Ilja Černý

Zavedení souřadného systému pozorovatele a odvození Lorentzových transformací

Aplikace matematiky, Vol. 7 (1962), No. 2, 84–103

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102792

ZAVEDENÍ SOUŘADNÉHO SYSTÉMU POZOROVATELE A ODVOZENÍ LORENTZOVÝCH TRANSFORMACÍ

ILJA ČERNÝ

(Došlo dne 10. května 1961.)

Je podáno dvanáct postulátů, které stačí k sestrojení souřadného systému pozorovatelů a k odvození Lorentzových transformací.

Speciální teorie relativity s sebou přinesla nové názory na prostor a čas, nové zásady měření prostorových vzdáleností a časových intervalů a nové vztahy mezi popisy „prostoročasových událostí“ v souřadných systémech, kterých užívají jednotliví „pozorovatelé“.

Zdá se mi nutné stavět teorii, která tak hluboko zasáhla do tradičních představ o prostoru a času, zcela od začátku, bez logických mezer, bez definic kruhem a také bez neodůvodněných matematických předpokladů. Je třeba popsat, jakým způsobem zavádí „pozorovatel“ svůj „souřadný systém“, vytknout, které fysikální předpoklady činí a na základě jakých fysikálních postulátů dojdou pozorovatelé k transformačním rovnicím, umožňujícím přechod od popisu v jednom souřadném systému k popisu ve druhém souřadném systému.

Pokud je mi známo, není to v literatuře nikde uspokojivě provedeno. Zavedení souřadného systému pozorovatele se obyčejně přejde velmi rychle nejasnými a kusými poznámkami, ačkoli se jedná o nutný základ dalšího vyšetřování. Často se ještě před zavedením souřadnic mluví o tom, že rychlost světla je konstantní, ačkoli pojem rychlosti je závislý na prostoročasových měřeních, tj. na konstrukci a na vlastnostech souřadného systému. Takový postup, v němž jsou obsaženy definice kruhem, je přirozeně pro kritického čtenáře z logického hlediska nepřijatelný.

Další potíže se potkávají při důkazu, že transformační rovnice jednoho souřadného systému na druhý jsou za určitých předpokladů lineární. Buď mlčky nebo výslovně se činí zbytečně silné matematické předpoklady; i v dobrých učebnicích se leckdy najdou hrubé matematické chyby (tj. nejen že se občas zamlčí některé předpoklady, ale užívá se dokonce i nesprávných tvrzení).

V článku jsem se pokusil o vybudování těchto základů speciální teorie relativity, které by uvedené nedostatky nemělo. Nesnažil jsem se dosáhnout formální dokonalosti, kterou by vyžadoval odborník v matematické logice. Mým cílem bylo zachytit podstatné věci ve formě, která by byla přístupná každému, kdo se o tuto část vědy zajímal.

Pro větší přehled a srozumitelnost jsem k vlastnímu textu připojil vysvětlivky, které mají věc přiblížit k názoru; k samé logické výstavbě nejsou potřebné a také se jich nikde neužívá. Někdy v nich předbíhám logické výstavbě, abych ukázal, k čemu směřuji. Tyto vysvětlivky jsou obsaženy v lomených závorkách. Postuláty, které považuji za potřebné k výstavbě základů teorie, jsou číslovány římskými číslicemi.

Přistoupíme nyní k vlastní látce. Základními pojmy, které nedefinujeme, jsou: *pozorovatel, signál, vyslání signálu pozorovatelem, přijetí signálu pozorovatelem.*

I. Předpokládáme, že *systém I všech pozorovatelů je neprázdný, přičemž každému pozorovateli $P \in I$ je přiřazena:*

1) *množina všech reálných čísel $E_1(P)$;*

2) *množina $U(P) = E_1 \times \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$, v níž je zavedeno ztotožnění dvojic (φ, ϑ) takto: $(\varphi_1, \vartheta_1) = (\varphi_2, \vartheta_2)$, je-li buď $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \pm \frac{1}{2}\pi$ nebo je-li $\varphi_2 - \varphi_1$ celým násobkem 2π;*

3) *kladná konstanta c (nezávislá na pozorovateli).*

Množinu $E_1(P)$ nazýváme *časovou škálou* pozorovatele P, její body *okamžiky*; množinu $U(P)$ můžeme nazvat např. *škálou úhlů.*

[U některých z uvedených pojmů je jistě patrné, jaké názorné představy s nimi spojíme: pozorovatel je opatřen „hodinami", které zaznamenávají čas od $-\infty$ do $+\infty$; každý pozorovatel rozeznává v bodě, který je jeho stanovištěm, směry v prostoru. Tyto směry lze matematicky popsat dvojicemi $(\varphi, \vartheta) \in U(P)$; představujeme-li si (φ, ϑ) jako polární souřadnice bodů na jednotkové kouli v E_3, vidíme příčiny ztotožnění některých dvojic z $U(P)$. „Vyslání signálu" je idealisací vyslání krátkého elektromagnetického signálu v určitém směru.

Později – až pozorovatelé zkonstruují své souřadné systémy – se ukáže, že konstanta c je rychlost signálů v jejich systémech. Systém I je systém pozorovatelů, jejichž souřadné systémy budou „inerciální"; jedním ze základních předpokladů speciální teorie relativity je, že pro všechny takové pozorovatele je rychlost signálů (rovná rychlosti světla) táž. „Pozorovatel" není vlastně ničím jiným než počátkem příslušného inerciálního souřadného systému.

Zatím – před zkonstruováním souřadných systémů – však nelze formulovat ani co je rychlost ani co je inerciální systém souřadný; v důsledku toho je c zatím pouhým číslem bez viditelného fysikálního významu, které je jedním z prostředků ke konstrukci souřadných systémů.]

II. Předpokládejme dále, že *každému signálu S, vyslanému resp. přijatému pozorovatelem P, je jednoznačně přiřazena trojice (t, φ, ϑ), kde $t \in E_1(P)$, $(\varphi, \vartheta) \in U(P)$: okamžik t vyslání resp. přijetí signálu a směr (φ, ϑ) signálu.*

Signál S, který buď vysílá nebo přijímá pozorovatel P a jemuž je přiřazena trojice (t, φ, ϑ), označíme podrobněji $S^P(t, \varphi, \vartheta)$.

III. *Každému $t \in E_1(P)$ buď přiřazen systém vyslaných signálů*

$$\{S^P(t, \varphi, \vartheta)\}_{(\varphi,\vartheta)\in U(P)}\,.$$

[Tento předpoklad odpovídá tomu, že P má možnost vyslat v libovolném okamžiku signály „na všechny strany".]

IV. Předpokládejme, že *je-li $\bar{P} \in I$ další pozorovatel, je každému systému $\{S^P(T, \varphi, \vartheta)\}_{(\varphi,\vartheta)\in U(P)}$ vyslaných signálů* (T probíhá $E_1(P)$) *přiřazen právě jeden přijatý signál $S^P(\alpha(T), -\varphi^*(T), -\vartheta^*(T))$, kde $T \leqq \alpha(T) \in E_1(P)$, $(\varphi^*(T), \vartheta^*(T)) \in \in U(P)$.*

[Tento signál můžeme nazvat *ozvěnou* signálů $\{S^P(T, \varphi, \vartheta)\}_{(\varphi,\vartheta)\in U(P)}$.]

V. Předpokládejme, že *funkce α* (závislá na pozorovatelích P, $\bar{P}$ a definovaná na celé časové škále $E_1(P)$) *je spojitá a rostoucí v $E_1(P)$.*

Definujeme-li pak t vztahem

$$t = t(T) = \tfrac{1}{2}(T + \alpha(T))\,, \tag{1}$$

je t zřejmě spojitá a rostoucí funkce, zobrazující $E_1(P)$ na sebe; t tedy určuje jednoznačně příslušné $T = T(t)$. (Označení t a T ponecháme až do konce.)

