Václav Doležal

Der verallgemeinerte Théveninsche Satz und seine Anwendung

Aplikace matematiky, Vol. 7 (1962), No. 2, 104–115

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102793`

DER VERALLGEMEINERTE THÉVENINSCHE SATZ UND SEINE ANWENDUNG

VÁCLAV DOLEŽAL

(Eingegangen am 1. März 1961.)

Dieser Artikel ist der Verallgemeinerung des Théveninschen Satzes auf parametrische Systeme gewidmet. Daneben wird der verallgemeinerte Satz zur Ermittlung der angenäherten Systemreaktion verwendet.

Im weiteren wird vorausgesetzt, dass der Leser mit den Elementen der Theorie der linearen Operatoren, welche in der Arbeit [1] angegeben sind, vertraut ist. (Die in [1] eingeführten Bezeichnungen werden auch hier benützt.) Da der mathematische Hintergrund jedes parametrischen Systemes derselbe ist, d. h. es ist gleichgültig, ob es sich um ein elektrisches oder mechanisches System handelt, wird in diesem Artikel anschaulichkeitshalber nur über elektrische Systeme gesprochen.

In [1] wurden die Begriffe der Admittanz bzw. Impedanz folgendermassen eingeführt: „Der parametrische Zweipol $\mathfrak{Z}$ (d. h. ein System der gegenseitig geschalteten zeitlich veränderlichen R, L, C – Elemente, welches durch ein Paar von Klemmen einschaltbar ist) besitzt die Admittanz" heisst, dass es einen Operator $A \in \mathfrak{A}$ (vergl. mit [1]) derart gibt, dass zwischen der auf $\mathfrak{Z}$ herrschenden Spannung e und dem durch $\mathfrak{Z}$ fliessenden Strom i (was allgemein Distributionen aus $\mathbf{D}_1$ sind) die Beziehung $i = Ae$ besteht. Dabei wird der Operator A die (verallgemeinerte) Admittanz genannt. Analog, „$\mathfrak{Z}$ besitzt die Impedanz" heisst, dass es einen Operator $Z \in \mathfrak{A}$ (Impedanz) gibt, dass zwischen e und i die Gleichung $e = Zi$ gilt.

Ferner wurde ein [1] gezeigt, dass folgende Behauptungen gültig sind:

1) *Die Parallelschaltung von Zweipolen $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$, welche die Admittanzen A_1, A_2 besitzen, ist ein Zweipol, welcher die Admittanz $A_1 + A_2$ besitzt.*

2) *Die Reihenschaltung von Zweipolen $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$, welche die Impedanzen Z_1, Z_2 besitzen, ist ein Zweipol, welcher die Impedanz $Z_1 + Z_2$ hat.*

Für's weitere seien noch folgende Bezeichnungen eingeführt: „Der Zweipol $\mathfrak{Z}$ ist regulär" soll heissen, dass $\mathfrak{Z}$ die Admittanz A sowie die Impedanz Z besitzt. Aus den eben ausgesprochenen Definitionen geht augenblicklich hervor, dass dann $AZ = ZA = I$ (I – Einheitsoperator) gilt, d. h. dass $Z = A^{-1}$ ist und A, Z reguläre Operatoren sind.

Es sei jetzt $n \geqq 1$ eine ganze Zahl; der parametrische $2n$ — Pol $\mathfrak{N}$ (d. h. ein aus gegenseitig geschalteten zeitlich veränderlichen R, L, C — Elementen gebildetes System, welches durch n Klemmenpaare $P_1, P_2, \ldots, P_n$ einschaltbar ist) heisst I_k-normal, $(1 \leqq k \leqq n)$, wenn Operatoren $A_i \in \mathfrak{A}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ derart existieren, dass zwischen dem durch das Klemmenpaar P_k fliessenden Strom i_k und den auf den Klemmenpaaren P_i wirkenden Spannungen e_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ die Beziehung

$$(1) \qquad i_k = \sum_{i=1}^{n} A_i e_i$$

besteht.

Wenn in einem $2n$ — Pol $\mathfrak{N}$ jedes Klemmenpaar P_i ausser P_k kurzgeschlossen ist, so reduziert sich $\mathfrak{A}$ zu einem Zweipol, dessen Klemmen durch das Klemmenpaar P_k gebildet sind. Dieser Zweipol wird mit $\mathfrak{Z}_k$ bezeichnet. Es ist offensichtlich, dass im Falle, in welchem $\mathfrak{N}$ I_k-normal ist, der Zweipol $\mathfrak{Z}_k$ die Admittanz besitzt. Tatsächlich, wenn die Klemmenpaare P_i, $i \neq k$ kurzgeschlossen sind, heisst das, dass $e_i = 0$ für $i \neq k$ ist. Aus Gl. (1) folgt dann $i_k = A_k e_k$, w. z. b. w.

