultate des Paragraphen 3 anwenden.

Ein wesentlicher Teil der Betrachtungen (besonders der zur Berechnung der Fehler führende, folglich §§ 3—6) wurde nur für konstante Ruhezeit der Zähler durchgeführt.

Wenn wir diese Voraussetzung (konstante Ruhezeit) durch andere (die Ruhezeit ist eine Zufallsgrösse mit exponentialer Verteilungsfunktion) ersetzen, können wir eine andere Methode benützen. In diesem Falle bildet nämlich der Prozess der Impulszählung modulo k einen homogenen markowschen Prozess mit $2k$ diskreten Zuständen und mit einer Intensitätenmatrix

$$\|\gamma_{ij}\| = \begin{pmatrix} -\mu_0 & \mu_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_1 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_1 & \mu_1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_2 & \beta_2 & 0 \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots & -\mu_{k-1} & \mu_{k-1} \\ \beta_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_0 \end{pmatrix}$$

Wenn wir das entsprechende System von Differentialgleichungen für absolute Wahrscheinlichkeiten $p_j(t)$

$$\frac{\mathrm{d}p_j(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=0}^{k-1} p_i(t)\nu_{i_j}(t) \tag{7.1}$$

lösen, können wir die erforderten Resultate (bei der Erfüllung von weiteren Bedingungen) gewinnen.

In (7.1) ist mit $p_j(t)$ die absolute Wahrscheinlichkeit bezeichnet, d. h. eine Wahrscheinlichkeit, dass das System in einem Zeitaugenblick t im Zustande i sein wird.

§ 8. DIE TABELLE

Die in folgender Tabelle angeführten Werte müssen wir auf eine beliebige, doch voraus festgegebene Zeiteinheit (z. B. auf 1 msec) beziehen. Dann interpretieren wir z. B. die 11 Zeile folgendermassen. In 1 msec gehen durchschnittlich 5 Impulse aus den Quellen hervor, die einen Übergang aus dem Zustand „0" in den Zustand „1" verursachen können, dagegen durchschnittlich 5,001 Impulse aus den Quellen, die einen umgekehrten Übergang verursachen. Die Ruhezeit im Zustand „0" ist 1 μsec im Zustand „1" 1,5 μsec.

Den Grenzwert $P_2\{t, 1\}$ für $t \to \infty$ interpretieren wir als eine Verlängerung des Intervalles, in dem wir die Impulse zählen. Das hat allerdings immer die Herabsetzung der Geschwindigkeit der Herstellung der Zufallszahlen zur Folge.

Ähnliche Tabellen können auch für einen Zähler des zweiten Typus ausgerechnet werden, aber ihre Abweichungen von den obenangeführten Tabellen sind nicht wesentlich.