Definujme dále:

$$r(t) = \frac{c}{2}(\alpha(T) - T)\,, \quad \varphi(t) = \varphi^*(T)\,, \quad \vartheta(t) = \vartheta^*(T)\,. \tag{2}$$

Budeme říkat, že *trojice funkcí* $(r(t), \varphi(t), \vartheta(t))$ (kde t probíhá $E_1(P)$) *popisuje světočáru $\bar{P}$ vzhledem k P v polárních souřadnicích.*

Buď konečně

$$\begin{aligned} x_1(t) &= r(t) \cos \varphi(t) \cos \vartheta(t)\,, \\ x_2(t) &= r(t) \sin \varphi(t) \cos \vartheta(t)\,, \\ x_3(t) &= r(t) \sin \vartheta(t)\,; \end{aligned} \tag{3}$$

budeme říkat, že *trojice funkcí $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ popisuje světočáru $\bar{P}$ vzhledem k P v kartézských souřadnicích.* Místo trojice reálných funkcí $x_j(t)$ budeme často psát vektorovou funkci $x(t)$.

Světočarou pozorovatele $\bar{P}$ rozumíme množinu všech bodů z E_4 tvaru $(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, kde $t \in E_1(P)$.

[Pozorovatel P zjišťuje polohu pozorovatele $\bar{P}$ způsobem, který můžeme nazvat radiolokací. Nepotřebuje k tomu nic jiného než „hodiny" na svém stanovišti, rozeznávání směrů (také pouze na svém stanovišti) a aparaturu, která zachycuje „ozvěny" vyslaných signálů, které vznikly odrazem vyslaných signálů od $\bar{P}$. Na základě časového intervalu, který uplyne mezi vysláním signálů a přijetí ozvěny a na základě konstanty c definuje P vzdálenost $\bar{P}$.

V tom je matematicky zahrnut i případ, že $\bar{P}$ splývá v jistém okamžiku T s P — pak je $\alpha(T) = T$ a $r = 0$, na φ, ϑ nezáleží.

Spojitost funkce α má zhruba řečeno tento názorný význam: vyšle-li P signály „rychle za sebou", nalezne vzdálenost $\bar{P}$ „téměř nezměněnou". Hlubším předpokladem jest, že α je rostoucí funkcí; později se ukáže, že tento předpoklad znamená, že každý pozorovatel $\bar{P}$ má vzhledem k P skalární rychlost menší než c.

Termíny „polární souřadnice" a „kartézské souřadnice" je třeba na tomto místě z logického hlediska chápat jako pouhé názvy. Ukazuje se ovšem, že požadavky, které budeme v dalším klást, odpovídají poznatkům, ke kterým se došlo pokusy a měřeními a které ukazují, že prostor, v němž žijeme, má geometrické vlastnosti eukleidovského prostoru. Platnost eukleidovské geometrie ve „skutečném" prostoru je třeba chápat jako zkušenostmi ověřenou pracovní hypothesu, která umožňuje převést některé poznatky fysikální do matematické řeči. Zavedením ještě dalších postulátů, formulovaných pomocí fysikálních pojmů, vytvoříme matematický obraz „skutečného" prostoru; v tomto prostoru budou zavedené souřadnice skutečně „polárními" resp. „kartézskými" souřadnicemi. (Mám ovšem na mysli prostor, v němž pracuje speciální teorie relativity, tj. prostor bez gravitace. Prostor, v němž je rozložena hmota, nemá patrně vlastnosti eukleidovského prostoru a speciální teorii relativity je třeba chápat jako pouhou aproximaci skutečného stavu — aproximaci ovšem v mnoha směrech lepší než je aproximace založená na předrelativistických ideách.)]

Průměrnou rychlost pozorovatele $\bar{P}$ vzhledem k P v intervalu $\langle t_1, t_2\rangle$ definujme jako vektor

$$(4)\qquad \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \left(\frac{x_1(t_2) - x_1(t_1)}{t_2 - t_1}, \frac{x_2(t_2) - x_2(t_1)}{t_2 - t_1}, \frac{x_3(t_2) - x_3(t_1)}{t_2 - t_1}\right),$$

okamžitou rychlost (v čase t) jako vektor

$$(5)\qquad x'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t)),$$

existují-li ovšem napsané derivace. *Skalární rychlost* nechť je norma příslušné vektorové rychlosti, tj. odmocnina ze součtu čtverců jednotlivých složek vektorové rychlosti.

VI. Předpokládejme, že *signály se pohybují rovnoměrně a přímočaře se skalární rychlostí nezávislou na směru a na pozorovateli (takže světočára signálu je popsána lineárními funkcemi $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$).* Předpokládejme dále, že *přiřazení signálu $S^P(\alpha(T), -\varphi^*(T), -\vartheta^*(T))$ systému $\{S^P(T, \varphi, \vartheta)\}_{(\varphi,\vartheta)\in U(P)}$, o němž se jedná v postulátu IV, se uskutečňuje takto: Právě jeden ze signálů systému dospěje v určitém okamžiku t' do bodu $x(t)$ (v němž je $\bar{P}$ v čase t) a má za následek vyslání signálu v témže okamžiku t' (vzhledem k P), který P přijme v okamžiku $\alpha(T)$.*

Vzhledem k tomu, že podle předpokladu je rychlost signálu vyslaného i přijatého táž, je $t' = \frac{1}{2}(T + \alpha(T)) = t$. Rychlost signálu je pak rovna podílu vzdálenosti $r(t) = \frac{1}{2}c(\alpha(T) - T)$ pozorovatelů P, $\bar{P}$ a příslušného času $\frac{1}{2}(\alpha(T) - T)$, tedy c.

[Tím je formulován jeden ze základních postulátů speciální teorie relativity: přímočarost šíření se signálů a jejich konstantní rychlost, nezávislá na inerciálním pozorovateli. Jak jsem již poznamenal, nelze tento postulát formulovat před zavedením souřadného systému a před zavedením rychlosti.]

Označení: Pišme $\bar{P} \in K(P)$, jestliže rychlost pozorovatele $\bar{P}$ vzhledem k pozorovateli P je vektor identicky rovný nule (tj. jestliže $\bar{P}$ je v klidu vzhledem k P). Pišme $\bar{P} \in R(P)$, jestliže rychlost pozorovatele $\bar{P}$ vzhledem k pozorovateli P je vektor konstantní (tj. jestliže $\bar{P}$ se vzhledem k P pohybuje rovnoměrně a přímočaře).

VII. Předpokládejme, že *je-li $\bar{P} \in K(P)$, má každý pozorovatel $Q \in R(P)$ touž skalární rychlost vzhledem k P i vzhledem k $\bar{P}$.*

[Každý pozorovatel má svůj způsob měření prostorových vzdáleností a časových intervalů. Je třeba ovšem mezi nimi zavést nějaké vztahy, a to takové, které by odpovídaly zkušenostem. Prvním z nich byla nezávislost skalární rychlosti signálů na pozorovateli a přímočarost jejich pohybu. Postulát VII formuluje další vztah mezi prostorovými a časovými měřítky různých pozorovatelů. Spolu s postuláty, které ještě v dalším vyslovíme, povedou tyto požadavky jednoznačně k transformačním rovnicím mezi souřadnými systémy libovolných dvou pozorovatelů z I.]

Dokažme toto tvrzení: *Skalární rychlost každého pozorovatele $Q \in R(P)$ vzhledem k pozorovateli P je menší než c.*

Důkaz. Protože skalární rychlost pozorovatele Q je táž pro všechny pozorovatele z $K(P)$, lze bez újmy obecnosti předpokládat, že světočáry pozorovatelů P a Q se protínají, t. j. že světočára Q vzhledem k P je v polárních souřadnicích popsána trojicí funkcí $r(t)$, $\varphi(t) =$ konst., $\vartheta(t) =$ konst.