Jetzt kann schon der verallgemeinerte Théveninsche Satz ausgesprochen werden:

Satz 1. *Es sei $\mathfrak{N}$ ein $2n$ — Pol, $(n \geqq 2)$, $\mathfrak{Z}$ ein Zweipol, wobei folgende Voraussetzungen erfüllt sind:*

1) *$\mathfrak{N}$ ist I_n-normal,*
2) *$\mathfrak{Z}$ ist regulär,*
3) *$\mathfrak{Z}_n$ ist regulär,*
4) *die Parallelschaltung der Zweipole $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_n$ ist ein regulärer Zweipol.*

Es sei e^* die Spannung, welche auf dem Klemmenpaare P_n herrscht, wenn P_n unbelastet ist und den Klemmenpaaren $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ die elektromotorischen Kräfte $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ zugeführt sind (vergl. mit Abb. 1a); ferner sei u die Spannung, welche auf P_n herrscht, falls P_n mit dem Zweipol $\mathfrak{Z}$ belastet ist und den Klemmenpaaren $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ dieselben EMK $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ zugeführt sind (vergl. mit Abb. 1b). Dann gilt: Wenn der aus den Zweipolen $\mathfrak{Z}_n$, $\mathfrak{Z}$ gebildeten Reihenschaltung die EMK e^* zugeführt wird, so herrscht auf dem Zweipol $\mathfrak{Z}$ gerade die Spannung u (vergl. mit Abb. 1c).

Anders ausgedrückt, Satz 1 besagt, dass die durch den $2n$ — Pol $\mathfrak{N}$ vermittelte Wirkung der Spannungsquellen $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ auf den Zweipol $\mathfrak{Z}$ durch die Einwirkung einer einzigen Spannungsquelle e^* mit der durch $\mathfrak{Z}_n$ gebildeten Innenimpedanz ersetzt werden kann.

Beweis: Aus Voraussetzung 1) folgt, dass es Operatoren $A_i \in \mathfrak{A}$, $i = 1, 2, \ldots n$ derart gibt, dass zwischen den Klemmenspannungen $e_1, e_2, \ldots e_n$ und dem Strom i_n die Beziehung

$$(2) \qquad i_n = \sum_{i=1}^{n} A_i e_i$$

besteht. Da A_n die Admittanz von $\mathfrak{Z}_n$ darstellt, so ist A_n laut Voraussetzung 3) regulär, also A_n^{-1} existiert. Es sei A die Admittanz des Zweipols $\mathfrak{Z}$ (was laut 2) ein regulärer Operator ist); da die Parallelschaltung der Zweipole $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_n$ die Admittanz $A + A_n$ besitzt, so ist $A + A_n$ laut Voraussetzung 4) ein regulärer Operator.

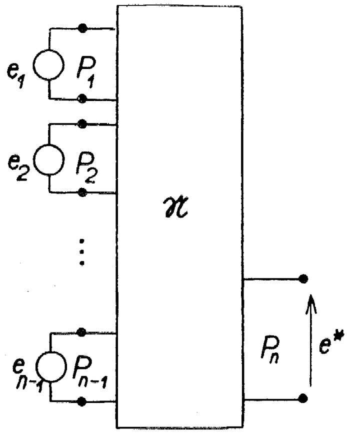

Abb. 1a.

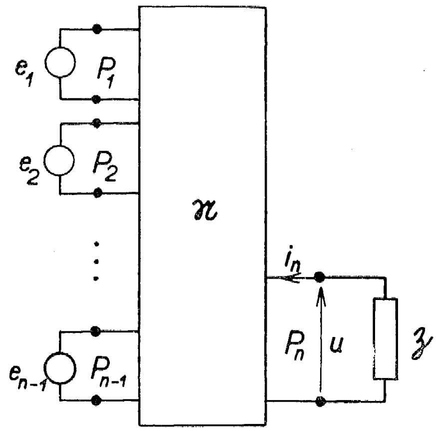

Abb. 1b.

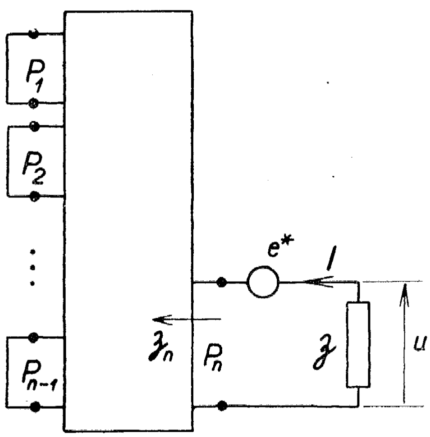

Abb. 1c.

Es sei zuerst die Spannung u festgestellt. Wenn also P_n mit dem Zweipol $\mathfrak{Z}$ belastet ist, so gilt laut (2) $i_n = \sum_{i=1}^{n-1} A_i e_i + A_n u$, und gleichzeitig $-i_n = Au$ (man beachte die Stromrichtung auf Abb. 1b). Hieraus folgt $(A + A_n)\, u = -\sum_{i=1}^{n-1} A_i e_i$, und folglich

$$(3) \qquad u = -(A + A_n)^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} A_i e_i \,.$$

(Es sei bemerkt, dass zur Existenz und Eindeutigkeit von u nur die Voraussetzung 4) genügt, während für die betrachtete Äquivalenz alle Voraussetzungen 1) – 4) erforderlich sein werden.)