μ_0	μ_1	$\beta_0 \cdot 10^{-3}$	$\beta_1 \cdot 10^{-3}$	$\lim\limits_{t\to\infty} P_2\{t, 1\}$	Δ
5	5	0	0	0,5	0
5	5,00001	0	0	0,4999995	$5 \cdot 10^{-7}$
5	5,001	0	0	0,49995	$5 \cdot 10^{-5}$
5	5,1	0	0	0,495	$5 \cdot 10^{-3}$
5	5	1	1	0,5	0
5	5,00001	1	1	0,4999995	$5 \cdot 10^{-7}$
5	5,001	1	1	0,49995	$5 \cdot 10^{-5}$
5	5,1	1	1	0,495	$5 \cdot 10^{-3}$
5	5	1	1,5	0,5006	$6 \cdot 10^{-4}$
5	5,00001	1	1,5	0,5006	$6 \cdot 10^{-4}$
5	5,001	1	1,5	0,5006	$6 \cdot 10^{-4}$
5	5,1	1	1,5	0,496	$4 \cdot 10^{-3}$
5	5	1	1,1	0,5001	$1 \cdot 10^{-4}$
5	5,00001	1	1,1	0,5001	$1 \cdot 10^{-4}$
5	5,001	1	1,1	0,50007	$7 \cdot 10^{-5}$
5	5,1	1	1,1	0,495	$5 \cdot 10^{-3}$
5	5	1	1,01	0,50001	$1 \cdot 10^{-5}$
5	5,00001	1	1,01	0,50001	$1 \cdot 10^{-5}$
5	5,001	1	1,01	0,49996	$4 \cdot 10^{-5}$
5	5,1	1	1,01	0,495	$5 \cdot 10^{-3}$
5	5	1	1,001	0,500001	$1 \cdot 10^{-6}$
5	5,00001	1	1,001	0,5000007	$7 \cdot 10^{-7}$
5	5,001	1	1,001	0,49995	$5 \cdot 10^{-5}$
5	5,1	1	1,001	0,495	$5 \cdot 10^{-3}$
5	5	1	1,0001	0,5000001	$1 \cdot 10^{-7}$
5	5,00001	1	1,0001	0,4999996	$4 \cdot 10^{-7}$
5	5,001	1	1,0001	0,49995	$5 \cdot 10^{-5}$
5	5,1	1	1,0001	0,495	$5 \cdot 10^{-3}$
5	5	1,0001	1	0,4999999	$1 \cdot 10^{-7}$
5	5,00001	1,0001	1	0,4999994	$6 \cdot 10^{-7}$
5	5,001	1,0001	1	0,49995	$5 \cdot 10^{-5}$
5	5,1	1,0001	1	0,495	$5 \cdot 10^{-3}$
5	5	1,01	1	0,49999	$1 \cdot 10^{-5}$
5	5,00001	1,01	1	0,49999	$1 \cdot 10^{-5}$
5	5,001	1,01	1	0,49994	$6 \cdot 10^{-5}$
5	5,1	1,01	1	0,495	$5 \cdot 10^{-3}$
5	5	10	10	0,5	0
5	5,00001	10	10	0,4999995	$5 \cdot 10^{-7}$
5	5,001	10	10	0,49995	$5 \cdot 10^{-5}$
5	5,1	10	10	0,495	$5 \cdot 10^{-3}$

μ_0	μ_1	$\beta_0 \cdot 10^{-3}$	$\beta_1 \cdot 10^{-3}$	$\lim\limits_{t\to\infty} P_2\{t, 1\}$	Δ
10	10	0	0	0,5	0
10	10,00001	0	0	0,4999998	$2 \cdot 10^{-7}$
10	10,001	0	0	0,49998	$2 \cdot 10^{-5}$
10	10,1	0	0	0,498	$2 \cdot 10^{-3}$
10	10	1	1	0,5	0
10	10,00001	1	1	0,4999998	$2 \cdot 10^{-7}$
10	10,001	1	1	0,49998	$2 \cdot 10^{-5}$
10	10,1	1	1	0,498	$2 \cdot 10^{-3}$
10	10	1	1,5	0,501	$1 \cdot 10^{-3}$
10	10,00001	1	1,5	0,501	$1 \cdot 10^{-3}$
10	10,0001	1	1,5	0,501	$1 \cdot 10^{-3}$
10	10,1	1	1,5	0,499	$1 \cdot 10^{-3}$
10	10	1	1,1	0,5002	$2 \cdot 10^{-4}$
10	10,00001	1	1,1	0,5002	$2 \cdot 10^{-4}$
10	10,001	1	1,1	0,5002	$2 \cdot 10^{-4}$
10	10,1	1	1,1	0,498	$2 \cdot 10^{-3}$
10	10	1	1,01	0,50002	$2 \cdot 10^{-5}$
10	10,00001	1	1,01	0,50002	$2 \cdot 10^{-5}$
10	10,001	1	1,01	0,5000002	$2 \cdot 10^{-7}$
10	10,1	1	1,01	0,498	$2 \cdot 10^{-3}$
10	10	1	1,001	0,500002	$2 \cdot 10^{-6}$
10	10,00001	1	1,001	0,500002	$2 \cdot 10^{-6}$
10	10,001	1	1,001	0,49998	$2 \cdot 10^{-5}$
10	10,1	1	1,001	0,498	$2 \cdot 10^{-3}$
10	10	1	1,0001	0,5000002	$2 \cdot 10^{-7}$
10	10,00001	1	1,0001	0,5000000000002	$2 \cdot 10^{-13}$
10	10,001	1	1,0001	0,49998	$2 \cdot 10^{-5}$
10	10,1	1	1,0001	0,498	$2 \cdot 10^{-3}$
10	10	1,0001	1	0,4999998	$2 , 10^{-7}$
10	10,00001	1,0001	1	0,4999996	$4 \cdot 10^{-7}$
10	10,001	1,0001	1	0,49998	$2 \cdot 10^{-5}$
10	10,1	1,0001	1	0,498	$2 \cdot 10^{-3}$
10	10	1,01	1	0,49998	$2 \cdot 10^{-5}$
10	10,00001	1,01	1	0,49998	$2 \cdot 10^{-5}$
10	10,001	1,01	1	0,49996	$4 \cdot 10^{-5}$
10	10,1	1,01	1	0,498	$2 \cdot 10^{-3}$
10	10	10	10	0,5	0
10	10,00001	10	10	0,4999998	$2 \cdot 10^{-7}$
10	10,001	10	10	0,49998	$2 \cdot 10^{-5}$
10	10,1	10	10	0,498	$2 \cdot 10^{-3}$