Užíváme ovšem také tohoto postulátu: *Je-li t předepsaný okamžik z $E_1(P)$, (x_1, x_2, x_3) předepsaná poloha v E_3, existuje pozorovatel $\bar{P} \in K(P)$, jehož kartézské souřadnice vzhledem k P v čase t jsou x_1, x_2, x_3.*

Buď $t_1 < t_2$; čtverec průměrné skalární rychlosti Q vzhledem k P v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ je pak roven

$$
(6) \quad \left(\frac{x_1(t_2) - x_1(t_1)}{t_2 - t_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2(t_2) - x_2(t_1)}{t_2 - t_1}\right)^2 + \left(\frac{x_3(t_2) - x_3(t_1)}{t_2 - t_1}\right)^2 =
$$

$$
= \left(\frac{r(t_2) - r(t_1)}{t_2 - t_1}\right)^2 = c^2 \left(\frac{(\alpha(T_2) - \alpha(T_1)) - (T_2 - T_1)}{(\alpha(T_2) - \alpha(T_1)) + (T_2 - T_1)}\right)^2 ;
$$

přitom T_1, T_2 souvisí s t_1, t_2 tak, jak jsme popsali u vztahu (1). Protože $t_1 < t_2$, je $T_1 < T_2$, tedy i $\alpha(T_1) < \alpha(T_2)$. Protože v posledním zlomku je v čitateli rozdíl dvou kladných čísel, ve jmenovateli jejich součet, je tento zlomek v absolutní hodnotě menší než 1; skalární rychlost Q vzhledem k P je tedy skutečně menší než c.

Poznámka. Předcházející tvrzení je důsledkem předpokladu, že α je rostoucí funkcí. Pomocí stejné úvahy dokážeme, že kdyby existovaly okamžiky $T_1 < T_2$, pro něž by bylo $\alpha(T_1) \geqq \alpha(T_2)$, byla by skalární rychlost Q vzhledem k P v příslušném intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ větší nebo rovna c – pokud by ovšem poslední zlomek v (6) měl vůbec smysl (tj. pokud by v jeho jmenovateli nebyla nula). Odtud je vidět fysikální význam postulátu V.

Postulát vyslovený a užitý v důkazu předešlého tvrzení zobecníme takto:

VIII. Předpokládejme, že *je-li t předepsaný okamžik z $E_1(P)$, (x_1, x_2, x_3) předepsaná poloha v E_3, (v_1, v_2, v_3) předepsaná rychlost s podmínkou $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 < c^2$, existuje pozorovatel $\bar{P} \in R(P)$, který má v čase t vzhledem k P polohu (x_1, x_2, x_3) a (konstantní) rychlost (v_1, v_2, v_3).*

Z posledního postulátu (dokonce již z postulátu formulovaného v důkazu posledního tvrzení) plyne, že *množina všech čtveřic (t, x_1, x_2, x_3), k nimž každý pozorovatel P dojde svými měřeními, je celý aritmetický prostor E_4*; označme jej podrobněji $E_4(P)$. Body z $E_4(P)$ nazývejme *událostmi*.

Další dva postuláty budou tyto:

IX. *Pro každého pozorovatele $P \in I$ nechť je $I = R(P)$.*

X. *Pro každé dva pozorovatele P, $\bar{P}$ z I nechť existuje prosté zobrazení $F^{P\bar{P}}$ prostoru $E_4(P)$ na $E_4(\bar{P})$ tak, že je-li M světočára libovolného pozorovatele $Q \in I$ v systému souřadnic pozorovatele P, je $F^{P\bar{P}}(M)$ světočára Q v systému souřadnic pozorovatele $\bar{P}$.*

[Prostota zobrazení $F^{P\bar{P}}$ má ten význam, že pojem „různé události" (a ovšem také „totožné události") je nezávislý na pozorovateli $P \in I$. Podmínka $F^{P\bar{P}}(E_4(P)) = E_4(\bar{P})$ znamená, že množiny událostí, které mohou popsat pozorovatelé P a $\bar{P}$, jsou identické.]

Postuláty VIII a IX ukazují mimo jiné, že množina světočar všech pozorovatelů $\bar{P} \in I$ v kartézských souřadnicích libovolného pozorovatele $P \in I$ je identická s množinou $\mathfrak{M}(P)$ všech přímek v $E_4(P)$ s popisem

$$x_j = v_j t + A_j \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, 3\,, \quad t \in E_1(P)\,, \tag{7}$$

kde $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 < c^2$ a kde radiusvektor (A_1, A_2, A_3) pozorovatele $\bar{P}$ vzhledem k P v čase $t = 0$ je libovolný.

V článku [5] je dokázána věta, která je zobecněním tohoto tvrzení:

Je-li F prosté zobrazení E_4 na E_4, které převádí každou přímku z $\mathfrak{M}(P)$ opět v přímku, je F lineární.

Podle dosud vyslovených postulátů $F^{P\bar{P}}$ tyto předpoklady splňuje, takže je *lineární*. Nechť je tato transformace dána vztahy:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= a_{00} t + \sum_{k=1}^{3} a_{0k} x_k + b_0\,, \\ \bar{x}_j &= a_{j0} t + \sum_{k=1}^{3} a_{jk} x_k + b_j \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, 3\,, \end{aligned} \tag{8}$$

kde a_{jk}, b_j jsou reálná čísla.

Zaveďme pro zjednodušení pomocného pozorovatele $\tilde{P}$, jehož souřadnice $\tilde{t}$, $\tilde{x}_j$ jsou se souřadnicemi $\bar{t}$, $\bar{x}_j$ pozorovatele $\bar{P}$ vázány vztahy

$$\tilde{t} = \bar{t} - b_0\,, \quad \tilde{x}_j = \bar{x}_j - b_j \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, 3\,. \tag{9}$$

Pak je zřejmě $\tilde{P} \in K(P)$ a počátky $E_4(P)$ a $E_4(\tilde{P})$ si při transformaci $F^{P\tilde{P}}$ odpovídají.

Označme

$$(10) \qquad \varphi(t, x_1, x_2, x_3) = c^2t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\,,$$

$$(11) \qquad \tilde{\varphi}(\tilde{t}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = c^2\tilde{t}^2 - \tilde{x}_1^2 - \tilde{x}_2^2 - \tilde{x}_3^2\,.$$

Světočáry signálů vyslaných v čase $t = \tilde{t} = 0$ z bodu $(0, 0, 0)$ (který je v tomto okamžiku týž pro oba pozorovatele P, $\tilde{P}$) jsou popsány vztahy

$$(12) \qquad \varphi(t, x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \text{resp.} \quad \tilde{\varphi}(\tilde{t}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = 0\,,$$

které jsou v důsledku toho logicky ekvivalentní.

Dosaďme za $\tilde{t}$ a $\tilde{x}_j$ do formy (11) podle (9) a (8) a vzniklou formu označme $\psi(t, x_1, x_2, x_3)$. Z toho, co jsme řekli, plyne, že obě formy φ, ψ se anulují současně; protože mají netriviální reálné kořeny (body světočar signálů procházejících počátkem $E_4(P)$ a $E_4(\tilde{P})$), jsou úměrné (viz k tomu např. [2], str. 107 a 127).

Dosadíme-li do (10) a (11) za x_j resp. $\tilde{x}_j$ funkce t resp. $\tilde{t}$ popisující světočáru některého pozorovatele Q, která prochází společným počátkem $E_4(P)$ a $E_4(\tilde{P})$, a dělíme-li t^2 resp. $\tilde{t}^2$, je výsledek v obou případech kladné číslo (rozdíl c^2 a čtverce rychlosti Q vzhledem k P resp. $\tilde{P}$). Odtud plyne, že koeficient λ v identitě $\psi \equiv \lambda\varphi$ je číslo kladné.