Die Spannung e^* ergibt sich aus Gl. (2) für $i_n = 0$ (Klemmenpaar P_n unbelastet), und zwar

$$(4) \qquad e^* = -A_n^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} A_i e_i \,.$$

Betrachten wir jetzt den aus $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}_n$ gebildeten Stromkreis! Vor allem beachte man, dass $A^{-1} + A_n^{-1}$ ein regulärer Operator ist. Tatsächlich, da laut Voraussetzung A_n, A, $A + A_n$ reguläre Operatoren sind, so ist auch (vergl. [1], Satz 27) $B = A_n^{-1}(A + A_n) A^{-1} = A_n^{-1}AA^{-1} + A_n^{-1}A_nA^{-1} = A_n^{-1} + A^{-1}$ regulär. Die Impedanz der Reihenschaltung von $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}_n$ ist $A^{-1} + A_n^{-1}$, sodass für den durch die EMK e^* hervorgerufenen Strom I die Gleichung $I = (A^{-1} + A_n^{-1})^{-1} e^*$ gilt. Für die auf $\mathfrak{Z}$ herrschende Spannung u^* gilt dann $u^* = A^{-1}I$. Hieraus folgt (laut Satz 27 in [1]):

$$u^* = A^{-1}(A^{-1} + A_n^{-1})^{-1} e^* = - A^{-1}(A^{-1} + A_n^{-1})^{-1} A_n^{-1}\sum_{i=1}^{n-1} A_ie_i =$$
$$= - (A_n(A^{-1} + A_n^{-1}) A)^{-1}\sum_{i=1}^{n-1} A_ie_i = - (A + A_n)^{-1}\sum_{i=1}^{n-1} A_ie_i\,.$$

Laut Gl. (3) gilt also $u^* = u$, womit der Satz bewiesen ist.

Ganz gleich, wie es eben durchgeführt wurde, könnte man auch den verallgemeinerten Théveninschen Satz für Stromquellen anstatt für Spannungsquellen aussprechen; da jedoch der mathematische Hintergrund derselbe ist, wird darauf nicht näher eingegangen. Bemerkenswert ist, dass diese Verallgemeinerungen auf parametrische Systeme überhaupt gültig sind, da z. B. die wohlbekannte klassische Transformation Stern-Dreieck wegen der Nichtkommutativität des Operatorenproduktes schon nicht mehr allgemein durchführbar ist.

Widmen wir jetzt die Aufmerksamkeit der Ausnutzung des eben bewiesenen Satzes zu! In Anwendungen liegt am häufigsten der Fall vor, im welchen die auf einem parametrischen Zweipol herrschende Spannung zu ermitteln ist, wobei die übrige Schaltung (in der der betrachtete Zweipol eingeschaltet ist) nur aus konstanten Elementen gebildet ist. Geht man bei der Lösung aus dem Théveninschen Satze aus, so bekommt man für die gesuchte Spannung u (mit Beibehaltung der höher eingeführten Bezeichnung)

$$(5) \qquad u = A^{-1}(A^{-1} + A_n^{-1})^{-1} e^*\,,$$

wobei A_n (und alle A_i) Heavisidesche Operatoren sind. (Vergl. [1], S. 58.) Wenn jetzt überdies die Elemente des Zweipols $\mathfrak{Z}$ nur „schwach zeitabhängig" sind, so kann man die Zweipolimpedanz A^{-1} in zwei Summanden zerlegen, d. h. $A^{-1} = Z_0 + Q$, wobei Z_0 einen Heavisideschen Operator, Q einen „kleinen" Operator darstellt. (Diese Vorstellungen werden in nachfolgenden Zeilen präzisiert.) Für die angenäherte Spannung $\bar{u}$ kann man also setzen

$$(6) \qquad \bar{u} = A^{-1}(Z_0 + A_n^{-1})^{-1} e^*\,;$$

diese Auswahl hat den Vorteil, dass dann $Z_0 + A_n^{-1}$ ein Heavisidescher Operator ist, sodass $(Z_0 + A_n^{-1})^{-1}$ und dadurch auch $\bar{u}$ mühelos festgestellt werden kann. Man beachte noch die physikalische Bedeutung des Ansatzes (6); an Hand der äquivalenten Schaltung von Abb. 1c ist klar, dass $\bar{u}$ den Sinn der auf $\mathfrak{Z}$ herrschenden Spannung hat, als wenn der durchfliessende Strom $\tilde{I} = (Z_0 + A_n^{-1})\, e^*$ wäre, d. h. als ob bei der Feststellung von I die Zeitabhängigkeit der Elemente des Zweipols $\mathfrak{Z}$ nicht berücksichtigt würde.

Widmen wir uns jetzt der Ableitung der Fehlerabschätzung, d. h. der Abschätzung der Differenz $u - \bar{u}$ zu! Da im Allgemeinen u bzw. $\bar{u}$ Distributionen sind, wird es notwendig sein, einige Hilfsüberlegungen durchzuführen, damit man den „Abstand von zwei Distributionen" messen könnte. Zu diesem Zwecke führen wir folgende Bezeichnung ein (vergl. auch mit [2]):

Es sei $n \geqq 0$ eine ganze Zahl; es sei $\mathbf{D}^{(n)}$ das System aller Distributionen, welche folgende Eigenschaften besitzen: zu jeder Distribution $f \in \mathbf{D}^{(n)}$ existiert eine auf dem Intervall $(-\infty, \infty)$ definierte, in $(-\infty, 0)$ fast überall verschwindende lokal integrierbare reelle Funktion $F(t)$ derart, dass $f = F^{(n)}$ ist, d. h. dass für jede Funktion $\varphi(t) \in \mathbf{K}$

$$(f, \varphi) = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, \varphi^{(n)}(t)\, \mathrm{d}t \tag{7}$$

gilt.