§ 9. ALLGEMEINES MODELL

Das Modell der Impulszähler, das im § 1 gebildet wird, ermöglicht uns in Verbindung mit dem Artikel [6], u. a. ein allgemeines Modell der Impulszählung zu schaffen. In der Praxis können wir die Impulszählung in drei Etappen verteilen:

1) Anregung zur Entstehung eines Impulses (die Quelle);

2) Formierung eines Impulses (Detektor);

3) Impulszähler.

Bisher wurden alle in der Literatur beschriebenen Modelle der Impulszählung, lediglich in Anbetracht der Eigenschaften der Quelle und des Detektors aufgebaut. Dagegen ist der Zähler als idealer Zähler genommen worden. In dieser Arbeit haben wir ein Schema studiert, in welchem der Detektor ideal arbeitet.

Zu einem allgemeinen Modell gelangen wir dann, wenn wir bei unserem Modell zum Eingang des Zählers nicht die Impulse aus der Poisson'schen Quelle, sondern erst aus einem Detektor (oder eine Folge von Detektoren) führen werden. Die Verteilungsfunktion solcher Impulse können wir z. B. in [6] finden.

Wenn es sich um einen Zähler handelt, dessen primäre Ruhezeit eine Konstante ist, die kleiner als die konstante Ruhezeit eines Detektors ist, dann können wir den Zähler als einen Idealzähler betrachten (z. B. die Abzählung von Teilchen eines radioaktiven Zerfalls mit einem G – M Zähler, dessen durch eine wirksame Kaskade von Verstärkern und Begrenzern formierte Impulse ein schneller elektronischer Zähler zählt). Ein umgekehrter Fall ist die Abzählung der Durchgänge durch ein gegebenes Potenzialniveau des Geräusches, die durch einen schnellen Schmidt-Kreis signalisiert und mit einem ringförmigen Zähler abgezählt werden.

Literatur

[1] *А. М. Бонч-Бруевич:* Применение электронных ламп в экспериментальной физике, Москва 1955.

[2] *V. A. Ditkin, P. I. Kuzněcov:* Příručka operátorového počtu, Praha 1954.

[3] *G. Doetsch:* Handbuch der Laplace-Transformation, Basel 1950.

[4] Handbuch für Hochfrequenz und Elektrotechniker, Berlin 1957.

[5] *S. Hörner:* Herstellung von Zufallszahlen auf Rechenautomaten. Zeitschrift für angewandte Math. und Physik., Fasc. 1, 1957.

[6] *L. Takacs:* On a Probability Problem Arising in the Theory of Counters. Proc. of the Cambridge Phil. Society, Vol. 52, Part 3 (1956), pp 488 – 498.