Identita $\psi \equiv \lambda\varphi$ je ekvivalentní s rovností odpovídajících si koeficientů obou forem:

$$(13) \qquad \begin{aligned} &c^2a_{00}^2 - a_{10}^2 - a_{20}^2 - a_{30}^2 = \lambda c^2\,, \\ &c^2a_{0j}a_{0k} - a_{1j}a_{1k} - a_{2j}a_{2k} - a_{3j}a_{3k} = -\,\delta_{jk}\lambda \quad \text{pro } j^2 + k^2 > 0\,; \end{aligned}$$

δ_{jk} je Kroneckerovo delta.

Zaveďme pro zjednodušení dalších výpočtů tato označení:

$$(14) \qquad x_0 = ict\,, \quad \tilde{X}_0 = \frac{ic\tilde{t}}{\sqrt{\lambda}}\,, \quad \tilde{X}_j = \frac{\tilde{x}_j}{\sqrt{\lambda}} \quad (j = 1, 2, 3)\,.$$

Označíme-li (b_{jk}) matici transformace, převádějící x_k $(k = 0, 1, 2, 3)$ v $\tilde{X}_j$ $(j = 0, 1, 2, 3)$, tj. je-li

$$(15) \qquad \tilde{X}_j = \sum_{k=0}^{3} b_{jk}x_k \quad \text{pro} \quad j = 0, 1, 2, 3\,,$$

snadno zjistíme pomocí (8), (9) a (14), že

$$(16) \qquad (b_{jk}) = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{00}}{\sqrt{\lambda}}, & \dfrac{ica_{01}}{\sqrt{\lambda}}, & \dfrac{ica_{02}}{\sqrt{\lambda}}, & \dfrac{ica_{03}}{\sqrt{\lambda}} \\ \dfrac{a_{10}}{ic\sqrt{\lambda}}, & \dfrac{a_{11}}{\sqrt{\lambda}}, & \dfrac{a_{12}}{\sqrt{\lambda}}, & \dfrac{a_{13}}{\sqrt{\lambda}} \\ \dfrac{a_{20}}{ic\sqrt{\lambda}}, & \dfrac{a_{21}}{\sqrt{\lambda}}, & \dfrac{a_{22}}{\sqrt{\lambda}}, & \dfrac{a_{23}}{\sqrt{\lambda}} \\ \dfrac{a_{30}}{ic\sqrt{\lambda}}, & \dfrac{a_{31}}{\sqrt{\lambda}}, & \dfrac{a_{32}}{\sqrt{\lambda}}, & \dfrac{a_{33}}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}.$$

Rovnosti (13) znamenají, že sloupce matice (b_{jk}) tvoří čtveřici ortonormálních vektorů; matice (b_{jk}) je tedy ortogonální a také její řádky tvoří čtveřici ortonormálních vektorů. Inversní matici k ní je matice transponovaná, tj. (b_{kj}), inversní transformace je dána rovnicemi

$$(17) \qquad x_j = \sum_{k=0}^{3} b_{kj}\tilde{X}_k \quad \text{pro} \quad j = 0, 1, 2, 3 .$$

Stanovíme nyní koeficienty b_{jk}. Buď $V = (V_1, V_2, V_3)$ rychlost $\tilde{P}$ (tj. i $\tilde{P}$) vzhledem k P, $\tilde{V} = (\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \tilde{V}_3)$ rychlost P vzhledem k $\tilde{P}$. Dosadíme-li vpravo v (17) $\tilde{X}_1 = \tilde{X}_2 = \tilde{X}_3 = 0$, vlevo odpovídající tomu $x_j = V_j t$, dostaneme:

$$(18) \qquad x_0 = b_{00}\tilde{X}_0 , \quad \text{tedy} \quad t = \frac{\tilde{t}}{\sqrt{\lambda}} b_{00} ,$$

$$(19) \qquad V_j t = b_{0j}\tilde{X}_0 = b_{0j}\frac{ic\tilde{t}}{\sqrt{\lambda}} = ic\frac{b_{0j}}{b_{00}} t \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, 3 ;$$

koeficient $b_{00} \neq 0$, neboť jinak by transformace (17) převáděla všechny body tvaru $(\tilde{X}_0, 0, 0, 0) \in E_4(\tilde{P})$ na bod $(0, 0, 0, 0) \in E_4(P)$ a nebyla by tedy prostá. Učiňme tento předpoklad:

XI. *Roste-li t, roste i $\tilde{t}$.*

Pak je nutně

$$(20) \qquad b_{00} > 0 .$$

Z (19) plyne, že $b_{0j} = b_{00}V_j/ic$ pro $j = 1, 2, 3$; z toho a z podmínky, že nultý řádek matice (16) je jednotkový vektor, plyne vztah

$$(21) \qquad b_{00}^2\left(1 - \frac{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}{c^2}\right) = b_{00}^2\left(1 - \frac{|V|^2}{c^2}\right) = 1$$

(kde $|V|$ znamená normu vektoru V). Porovnáním (20), (21) a (19) dostáváme:

$$(22) \qquad b_{00} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}} ,$$

$$(23) \qquad b_{0j} = \frac{V_j}{ic\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}} \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, 3 .$$

Analogicky dostáváme z rovnic (15) dosazením $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ a odpovídajících hodnot $\tilde{X}_j = \tilde{V}_j t$ za prvé rovnost

$$b_{00} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\tilde{V}|^2}{c^2}}} ,$$

z níž a z (22) ihned plyne, že $|V|^2 = |\tilde{V}|^2$, za druhé vztahy

$$b_{0j} = \frac{\tilde{V}_j}{ic\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}} \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, 3 . \tag{24}$$

Z ortogonality nultého a j-tého řádku ($j = 1, 2, 3$) matice (b_{jk}) a ze vztahů (23), (24) plyne, že

$$b_{00}\tilde{V}_j + b_{j1}V_1 + b_{j2}V_2 + b_{j3}V_3 = 0 \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, 3 ; \tag{25}$$

analogicky pro sloupce:

$$b_{00}V_j + b_{1j}\tilde{V}_1 + b_{2j}\tilde{V}_2 + b_{3j}\tilde{V}_3 = 0 \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, 3 . \tag{26}$$

Z ortogonality a normality ostatních sloupců vyplývá, že

$$b_{1j}b_{1k} + b_{2j}b_{2k} + b_{3j}b_{3k} = \delta_{jk} + \frac{V_jV_k}{c^2 - |V|^2} \quad \text{pro} \quad j \neq 0 \neq k . \tag{27}$$

Položme

$$c_{jk} = b_{jk} + \frac{b_{j0}b_{0k}}{b_{00} + 1} = b_{jk} + (b_{00} - 1)\frac{\tilde{V}_jV_k}{|V|^2} \quad \text{pro} \quad j, k = 1, 2, 3 ; \tag{28}$$

pak je podle (22), (26), (27), (28)

$$\sum_{n=1}^{3} c_{nj}c_{nk} = \sum_{n=1}^{3}\left(b_{nj} + (b_{00} - 1)\frac{\tilde{V}_nV_j}{|V|^2}\right)\left(b_{nk} + (b_{00} - 1)\frac{\tilde{V}_nV_k}{|V|^2}\right) = \delta_{jk} .$$

Matice (c_{jk}) $(j, k = 1, 2, 3)$ je tedy ortogonální.