Aus dieser Definition ist klar, dass $\mathbf{D}^{(0)} \subset \mathbf{D}^{(1)} \subset \mathbf{D}^{(2)} \subset \dots$ gilt; ausserdem ist ersichtlich, dass $\mathbf{D}^{(n)}$ alle Distributionen f aus $\mathbf{D}_1^*$ enthält, deren Ordnungen $r(f) \leqq n$ sind (vergl. mit [1]). Also z. B., es gilt $H_1(t)$, $H_0 \sin t \in \mathbf{D}^{(0)}$, $\delta_0 \in \mathbf{D}^{(1)}$, $\delta_0^{(k)} \in \mathbf{D}^{(k+1)}$, $k \geqq 0$ usw.

In dem Systeme $\mathbf{D}^{(n)}$ führen wir die „Norm" durch die Gleichung

$$\|f\|_n = \int_0^t |F(\tau)|\, \mathrm{d}\tau\,, \quad f = F^{(n)} \tag{8}$$

ein.

Die Norm $\|f\|_n$ ist offenbar eine nichtnegative nichtabnehmende Funktion von t. Es sei bemerkt, dass in der Analysis gewöhnlich die Norm eine Zahl ist; da aber für jedes $t \geqq 0$ die Funktion $\|f\|_n$ alle Eigenschaften der üblichen Norm besitzt, so wurde für $\|f\|_n$ die Bezeichnung „Norm" beibehalten. Man kann nämlich leicht beweisen, dass folgende Behauptung besteht:

Wenn $f, g \in \mathbf{D}^{(n)}$ und α eine reelle Zahl ist, so gilt

1) $\|f\|_n = 0$ *(identisch, für alle t) dann und nur dann, wenn $f = 0$ ist,*
2) $\|\alpha f\|_n = |\alpha| \cdot \|f\|_n$,
3) $\|f + g\|_n \leqq \|f\|_n + \|g\|_n$.

Mit Hilfe der Norm kann man den Abstand zweier Distributionen $f, g \in \mathbf{D}^{(n)}$ definieren, und zwar als $\|f - g\|_n$.

Beispiel: Man soll den Abstand des Rechteckimpulses $h_k(t) = k$ für $0 < t < 1/k$, $h_k(t) = 0$ ausserhalb $(0, 1/k)$, von δ_0 feststellen. Offenbar gilt δ_0, $h_k \in \mathbf{D}^{(1)}$, da $\delta_0 =$

$= H_0'$, $h_k = Q_k'$ ist wo $Q_k(t) = 0$ für $t < 0$, $Q_k(t) = kt$ für $0 \leqq t \leqq 1/k$, $Q_k(t) = 1$ für $t > 1/k$ ist. Laut Definition ist also

$$\|h_k - \delta_0\|_1 = \int_0^t |Q_k(\tau) - H_0(\tau)| \, d\tau = t - kt^2/2 \quad \text{für} \quad 0 < t < 1/k\,,$$
$$= 1/2k \qquad \text{für} \quad t \geqq 1/k\,.$$

Besonders wichtig ist der Zusammenhang zwischen der Norm $\|f\|_n$ und der Norm der Bilddistribution Af, wo der Operator $A \in \mathfrak{A}$ ist. Um diese Beziehungen näher ermitteln zu können, seien zuerst einige Tatsachen beachtet. Jeder Operator $A \in \mathfrak{A}$ ist auf dem Systeme $\mathbf{D}_1$ definiert ($\mathbf{D}_1$ ist die Menge aller auf $(-\infty, 0)$ verschwindenden Distributionen, vergl. [1]) und desto mehr auf jedem Systeme $\mathbf{D}^{(n)}$. Wählen wir also irgendein $n \geqq 0$, und dieses sei für die nachfolgende Überlegung festgehalten. Vor allem sieht man leicht ein, dass folgende Behauptung gilt:

Wenn $A \in \mathfrak{A}$ und $n \geqq 0$ eine ganze Zahl ist, so kann man A durch die Gleichung

$$Ax = \{ax^{(-n)} + [Wx^{(-n)}]\}^{(p)}\,, \quad p \geqq 0 \tag{9}$$

definieren; wenn überdies $A \in \mathfrak{A}^*$ und $n + r(A) \geqq 0$ ist, so gilt $p = n + r(A)$ und $a \neq 0$ im Intervall $\langle 0, \infty)$.

Um die erste Behauptung zu beweisen, wird von der Definitionsgleichung $Ax = [\tilde{W}x]^{(k)}$ ausgegangen; setzt man $x^{(-n)} = u$, so kann man schreiben $Ax = [\tilde{W}u^{(n)}]^{(k)}$. Macht man dann von der Formel a) des Satzes 17 in [1] Gebrauch, und führt man die Umformung durch, welche beim Beweise des dortigen Satzes 28 gebildet wurde, so bekommt man un mttelbar die Gleichung (9).

Zum Beweis der zweiten Behauptung wird von folgendem Hilfssatze Gebrauch gemacht:

Es sei $W(t, \tau) \in \mathbf{F}_1^2$ (vergl. [1], S. 39); notwendig und hinreichend für die Gültigkeit der Gleichungen $(\partial^i W/\partial t^i)^* \equiv 0$, $i = 0, 1, \ldots, q-2$, $(\partial^{q-1} W/\partial t^{q-1})^* \neq 0$ in $\langle 0, \infty)$ ist das Bestehen von $(\partial^i W/\partial \tau^i)^* \equiv 0$, $i = 0, 1, \ldots, q-2$, $(\partial^{q-1} W/\partial \tau^{q-1})^* \neq 0$ in $\langle 0, \infty)$.