Výtah

TEORIE ČÍTAČŮ IMPULSŮ A JEJÍ APLIKACE

ZDENĚK KOUTSKÝ

V této práci je vybudován matematický model čítače impulsů s náhodnými amplitudami. Příchod impulsů je popsán Poissonovým procesem. Čítač má k stavů (poloh) a předpokládáme, že je vzhledem k technickým nedostatkům asymetrický. To se projevuje tím, že čítač má různou citlivost v různých polohách vzhledem k amplitudám impulsů, jež přicházejí na jeho vstup. Rovněž předpokládáme, že mrtvá doba čítače je v různých polohách různá (§ 1). Definujeme čítač typu I a II a pro takto vytvořené modely pak studujeme distribuční funkci načítaných impulsů za dobu t (§ 2) a dále $P_k\{t, i\}$, tj. pravděpodobnost, že čítač napočítá za dobu t $n \equiv i(\mathrm{mod}\ k)$ impulsů a to jak pro konečná t (§ 3) tak i pro $t \to \infty$ (§ 4, věty 4.1 a 4.2). Tyto úvahy mají zvláštní důležitost při produkci náhodných čísel fysikálními metodami, neboť asymetrie čítačů v různých polohách způsobuje nerovnoměrné limitní rozložení, tj. obecně neplatí pro všechna $i = 0, 1, 2, \ldots, k - 1$

$$\lim_{t \to \infty} P_k\{t, i\} = \frac{1}{k}.$$

V § 5 uvažujeme některé speciální případy, v § 6 studujeme vliv rostoucí intensity Poissonova procesu, jímž jsou popsány impulsy na vstupu čítače, na $P_k\{t, i\}$. §§ 7 a 8 jsou pak věnovány rozboru výsledků dosažených v §§ 3–6 a důsledkům, jež z nich plynou pro konstrukci zařízení pro produkci náhodných čísel fysikálními metodami. V tabulce jsou pak pro různé hodnoty parametrů Poissonových procesů a mrtvých dob čítače vyčísleny odchylky od rovnoměrného limitního rozložení. V § 9 je stručně naznačen obecný model čítání náhodných impulsů.

Резюме

ТЕОРИЯ СЧЕТЧИКОВ ИМПУЛЬСОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ЗДЕНЕК КОУТСКИ (Zdeněk Koutský)

В статье построена математическая модель счетчика импульсов со случайными амплитудами. При этом приход импульса на вход счетчика описывается процессом Пуассона. Предполаяается, что счетчик имеет k состояний и что он асимметричний ввиду его технических недостатков. Асимметрия проявляется в том, что чувствительность счетчика к ампитудам импульсов на входе в раз-

личных состояниях неодинакова. Тоже длина мертвого времени зависит от состояния, в котором счетчик только что находится (§ 1).

Далее определяются счетчики I-го и II-го типа, и для этих моделей изучается функция распределения регистрированных импульсов (§ 2) и вероятность $P_k\{t, i\}$ того, что счетчик в промежутке времени $\langle 0, t\rangle$ регистрировал $n \equiv i \pmod k$ импульсов (§ 3). В § 4 (теоремы 4.1 и 4.2) исследуется предельное распределение этой величины при $t \to \infty$. Эти рассуждения имеют большое значение для продукции случайных чисел при помощи физических методов, так как мы вызываем асимметричность счетчика в различных состояниях в пределе отклонения от равномерного распределения. Другими словами, равенство

$$\lim_{t\to\infty} P_k\{t, i\} = \frac{1}{k} \quad \text{для} \quad i = 0, 1, \ldots, k - 1$$

не имеет в обшем случае места.

В § 5 изучаются некоторые специальные случаи.

В § 6 исследуется влияние повышения параметра процесса Пуассона на входе на вероятность $P_k\{t, i\}$.

§ 7—§ 8 посвящаются дискуссии результатов, содержащихся в § 3—§ 6, и их следствиям для конструкции физических устройств, служащих к продукции случайных чисел. В таблице даются предельные отклонения от равномерного распределения для различных значений параметров процесса Пуассона на входе счетчика (с двумя возможными состояниями).

В § 9 приводится вполне общая модель счету случайных импульсов.

Adresa autora: Dr. *Zdeněk Koutský* C. Sc., Ústav teorie informace a automatisace ČSAV, Praha 2, Vyšehradská 49.