V dalším užívejme pro krátkost vektorového označení: buď $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_3, \tilde{X}_2)$; (V, x) nechť znamená skalární součin V a x atd. Podle (25) a (28) je (pro $j = 1, 2, 3$)

$$\sum_{n=1}^{3} V_nc_{jn} = \sum_{n=1}^{3} V_nb_{jn} + (b_{00} - 1)\frac{\tilde{V}_j}{|V|^2}\sum_{n=1}^{3} V_n^2 = -\tilde{V}_j \tag{29}$$

a analogicky

$$\sum_{n=1}^{3} \tilde{V}_nc_{nj} = -V_j . \tag{30}$$

Rovnosti (29) umožňují odstranit ze vzorců (24) složky $\tilde{V}$:

$$b_{j0} = \frac{i}{\sqrt{c^2 - |V|^2}}\sum_{n=1}^{3} V_nc_{jn} \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, 3 ; \tag{31}$$

dosadíme-li za $\tilde{V}_j$ podle (29) do (28), lze vypočítat b_{jk}:

$$b_{jk} = c_{jk} + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}} - 1\right)\frac{V_k}{|V|^2}\sum_{n=1}^{3} V_nc_{jn} \quad \text{pro} \quad j, k = 1, 2, 3 . \tag{32}$$

Vypočítané hodnoty b_{jk} dosaďme do (15):

$$\tilde{X}_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}}\left(x_0 + \frac{(V, x)}{ic}\right), \tag{33}$$

tedy

$$\tilde{t} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}}\left(t - \frac{(V, x)}{c^2}\right); \tag{34}$$

za druhé (pro $j = 1, 2, 3$):

$$\tilde{X}_j = b_{j0}x_0 + \sum_{n=1}^{3} c_{jm}x_m + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}} - 1\right)\sum_{n=1}^{3} \frac{V_n}{|V|^2}\sum_{m=1}^{3} V_m c_{jm} x_n = \tag{35}$$

$$= \sum_{m=1}^{3} c_{jm}\left(x_m - \frac{V_m t}{\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}} + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}} - 1\right)\frac{V_m}{|V|^2}(V, x)\right).$$

Položíme-li

$$x^* = x - \frac{Vt}{\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}} + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}} - 1\right)\frac{(V, x)\, V}{|V|^2}, \tag{36}$$

bude tedy

$$\tilde{X}_j = \sum_{m=1}^{3} c_{jm}x_m^*, \tag{37}$$

což znamená pouze ortogonální transformaci prostorových souřadnic pozorovatele $\tilde{P}$. Uvažme k tomu ještě (14):

$$\tilde{x}_j = \sqrt{\lambda}\, \tilde{X}_j \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, 3\,.$$

Vidíme, že přechod od souřadnic t, x_j pozorovatele P k souřadnicím $\tilde{t}$, $\tilde{x}_j$ pozorovatele $\tilde{P}$ se dá realisovat takto: Nejdříve přejdeme k souřadnicím

$$t^* = \frac{\tilde{t}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}}\left(t - \frac{(V, x)}{c^2}\right) \tag{38}$$

a x_1^*, x_2^*, x_3^*, odtud (při zachování t^*) ortogonální transformací prostorových os (s maticí (c_{jk})) k souřadnicím t^*, $\tilde{X}_j$ a konečně vynásobením těchto souřadnic zatím neznámým koeficientem $\sqrt{\lambda}$ dostaneme $\tilde{t}$, $\tilde{x}_j$.

Objasníme nyní geometrický smysl souřadnic t^*, x_j^* pozorovatele $\tilde{P}$ a ukážeme, v jakém smyslu je tento souřadný systém výhodnější k popisu než systém souřadnic t^*, $\tilde{X}_j$ (vycházíme-li z popisu pozorovatele P). Předpokládejme přitom, že $V \neq 0$; v opačném případě mají rovnice (36), (38) tvar $x^* = x$, $t^* = t$ a vše je zřejmé.

Tvrdím, že *v souřadném systému* t^*, x_j^* *má osa* x_1^* *takovou polohu, že pokud* V *není tvaru* $(V_1, 0, 0)$, *je obrazem roviny* R_1, *určené vektorem* V *a osou* x_1 *v okamžiku* t, *při transformaci dané vztahy* (36), (38) *rovina* R_1^* *určená vektorem* V *a osou* x_1^* *v příslušném okamžiku* t^*. Analogická tvrzení platí ovšem také pro druhou a třetí osu.

Body roviny R_1 jsou tvaru

$$x = \alpha(1, 0, 0) + \beta V, \quad \alpha, \beta \in E_1 ; \tag{39}$$

podle (38) je

$$t^* = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}}\left(t - \frac{\alpha V_1 + \beta|V|^2}{c^2}\right), \tag{40}$$

a podle (36)

$$x^* = \alpha(1, 0, 0) + V\left(\beta - \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}} + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}} - 1\right)\left(\frac{\alpha V_1}{|V|^2} + \beta\right)\right). \tag{41}$$

Dosadíme-li do (41) za t podle (40), dostaneme po úpravě

$$x^* = \alpha(1, 0, 0) + V\left(\beta\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}} - t^* - \frac{\alpha V_1}{|V|^2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}\right)\right); \tag{42}$$

probíhají-li α, β celé E_1, probíhá bod x^* celou rovinu R_1^*.

Poznámka 1. Osa x_1^* a obraz osy x_1 nejsou obecně rovnoběžkami v rovině R_1^*. Body osy x_1 jsou charakterisovány tím, že $\beta = 0$; odpovídající x^* tvoří sice přímku

$$x^* = \alpha(1, 0, 0) - V\left(t^* + \frac{\alpha V_1}{|V|^2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}\right)\right), \tag{43}$$

ale tato přímka protíná osu x_1^* v bodě, který má první souřadnici rovnu

$$\alpha = -\frac{t^*|V|^2}{V_1\left(1 - \sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}\right)},$$

jestliže ovšem $V_1 \neq 0$.

Z toho dále vidíme, že osa x_1^* a obraz osy x_1 jsou (za předpokladu, že V není tvaru $(V_1, 0, 0)$) rovnoběžné právě tehdy, když $V_1 = 0$, tj. když pohyb $\tilde{P}$ se děje ve směru kolmém k ose x_1 (a x_1^*). To ovšem platí nejen pro $j = 1$, ale také pro $j = 2, 3$.

Je-li $V = (V_1, 0, 0)$, splývá osa x_1^* s obrazem osy x_1 a osa x_j^* $(j = 2, 3)$ je rovnoběžná s obrazem přímky x_j.

Poznámka 2. Souřadnice t^*, x_j^* mají ještě tu jednoduchou vlastnost, že světočára pozorovatele P v nich má tvar $x^* = -Vt^*$; přesvědčíme se o tom tím, že v (36) a (38) položíme $x = 0$ a dosadíme z (38) za t do (36). Rychlost P vzhledem k $\tilde{P}$ v těchto souřadnicích je tedy $-V$. Transformace inversní k (36), (38) dostaneme v důsledku toho záměnou x a x^*, t a t^*, V a $-V$.

Všimněme si nyní ortogonální transformace prostorových os s koeficienty c_{jk}. Snadno zjistíme, že při zcela libovolných koeficientech c_{jk} tvořících ortogonální matici splňuje výsledná transformace všechny podmínky na ni kladené (speciálně, aby zachovávala rovnost $c^2t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$). Nelze tedy obecně o číslech c_{jk} nic bližšího říci: čísla c_{jk} záleží na poloze prostorových os souřadného systému pozorovatele $\tilde{P}$. Nejjednodušší je případ, že (c_{jk}) je jednotková matice: pak x_j^* splývá s X_j^*; některé vlastnosti tohoto systému jsme právě vyšetřili.

Koeficient λ nelze z dosud uvedených postulátů určit: při jakémkoli kladném λ mají příslušné transformace všechny požadované vlastnosti. Po vynásobení všech souřadnic koeficientem $\sqrt{\lambda}$ se totiž kvantitativně nezmění žádná rychlost a dosud uvedené postuláty obsahovaly jen požadavky o rychlostech.