Es gelte also $A \in \mathfrak{A}^*$, $Ax = [\tilde{W}x]^{(k)}$, wobei $\tilde{W}(t, \tau)$ für die Zahl q die im Hilfssatze angegebene Eigenschaft habe (vergl. [1], S. 51). Setzt man wieder $x^{(-n)} = u$, so ist $Ax = [\tilde{W}u^{(n)}]^{(k)}$. Wenn $n \geqq q$ ist, so ergibt sich laut Formel a) des Satzes 17 mit Hilfe des Hilfssatzes

$$Ax = \left\{\sum_{i=q-1}^{n-1} (-1)^i \left(\frac{\partial^i \tilde{W}}{\partial \tau^i}\right)^* u^{(n-i-1)} + (-1)^n \left[\frac{\partial^n \tilde{W}}{\partial \tau^n}\, u\right]\right\}^{(k)};$$

führt man dann die oben erwähnte Umformung durch, so ist dadurch die Form (9) erreicht. Wenn $n < q$ ist, so gilt $Ax = (-1)^n [(\partial^n \tilde{W}/\partial \tau^n)\, u]^{(k)}$; offenbar gilt dabei für $Q(t, \tau) = (-1)^n \,.\, \partial^n \tilde{W}/\partial\tau^n$, dass $(\partial^i Q/\partial t^i)^* \equiv 0$, $i = 0, 1, \ldots, q - n - 2$, $(\partial^{q-n-1} Q/\partial t^{q-n-1})^* \neq 0$ ist. Laut Formel b) des Satzes 17 ergibt sich dann

$$Ax = [Qu]^{(k)} = ([Qu]^{(q-n)})^{(k+n-q)} = \left(\left(\frac{\partial^{q-n-1} Q}{\partial t^{q-n-1}}\right)^* u + \left[\frac{\partial^{q-n} Q}{\partial t^{q-n}}\, u\right]\right)^{(k+n-q)},$$

was allerdings schon die Form (9) darstellt.

Es ist ersichtlich, dass beim festgehaltenen $n \geqq 0$ die Distribution $ax^{(-n)} + [Wx^{(-n)}]$ für jedes $x \in \mathbf{D}^{(n)}$ regulär ist; hieraus folgt laut Gl. (9), dass $Ax \in \mathbf{D}^{(p)}$ für jedes $x \in \mathbf{D}^{(n)}$ gilt. Wenn also der Operator A als einer auf $\mathbf{D}^{(n)}$ definierter betrachtet wird, so können alle Bilddistributionen Ax im Systeme $\mathbf{D}^{(p)}$ normiert werden. Dann kann man beweisen, dass es eine nichtnegative Funktion $\|A\|_p(t)$, welche Operatornorm in Bezug auf $\mathbf{D}^{(n)}$ genannt wird, derart gibt, dass für jedes $x \in \mathbf{D}^{(n)}$ die Ungleichung

(10) $$\|Ax\|_p \leqq \|A\|_p \,.\, \|x\|_n$$

gilt, wobei $\|A\|_p$ ihrem Wertevorrat nach aus aller möglichen die kleinste ist. Für die Operatornorm kann folgende Abschätzung bewiesen werden (vergl. [2]):

Satz 2. *Der Operator A sei auf $\mathbf{D}^{(n)}$ durch die Gleichung*

(11) $$Ax = \{ax^{(-n)} + [Wx^{(-n)}]\}^{(p)}, \quad p \geqq 0$$

definiert; dann gilt

(12) $$\|A\|_p \leqq \|a\| + \int_0^t \|W\| \,\mathrm{d}\tau,$$

wo $\|a\| = \max\limits_{0 \leqq \tau \leqq t} |a(\tau)|$, $\|W\| = \max\limits_{0 \leqq \tau \leqq t} |W(t, \tau)|$ *gesetzt wurde.*

Beispiel: Wenn A auf $\mathbf{D}^{(1)}$ durch $Ax = \{e^{-t}x^{(-1)} + [(t - 3\tau)\, x^{(-1)}]\}''$ definiert ist, so bekommt man $\|\exp(-t)\| = 1$, $\|(t - 3\tau)\| = 2t$, woraus laut Gl. (12) $\|A\|_2 \leqq 1 + \int_0^t 2\tau \,\mathrm{d}\tau = 1 + t^2$ folgt. Nach (10) gilt also $\|Ax\|_2 \leqq (1 + t^2)\, \|x\|_1$ für jedes $x \in \mathbf{D}^{(1)}$.

Für unsere Zwecke wird wichtig sein, die Norm der Differenz zweier inversen Operatoren abschätzen zu können. Da gilt folgender Satz (vergl. [2]):

Satz 3. *Die Operatoren $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}^*$ seien auf $\mathbf{D}^{(n)}$ durch die Gleichung*

(13) $$A_i x = \{a_i(x^{(-n)} + [W_i x^{(-n)}])\}^{(p)}, \quad p \geqq 0, \quad i = 1, 2$$

definiert; dann gilt

(14) $$\|A_1^{-1} - A_2^{-1}\|_n \leqq$$
$$\leqq (\|a_1^{-1} - a_2^{-1}\| + \|a_{1,2}^{-1}\| \int_0^t \|W_1 - W_2\| \,\mathrm{d}\tau \,.\, \exp \int_0^t \|W_{1,2}\| \,\mathrm{d}\tau) \,.\, \exp \int_0^t \|W_{2,1}\| \,\mathrm{d}\tau$$

(*es gilt entweder der erste oder der zweite Index*), *wobei*

$$\|a\| = \max_{0 \leqq \tau \leqq t} |a(\tau)|, \quad \|W\| = \max_{0 \leqq \tau \leqq t} |W(t, \tau)| \quad ist.$$

Die Bedeutung des eben ausgesprochenen Satzes besteht offensichtlich darin, dass er es gestattet, die Norm der Differenz von Operatoren A_1^{-1}, A_2^{-1}, welche selbst im Allgemeinen mühsam feststellbar sind, direkt auf Grund der gegebenen Operatoren A_1, A_2 zu ermitteln.

Für die Norm des Operatorenproduktes kann man folgende Behauptung beweisen:

Es seien $A, B \in \mathfrak{A}$; ferner sei $\|B\|_p$ die Norm in Bezug auf $\mathbf{D}^{(n)}$ (d. h. dass $\|Bx\|_p \leqq \leqq \|B\|_p \cdot \|x\|_n$ gilt), $\|A\|_r$ die Norm in Bezug auf $\mathbf{D}^{(p)}$. Für die Norm $\|AB\|_r$ in Bezug auf $\mathbf{D}^{(n)}$ gilt dann

$$\|AB\|_r \leqq \|A\|_r \, \|B\|_p \, . \tag{15}$$

Wenden wir jetzt wieder die Aufmerksamkeit der Feststellung der angenäherten Spannung im Stromkreise zu, und stellen wir auf Grund der eben angegebenen Tatsachen die Fehlerabschätzung fest! Aus den Gleichungen (5) und (6) folgt

$$u - \bar{u} = A^{-1}\{(A^{-1} + A_n^{-1})^{-1} - (Z_0 + A_n^{-1})^{-1}\}\, e^* \, . \tag{16}$$

Wenn jetzt die Operatoren $A^{-1} + A_n^{-1}$, $Z_0 + A_n^{-1}$ dieselbe Ordnung ϱ besitzen, so seien die entsprechenden inversen Operatoren normiert in Bezug auf $\mathbf{D}^{(m)}$, wo $m = \max\,[\varrho, r(e^*), 0]$ ist, und A^{-1} sei normiert in Bezug auf $\mathbf{D}^{(m-\rho)}$. (Offensichtlich gilt $m - \varrho \geqq 0$.) Laut Gl. (10) und (15) gilt dann

$$\|u - \bar{u}\|_p \leqq \|A^{-1}\|_p \, . \, \|(A^{-1} + A_n^{-1})^{-1} - (Z_0 + A_n^{-1})^{-1}\|_{m-\varrho} \cdot \|e^*\|_m \, . \tag{17}$$

Ferner ist klar, dass die Operatoren $A^{-1} + A_n^{-1}$, $Z_0 + A_n^{-1}$ auf dem Systeme $\mathbf{D}^{(m-\rho)}$ die Repräsentation (9) mit nichtverschwindendem a gestatten, da $(m - \varrho) + \varrho \geqq 0$ ist. Hieraus folgt, dass dann Satz 3 anwendbar ist, sodass $\|(A^{-1} + A_n^{-1})^{-1} - - (Z_0 + A_n^{-1})^{-1}\|_{m-\varrho}$ direkt auf Grund von Operatoren $A^{-1} + A_n^{-1}$, $Z_0 + A_n^{-1}$ festgestellt werden kann. Macht man schliesslich für $\|A^{-1}\|_p$ von dem Satze 2 Gebrauch, ist damit die Abschätzung für $\|u - \bar{u}\|_p$ vollkommen ermittelt.

Bevor ein Zahlenbeispiel gelöst wird, seien noch ergänzend einige brauchbare Eigenschaften der Heavisideschen Operatoren kurz erwähnt. Die wichtigste ihrer Eigenschaften besteht darin, dass sie nach ihrem Produkte kommutativ sind. (Vergl. [1], Satz 34.) Diese Tatsache hat zur Folge, dass sie als rationale Funktionen des Operators D (der durch $Dx = x'$ definiert ist) behandelt werden können. Es gilt also z. B. $(D + 1)^{-1}(2D + 3) = (2D + 3)(D + 1)^{-1}$, sodass man den entsprechenden Operator einfach in der Form des Bruches $(2D + 3)/(D + 1)$ schreiben kann. Diese Tatsache, vom praktischen Standpunkte aus gesehen, ermöglicht es, die Operatoren A_n, Z_0 usw. in formal gleicher Weise festzustellen, wie es für die komplexe Frequenz „p“ üblich ist.

Ausserdem ist der Umstand von Bedeutung, dass für die Heavisideschen Operatoren die Partialbruchzerlegung gültig bleibt; dieses mit den nachfolgenden Formeln (18) ermöglicht, dass jeder solcher Operator bequem auf die Form (9) gebracht werden kann:

(18) $$(D + \alpha)^{-1} x = [\{\exp(-\alpha(t - \tau))\} x],$$

$$\frac{a(D + \alpha) + b\omega}{(D + \alpha)^2 + \omega^2} x = [(\{a \cos \omega(t - \tau) + b \sin \omega(t - \tau)\} \exp(-\alpha(t - \tau))) x].$$

Zuletzt sei ein einfaches Zahlenbeispiel, an dem die Anwendung aller Resultate ersichtlich wird, gelöst.