Je tedy třeba zavést ještě další požadavek, umožňující „porovnání měřítek" různých pozorovatelů. Dojdeme k němu touto úvahou:

Buď $t \in E_1(P)$, buďte ${}^{(1)}x$, ${}^{(2)}x$ dva body, pro něž je ${}^{(2)}x - {}^{(1)}x$ vektor kolmý k V. Vypočtěme prostoro-časové souřadnice událostí $(t, {}^{(1)}x)$, $(t, {}^{(2)}x)$ v souřadném systému t^*, x_j^*. Je

$$ {}^{(n)}t^* = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}} \left(t - \frac{(V, {}^{(n)}x)}{c^2} \right) \quad \text{pro} \quad n = 1, 2 \, , $$

takže

$$ {}^{(2)}t^* - {}^{(1)}t^* = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}} \frac{(V, {}^{(2)}x - {}^{(1)}x)}{c^2} = 0 \; ; \tag{44} $$

obě události jsou tedy současné i vzhledem k $\tilde{P}$. Prostorové souřadnice jsou rovny

$$ {}^{(n)}x^* = {}^{(n)}x - \frac{Vt}{\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}} + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}} - 1 \right) \frac{V}{|V|^2} (V, {}^{(n)}x) \, , $$

takže

$$ {}^{(2)}x^* - {}^{(1)}x^* = {}^{(2)}x - {}^{(1)}x \; ; $$

pro vzdálenosti obou bodů tedy platí:

$$ |{}^{(2)}x^* - {}^{(1)}x^*| = |{}^{(2)}x - {}^{(1)}x| \, . \tag{45} $$

Ortogonální transformace, daná maticí (c_{jk}), nezmění vzdálenost, posunutí časoprostorového počátku, dané vztahy (9), také ne; při přechodu od t^*, $\tilde{X}_j$ k $\tilde{t}$, $\tilde{x}_j$ se však vzdálenost vynásobí číslem $\sqrt{\lambda}$. Tedy:

$$|{}^{(2)}\bar{x} - {}^{(1)}\bar{x}| = \sqrt{\lambda}|{}^{(2)}x - {}^{(1)}x| \,. \tag{46}$$

Vzdálenosti bodů, jejichž spojnice je kolmá ke směru vzájemného pohybu P a $\bar{P}$, počítané pozorovateli P (v čase t) a $\bar{P}$ (v příslušném okamžiku $\bar{t}$), jsou v poměru $1 : \sqrt{\lambda}$. „Porovnání měřítek“ všech pozorovatelů z I lze tedy zavést tímto postulátem:

XII. *Měřítka (tj. jednotkové vektory na osách) pozorovatelů z I nechť jsou zvolena tak, že pro každé dva pozorovatele P, $\bar{P} \in I$ platí: vzdálenost každých dvou bodů, jejichž spojnice je kolmá k vektoru rychlosti $\bar{P}$ vzhledem k P, vypočítaná pozorovatelem P v libovolném okamžiku t, je rovna vzdálenosti těchto bodů, vypočítané pozorovatelem $\bar{P}$ v příslušném okamžiku $\bar{t}$* (stejném, jak jsme ukázali, pro oba body).

Poznámka 1. Úvaha před postulátem XII ukazuje, že požadavek XII lze splnit; stačí k tomu vyjít od jednoho pozorovatele P a měřítka ostatních pozorovatelů $\bar{P}$ zvolit tak, aby příslušné λ bylo rovno jedné. K tomu opět stačí porovnat vzdálenosti jediné dvojice různých bodů v jediném okamžiku.

Poznámka 2. Místo vzdáleností dvou bodů v určitém okamžiku lze porovnávat vzdálenosti dvou rovnoběžek o směru V (pokud $V \neq 0$; pro $V = 0$ je vše snadné) – na př. spojnice P a $\bar{P}$ a některé další přímky s ní rovnoběžné. Tyto přímky popíše P v pevném okamžiku $t \in E_1(P)$ takto:

$$x = sV \quad \text{resp.} \quad x = W + sV \quad (s \in E_1) \,; \tag{47}$$

lze předpokládat, že $(V, W) = 0$ – pak je $|W|$ vzdáleností obou přímek. Příslušné

$$\bar{t} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1 - \dfrac{|V|^2}{c^2}}} \left(t - s\frac{|V|^2}{c^2} \right)$$

je totéž pro obě přímky a užijeme-li souřadnic $\tilde{x}_j = \sqrt{\lambda} x_j^*$ (odpovídajících případu, že (c_{jk}) je jednotková matice), bude

$$\tilde{x} = -\left(\tilde{t} + s\sqrt{\lambda} \sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}} \right) V, \tag{48}$$

resp.

$$\tilde{x} = \sqrt{\lambda} W - \left(\tilde{t} + s\sqrt{\lambda} \sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}} \right) V.$$

Vzdálenosti přímek (47) a (48) jsou opět v poměru $1 : \sqrt{\lambda}$; totéž platí pro vzdálenost obou přímek v soustavě $\bar{t}$, $\bar{x}_j$ pozorovatele $\bar{P}$.

Shrňme nyní hlavní výsledky, k nimž jsme dospěli: *Jsou-li splněny postuláty* **I—XII**, *přísluší každému pozorovateli* $P \in I$ *prostor* $E_4 = E_4(P)$ *tak, že pro každé dva pozorovatele* P, $\bar{P} \in I$ *mají transformace* $E_4(P)$ *na* $E_4(\bar{P})$, *umožňující stanovit na základě popisu světočáry libovolného pozorovatele* Q *pozorovatelem* P *popis světočáry* Q *pozorovatelem* $\bar{P}$, *který má vzhledem k* P *rychlost* V, *tvar*

$$\bar{t} = \tilde{t} + b_0\,, \quad \bar{x}_j = \tilde{x}_j + b_j \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, 3\,, \tag{49}$$

kde

$$\tilde{t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}}\left(t - \frac{(V, x)}{c^2}\right), \quad \tilde{x}_j = \sum_{m=1}^{3} c_{jm} x_m^*\,, \tag{50}$$

$$x_m^* = x_m - \frac{V_m t}{\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}} + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}} - 1\right)\frac{(V, x)\, V_m}{|V|^2}\,;$$

přitom b_0, b_1, b_2, b_3 *souvisí pouze s volbou časoprostorového počátku* $\bar{P}$ *a matice* $(c_{jk})_{j,k=1,2,3}$ (která souvisí s volbou polohy prostorových os v $E_4(\bar{P})$) *je ortogonální.*

Tyto transformace se nazývají *Lorentzovy*.

Užitá literatura

[1] *H. V. Craig:* Vector and Tensor Analysis (New York and London 1943).
[2] *E. Čech:* Základy analytické geometrie (Praha 1951).
[3] *В. А. Фок:* Теория пространства, времени и тяготения (Москва 1955).
[4] *П. К. Рашевский:* Риманова геометрия и тензорный анализ (Москва 1953).
[5] *A. Sochor:* Elementární důkaz jednoho tvrzení o zobrazeních E_m na E_m (v tisku v Čas. pro pěst. mat.).

Резюме

ВВЕДЕНИЕ КООРДИНАТНОЙ СИСТЕМЫ НАБЛЮДАТЕЛЯ И ВЫВОД ФОРМУЛ ЛОРЕНЦА

ИЛЬЯ ЧЕРНЫ (Ilja Černý)

В статье содержится система двенадцати требований, при помощи которых можно ввести инерциальные системы координат и вывести преобразования Лоренца способом, удовлетворяющим с точки зрения математики, физики и логики. Все требования, хотя они формулированы математически, имеют простое и легко видимое физическое значение; они отражают, конечно, обна-

руженные экспериментальным путем факты лежащие в основе специальной теории относительности.

Упомянутые требования заключаются в следующем (в квадратных скобках пояснено коротко физическое значение или же следствия, которые можно на месте вывести из условий, высказанных раньше):

Мы не определяем следующие понятия: наблюдатель, сигнал, передача или же прием сигнала наблюдателем.

I. Система I всех наблюдателей не пуста, и каждому наблюдателю P соответствует:

1. множество $E_1(P)$ всех действительных чисел [„часы"];

2. декартово произведение $U(P) = E_1 \times \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$, в котором введено равенство соотношением $(\varphi_1, \vartheta_1) = (\varphi_2, \vartheta_2)$, если или $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \pm\frac{1}{2}\pi$ или $\varphi_2 - \varphi_1$ является целым кратным 2π. [„Шкала направлений в пространстве."]