Beispiel: Der Stromkreis von Abb. 2, welcher die Ersatzschaltung für die Gittermodulation darstellt, sei durch die EMK e erregt; man soll die auf dem Schwing-

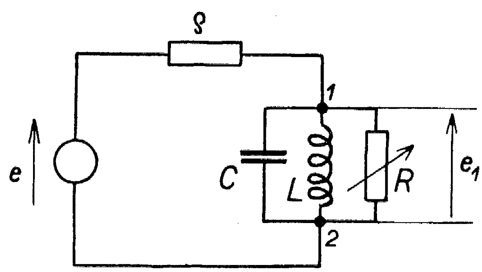

Abb. 2.

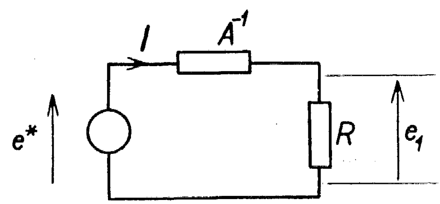

Abb. 3.

kreise herrschende Spannung e_1 ermitteln. Dabei sei vorausgesetzt, dass 1) der Stromkreis für $t < 0$ energielos war, 2) die Distribution e regulär ist, 3) die Elemente $\varrho, L, C > 0$ konstant sind und dass $R = R_0(1 + \varepsilon\psi(t))$ ist, wobei $R_0 \neq 0$, $0 \leqq \varepsilon < 1$ gilt, und wo $\psi(t)$ eine glatte Funktion, welche der Ungleichung $|\psi(t)| \leqq 1$ genügt, darstellt. (Offenbar stellt $\psi(t)$ die Wirkung des Modulationssignals dar.)

Um e_1 zu bestimmen, gehen wir von dem Théveninschen Satze aus. Zuerst stellt man die auf dem Schwingkreise herrschende Leerlaufspannung e^* (d. h. wenn der veränderliche Widerstand R entfernt ist) fest; diese ergibt sich von dem Impedanzenverhältnis folgendermassen:

(19) $$e^* = \frac{\dfrac{LD}{1 + LCD^2}}{\varrho + \dfrac{LD}{1 + LCD^2}} e = \frac{LD}{\varrho LCD^2 + LD + \varrho} e = He.$$

Für die Admittanz A des Zweipols zwischen den Knoten 1, 2 (R entfernt) bekommt man

(20) $$A = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{LD} + CD = \frac{\varrho LCD^2 + LD + \varrho}{\varrho LD}.$$

Es ist klar, dass die Voraussetzungen des Théveninschen Satzes erfüllt sind; tatsächlich, A sowie R sind reguläre Operatoren, und gleichzeitig ist $A + R^{-1} = CD + (1/\varrho + 1/R) + 1/LD$, was einen regulären Operator darstellt (vergl. [1], Satz 28).

Für die äquivalente Schaltung (siehe Abb. 3) gilt also

$$e_1 = RI\,, \quad I = (R + A^{-1})^{-1}\, e^*\,,$$

sodass

$$e_1 = R(R + A^{-1})^{-1}\, He \tag{21}$$

gilt. Für die angenäherte Spannung $\bar{e}_1$ sei gesetzt

$$\bar{e}_1 = R(R_0 + A^{-1})^{-1}\, He\,, \tag{22}$$

woraus die Gleichung

$$e_1 - \bar{e}_1 = R\{(R + A^{-1})^{-1} - (R_0 + A^{-1})^{-1}\}\,.\, He \tag{23}$$

folgt. Durch Einsetzen aus (20), (19) bekommt man für $\bar{e}_1$:

$$\bar{e}_1 = R\left(R_0 + \frac{\varrho LD}{\varrho LCD^2 + LD + \varrho}\right)^{-1} . \frac{LD}{\varrho LCD^2 + LD + \varrho}\, e = $$
$$= R\, \frac{LD}{R_0 \varrho LCD^2 + L(\varrho + R_0)\, D + R_0 \varrho}\, e\,.$$

Macht man jetzt von der Formel (18) Gebrauch und beachtet man, dass e eine reguläre Distribution ist (vergl. [1], Satz 6), so bekommt man unmittelbar

$$\bar{e}_1 = (1 + \varepsilon\psi(t)) \int_0^t e^{-\xi(t-\tau)} \left\{\frac{1}{\varrho C} \cos \omega_0\,(t - \tau) - \frac{\varrho + R_0}{2R_0 \varrho^2 C^2 \omega_0} \sin \omega_0(t - \tau)\right\} e(\tau)\, d\tau\,,$$

wo $\xi = (\varrho + R_0)/2R_0\varrho C$, $\omega_0 = \{L^{-1}C^{-1} - (\varrho + R_0)^2\,(2R_0\varrho C)^{-2}\}^{\frac{1}{2}}$ gesetzt wurde.

Stellen wir schliesslich die Fehlerabschätzung fest! Aus Gl. (19) folgt, dass $r(e^*) \leqq 0$ ist; ferner ist klar, dass die Operatoren $R + A^{-1}$, $R_0 + A^{-1}$ dieselbe Ordnung 0 besitzen, sodass alle in Betracht kommenden Operatoren in Bezug auf $\mathbf{D}^{(0)}$ normiert werden können.

Laut Formel (18) bekommt man

$$(R + A^{-1})\, x = Rx + [Wx]\,, \quad (R_0 + A^{-1})\, x = R_0 x + [Wx]\,, \tag{24}$$

$$W(t, \tau) = \left\{\frac{1}{C} \cos \Omega(t - \tau) - \frac{1}{2\varrho C^2 \Omega} \sin \Omega(t - \tau)\right\} \exp\left(-\eta(t - \tau)\right), \tag{25}$$

wo $\eta = 1/2\varrho C$, $\Omega = (L^{-1}C^{-1} - (2\varrho C)^{-2})^{\frac{1}{2}}$ gesetzt wurde.

Im Sinne des Satzes 3 sei $a_1 = R$, $a_2 = R_0$, $W_1 = R^{-1}(t)\, W(t, \tau)$, $W_2 = R_0^{-1} W(t, \tau)$. Hieraus folgt $\|a_2^{-1}\| = |R_0^{-1}|$ und

$$\|a_1^{-1} - a_2^{-1}\| = \max_{0 \leqq \tau \leqq t} |R_0^{-1}(1 + \varepsilon\psi(\tau))^{-1} - R_0^{-1}| \leqq \varepsilon/|R_0|(1 - \varepsilon)\,.$$

Ferner gilt

$$\|W_1\| = \max_{0 \leq \tau \leq t} \left| \frac{1}{R_0(1 + \varepsilon\psi(t))} \left\{ \frac{1}{C} \cos \Omega(t - \tau) - \frac{1}{2\varrho C^2 \Omega} \sin \Omega(t - \tau) \right\} e^{-\eta(t-\tau)} \right| \leqq$$
$$\leqq |R_0^{-1}|(1 - \varepsilon)^{-1} K ,$$

wo

$$K = \left(\frac{1}{C^2} + \frac{1}{4\varrho^2 C^4 \Omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 2\varrho(4\varrho^2 C^2 - LC)^{-\frac{1}{2}}$$

gesetzt wurde.

Ganz gleich belkommt man

$$\|W_2\| \leqq |R_0^{-1}| K , \quad \|W_1 - W_2\| \leqq \varepsilon |R_0^{-1}|(1 - \varepsilon)^{-1} K .$$

Laut Ungleichung (14) gilt also

(26)

$$\|(R + A^{-1})^{-1} - (R_0 + A^{-1})^{-1}\|_0 \leqq \frac{\varepsilon}{|R_0|(1 - \varepsilon)} \left(1 + \frac{Kt}{|R_0|} \exp \frac{Kt}{|R_0|} \right) \exp \frac{Kt}{|R_0|(1 - \varepsilon)} .$$

Für den durch Gl. (19) definierten Operator H gilt $Hx = [(W/\varrho)\, x]$; laut Satz 2 gilt also $\|H\|_0 \leqq \int_0^t \|W/\varrho\| \, d\tau \leqq Kt/\varrho$. Aus demselben Satze folgt ferner $\|R\|_0 \leqq \leqq |R_0|(1 + \varepsilon)$.

Macht man schliesslich von Gl. (23) und (15) Gebrauch, so bekommt man

$$\|e_1 - \bar{e}_1\|_0 \leqq \|R\|_0 \cdot \|(R + A^{-1})^{-1} - (R_0 + A^{-1})^{-1}\|_0 \cdot \|H\|_0 \cdot \|e\|_0 .$$

Durch Einsetzen der gewonnenen Abschätzungen ergibt sich zuletzt

$$\|e_1 - \bar{e}_1\|_0 \leqq \varepsilon \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \left\{ 1 + \frac{Kt}{|R_0|} \exp \frac{Kt}{|R_0|} \right\} \frac{Kt}{\varrho} \exp \frac{Kt}{|R_0|(1 - \varepsilon)} \cdot \|e\|_0 .$$

Literatur

[1] *Doležal V.:* Über die Anwendung von Operatoren in der Theorie der linearen dynamischen Systeme, Aplikace matem., 1961, No 1.

[2] *Doležal V.:* O jistých lineárních operátorech, Čas. pro pěst., matem., 1962, No 2.

Výtah

ZOBECNĚNÁ THÉVENINOVA VĚTA A JEJÍ POUŽITÍ

VÁCLAV DOLEŽAL

Článek je věnován zobecnění Théveninovy věty na parametrické soustavy. V prvé části je ukázáno, že za jistých, dosti slabých předpokladů, platí tvrzení klasické Théveninovy věty i pro lineární dynamické soustavy s časově proměnnými prvky. Ve druhé části je věta využita ke stanovení přibližné odezvy soustavy, a je odvozen odhad chyby. Závěrem je použití výsledků ilustrováno na vyšetření obvodu mřížkové modulace.

Резюме

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА ТЕВЭНЭНА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ВАЦЛАВ ДОЛЕЖАЛ (Václav Doležal)

Статья посвящена обобщению теоремы Тевэнэна для параметрических систем. В первой части показано, что при определенных, довольно слабых предположениях классическая теорема Тевэнэна справедлива и для линейных динамических систем с элементами, переменными во времени. Во второй части эта теорема применяется к установлению приближенного отклика системы, и выводится оценка погрешности. В заключение иллюстрируется применение полученных результатов на исследовании схемы модуляции сетки.

Adresa autora: Ing. *Václav Doležal* C. Sc., Matematický ústav ČSAV, Praha 1, Žitná 25.