Кроме того, задана абсолютная (т. е. не зависящая от наблюдателя) постоянная $c > 0$.

II. Каждому сигналу S, переданному или принятому наблюдателем P, соответствует однозначно тройка (t, φ, ϑ), где $t \in E_1(P)$, $(\varphi, \vartheta) \in U(P)$. (Сигнал S обозначаем более подробно символом $S^P(t, \varphi, \vartheta)$.)

III. Каждому $t \in E_1(P)$ поставлена в соответствие система переданных сигналов $\{S^P(t, \varphi, \vartheta)\}_{(\varphi,\vartheta)\in U(P)}$. [Наблюдатель P может передавать в любой момент сигналы „во все стороны".]

IV. Каждой системе $\{S^P(T, \varphi, \vartheta)\}_{(\varphi,\vartheta)\in U(P)}$ сигналов, переданных наблюдателем P в момент T, и каждому другому наблюдателю $\bar{P}$ соответствует точно один принятый сигнал $S^P(\alpha(T), -\varphi^*(T), -\vartheta^*(T))$, причем $\alpha(T) \geqq T$, $(\varphi^*(T), \vartheta^*(T)) \in \in U(P)$. [„Эхо" переданных сигналов, т. е. сигнал, „отраженный" от наблюдателя $\bar{P}$.]

V. Функция α из требования IV. является непрерывной и возрастающей и отображает $E_1(P)$ на $E_1(P)$. [Соотношения (1), (2) позволяют дать описание мировой линии наблюдателя P по отношению к наблюдателю P в „полярных координатах"; от них мы при помощи (3) перейдем к представлению в „декартовых координатах". Под мировой линией мы подразумеваем множество всех четверок $(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, где $t \in E_1(P)$. При помощи представления в декартовых координатах мы определяем обычным способом скорость (среднюю и мгновенную) одного из наблюдателей относительно другого.]

VI. Мировая линия сигнала описана в декартовых координатах линейными функциями t, скорость сигналов не зависит от направления и от наблюдателя. Соответствие, описанное в IV. осуществляется следующим образом: Точно один из сигналов системы $\{S^P(T, \varphi, \vartheta)\}_{(\varphi,\vartheta)\in U(P)}$ достигнет в определенный момент точки $x(t)$, в которой находится наблюдатель $\bar{P}$ во время t, и $\bar{P}$ в то же время передаст сигнал, который наблюдатель P примет в момент $\alpha(T)$.

[Здесь сформулировано одно из основных требований специальной теории относительности. Можно показать, что скорость сигналов равна абсолютной постоянной c из требования I.]

VII. Если наблюдатель P находится в состоянии покоя относительно $\bar{P}$, то любой наблюдатель Q имеет одну и ту же скалярную скорость относительно P и $\bar{P}$. [Здесь можно уже доказать, что скалярная скорость любого из наблюдателей Q относительно любого наблюдателя P всегда меньше c. Оказывается, что это утверждение при условии, что выполняются остальные до сих пор перечисленные требования, равносильно тому, что функция α возрастает; в этом заключается физическое значение одного из требований V., в котором математически сформулированы определенные свойства отображения α.]

VIII. Для каждого наблюдателя P справедливо утверждение: К каждому $t \in E_1(P)$, к каждой тройке произвольных действительных чисел (x_1, x_2, x_3) и к каждой тройке (v_1, v_2, v_3) действительных чисел, удовлетворяющих условию $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 < c^2$, существует наблюдатель, который имеет относительно P скорость (v_1, v_2, v_3) и во время t занимает положение (x_1, x_2, x_3).

IX. Для каждого наблюдателя P система I совпадает с множеством всех наблюдателей, которые относительно P находятся в состоянии равномерного и прямолинейного движения.

[Специальная формулировка постулата VIII. для $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ использована уже в доказательстве утверждения, что взаимная скалярная скорость любых двух наблюдателей меньше c. Из этой специальной формулировки уже вытекает, что каждый наблюдатель P достигнет своими пространственно-временными измерениями всего четырехмерного пространства $E_4 = E_4(P)$.]

X. Для любых двух наблюдателей P, $\bar{P}$ существует взаимно однозначное отображение $F^{P\bar{P}}$ пространства $E_4(P)$ на $E_4(\bar{P})$ так, что если M представляет собой мировую линию произвольного наблюдателя Q в координатной системе наблюдателя P, то $F^{P\bar{P}}(M)$ является мировой линией наблюдателя Q в координатной систем наблюдателя $\bar{P}$. [Множество мировых линий всех наблюдателей Q в декартовых координатах произвольного наблюдателя P совпадает с множеством $\mathfrak{M}(P)$ всех линий в $E_4(P)$, описанных соотношением $x_j = v_j t + A_j (j = 1, 2, 3)$, где $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 < c^2$. Из того обстоятельства, что $F^{P\bar{P}}$ отображает каждую прямую из $\mathfrak{M}(P)$ на прямую и что $F^{P\bar{P}}$ является взаимно однозначным, уже вытекает, что $F^{P\bar{P}}$ линейно – см. [5]. Обычным способом находится в статье вид $F^{P\bar{P}}$, т. е. вид преобразований Лоренца. Время $\bar{t}$, меренное наблюдателем $\bar{P}$ в начале его координатной системы и соответствующее время t, описанное наблюдателем P, взаимно связаны соотношением $\bar{t} = \omega t$, где ω – постоянная.]

XI. Если возрастает t, то возрастает и $\bar{t}$. [Из этого требования вытекает, что $\omega > 0$. Вывод преобразований Лоренца можно уже теперь почти полностью закончить. Мы получим

$$\bar{t} = \tilde{t} + b_0, \quad \bar{x}_j = \tilde{x}_j + b_j \quad (j = 1, 2, 3),$$

где

$$\tilde{t} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}}\left(t - \frac{(V, x)}{c^2}\right), \quad \tilde{x}_j = \sum_{m=1}^{3} c_{jm} x_m^*,$$

$$x_m^* = \sqrt{\lambda}\left[x_m - \frac{V_m t}{\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}} + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}} - 1\right)\frac{(V, x)\, V_m}{|V|^2}\right];$$

при этом b_0, b_1, b_2, b_3 представляют собой постоянные, зависящие только от выбора временно-пространственного начала $\bar{P}$, $V = (V_1, V_2, V_3)$ – это скорость $\bar{P}$ относителньо P, $|V|$ – ее норма, (V, x) – скалярное произведение векторов V и x, (c_{jm}) – ортогональная матрица, которая зависит от положения пространственных осей координатной системы наблюдателя $\bar{P}$, $\sqrt{\lambda}$ – произвольный фактор (который невозможно определить по требованиям I.–IX.), зависящий от выбора „масштаба" на координатных осях наблюдателей P и $\bar{P}$.]

XII. Единичные векторы на координатных осях наблюдателей выбраны так, что для каждых двух наблюдателей P, $\bar{P}$ справедливо следующее: существует время $t \in E_1(P)$ и пара различных точек A, B так, что соответствующий вектор $\overrightarrow{AB}$ перпендикулярен вектору взаимного перемещения наблюдателей P и $\bar{P}$, причем длина вектора $\overrightarrow{AB}$, измеренная наблюдателем P во время t совпадает с длиной $\overrightarrow{AB}$, измеренной наблюдателем P в соответствующий момент $\bar{t}$. [Тогда измерение длин отрезков, перпендикулярных на направление движения наблюдателей P о $\bar{P}$, не зависит ни в какое время от наблюдателей P, $\bar{P}$. Коэффициент λ необходимо равен 1, и преобразования примут обычный вид.]

Summary

ON THE CONSTRUCTION OF THE COORDINATE SYSTEM OF AN OBSERVER AND THE DERIVATION OF THE LORENTZ TRANSFORMATION

ILJA ČERNÝ

The paper contains a system of twelve postulates which enable to introduce inertial coordinate systems and to derive the Lorentz transformation in a way which is satisfactory in the mathematical, physical, and logical senses. All the postulates – although formulated mathematically – have a simple and obvious physical sense; they contain, of course, experimentally confirmed facts representing the foundations of the special theory of relativity.

The twelve postulates mentioned above are the following ones (in [ ] we show very concisely the physical meaning resp. the corollaries which can be derived from the postulates already introduced):

We do not define the following notions: observer, signal, emission resp. reception of the signal by an observer.

I. The system I of all observers in nonempty; to each observer P there correspond:

1) the set $E_1(P)$ of all real numbers ["the clock"];

2) the cartesian product $U(P) = E_1 \times \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$, in which the following equivalence is introduced: $(\varphi_1, \vartheta_1) = (\varphi_2, \vartheta_2)$ if either $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \pm \frac{1}{2}\pi$ or $\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$, where k is an integer. ["The scale of directions in the space."]

Also there is given an absolute (i. e. independent of the observer) constant $c > 0$.

II. To each signal S emitted or received by an observer P there corresponds one and only one set of three numbers (t, φ, ϑ) where $t \in E_1(P)$, $(\varphi, \vartheta) \in U(P)$. (We designate the signal S by $S^P(t, \varphi, \vartheta)$.)

III. With each $t \in E_1(P)$ there is associated the system $\{S^P(t, \varphi, \vartheta)\}_{(\varphi,\vartheta)\in U(P)}$ of emitted signals. [The possibility of the observer to emit signals "in all directions" at any moment.]

IV. To each system $\{S^P(T, \varphi, \vartheta)\}_{(\varphi,\vartheta)\in U(P)}$ of signals emitted by the observer P at the moment T and to each observer $\bar{P}$ there corresponds one and only one received signal $S^P(\alpha(T), -\varphi^*(T), -\vartheta^*(T))$; we assume that $\alpha(T) \geqq T$, $(\varphi^*(T), \vartheta^*(T)) \in U(P)$. [The "echo" of the emitted signals, i. e. the signal "reflected" from the observer $\bar{P}$.]

V. The function α in the postulate IV is continuous and increasing and transforms $E_1(P)$ onto $E_1(P)$. The relations (1), (2) make possible a description of the world line of the observer $\bar{P}$ with respect to the observer P in "polar coordinates"; by the aid of (3), we pass to the description in "cartesian coordinates". The world line is the set of all sets $(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ where $t \in E_1(P)$. Using the description in cartesian coordinates, we define the velocity of one observer relative to another in the usual manner.

VI. The world line of the signal is described by linear functions of t in cartesian coordinates, the velocity of signals is independent of the direction and of the observer. The correspondence described in IV is realised in the following way: One and only one signal of the system $\{S^P(T, \varphi, \vartheta)\}_{(\varphi,\vartheta)\in U(P)}$ arrives at a definite moment at the point $x(t)$, where $\bar{P}$ is at the time t, and at the same moment $\bar{P}$ emits a signal which the observer P receives at the time $\alpha(T)$. [We have thus formulated one of the most fundamental postulates of the special theory of relativity. It may be shown that the velocity of the signal is equal to the absolute constant c from postulate I.]

VII. If $\bar{P}$ is at rest relative to P, then each observer Q has the same scalar velocities relative to P and to $\bar{P}$. [Now it may be already shown that the scalar velocity of every observer Q relative to any observer P is always less than c. It appears that if all the remaining postulates hold, then this assertion is equivalent to the assumption that the function α is increasing; this is therefore the physical meaning of one of the postulates V, where some properties of the mapping α are formulated mathematically.]

VIII. For each observer P the following holds: Corresponding to each $t \in E_1(P)$, to each set of arbitrary three numbers (x_1, x_2, x_3), and to each set of three numbers (v_1, v_2, v_3) satisfying the condition $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 < c^2$, there exists an observer with velocity (v_1, v_2, v_3) relative to P and having coordinates x_1, x_2, x_3 at the time t.

IX. For each observer P, the set I is identical with the set of all observers which are in uniform motion in a straight line relative to P.

[We need the postulate VIII with $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ to be able to prove that the scalar velocity of any two observers is less than c. This special case of VIII also implies that the space-time measurements of each observer P lead to the whole four-dimensional space $E_4 = E_4(P)$.]

X. For each two observers P, $\bar{P}$ there exists an one-to-one correspondence $F^{P\bar{P}}$ between $E_4(P)$ and $E_4(\bar{P})$ such that, if M is the world line of an arbitrary observer Q in the coordinate system of the observer P, then $F^{P\bar{P}}(M)$ is the world line of Q in the coordinate system of $\bar{P}$. [The set of world lines of all observers Q in cartesian coordinates of an arbitrary observer P is identical with the set $\mathfrak{M}(P)$ of all straight lines in $E_4(P)$ with the description $x_j = v_jt + A_j$ $(j = 1, 2, 3)$, where $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 < c^2$. The fact that the image under the transformation $F^{P\bar{P}}$ of each straight line from $\mathfrak{M}(P)$ is a straight line again and the fact that $F^{P\bar{P}}$ is an one-to-one correspondence imply that $F^{P\bar{P}}$ is linear – see [5]. In the usual manner we seek the form of $F^{P\bar{P}}$, i. e. the form of the Lorentz transformation. The time $\bar{t}$ measured by the observer $\bar{P}$ at the origin of his coordinate system and the corresponding time t measured by the observer P are connected by the relation $\bar{t} = \omega t$ where ω is a constant.]

XI. If t is increasing then $\bar{t}$ also increases. [This postulate implies that $\omega > 0$. Now we can derive the form of the Lorentz transformation almost completely. We are led to the relations

$$\bar{t} = \tilde{t} + b_0\,, \quad \bar{x}_j = \tilde{x}_j + b_j \quad (j = 1, 2, 3)\,,$$

where

$$\tilde{t} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}}\left(t - \frac{(V, x)}{c^2}\right), \quad \tilde{x}_j = \sum_{m=1}^{3} c_{jm} x_m^*\,,$$

$$x_m^* = \sqrt{\lambda}\left[x_m - \frac{V_m t}{\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}} + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}} - 1\right)\frac{(V, x)\, V_m}{|V|^2}\right];$$

b_0, b_1, b_2, b_3 are constants connected only with the choice of the space-time origin of $\bar{P}$, $V = (V_1, V_2, V_3)$ is the velocity of $\bar{P}$ relative to P, $|V|$ the corresponding scalar velocity, (V, x) the scalar product of the vectors V and x, (c_{jm}) an orthogonal matrix connected with the direction of space axes of P's coordinate system, $\sqrt{\lambda}$ an arbitrary factor (the value of which cannot be derived from the postulates I–XI) connected with the choice of units of length on the coordinate axes of the observers P and $\bar{P}$.]

XII. Let the unit vectors on the coordinate axes of (all) observers be chosen in such a way that for any two observers P, $\bar{P}$ the following holds: An instant $t \in E_1(P)$ and a pair of different points A, B exist such that the corresponding vector $\overrightarrow{AB}$ is perpendicular to the vector of the relative motion of P and $\bar{P}$ and that the length of the vector $\overrightarrow{AB}$ measured by the observer P at the instant t is equal to the length of $\overrightarrow{AB}$ measured by $\bar{P}$ at the corresponding instant $\bar{t}$. [Then the measurement of lengths of abscisses perpendicular to the direction of motion of P and $\bar{P}$ does not depend on the observers P and $\bar{P}$ at any instant. The coefficient λ must equal to 1 and the transformations will take on their well-known form.]

Adresa autora: *Ilja Černý* C. Sc., Matematicko-fysikální fakulta Karlovy university, Praha 1, Malostranské nám. 25.