

# Aplikace matematiky

---

Renata Babušková

Poznámka k technické teorii ohybu

*Aplikace matematiky*, Vol. 6 (1961), No. 6, 463–469

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102778>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1961

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## POZNÁMKA K TECHNICKÉ TEORII OHYBU

RENATA BABUŠKOVÁ

(Došlo dne 21. dubna 1961.)

V práci je udán rigorosní odhad chyby v energetickém smyslu řešení technické teorie ohybu vůči přesnému řešení matematickou teorií rovinné pružnosti. Ve výrazu pro odhad chyby jsou uvedeny pouze pojmy užívané v technické teorii pružnosti.

Je dobře známo, že technická teorie ohybu je přibližným řešením problému z hlediska matematické teorie pružnosti. V práci [1] a [2] bylo ukázáno, že technická teorie ohybu představuje optimální převod dvojdimensionálního problému (za předpokladu rovinné deformace) na problém jednodimensionální.

Rozdílu resp. srovnávání technické a matematické teorie pružnosti je věnována pozornost již dlouhou dobu, počínaje pracemi B. SAINT-VENANTA, LAMBA až do dnešní doby (srv. např. [3]).

Ve všech těchto pracech jde o srovnání na základě konkrétního výpočtu problému matematické a technické teorie pružnosti. V literatuře pak se uvádí praktické odhady, kdy lze užívat technické teorie. Uvádí se poměr délky a výšky 1 : 5, 1 : 7 atd., přičemž se neuvádí měřítko přesnosti. Přitom je zřejmé, že toto měřítko přesnosti bude závislé nejen na tomto poměru, nýbrž i do jisté míry na zatížení. (Např. při zatížení čistým momentem dává technická teorie stejný výsledek jako teorie matematická.)

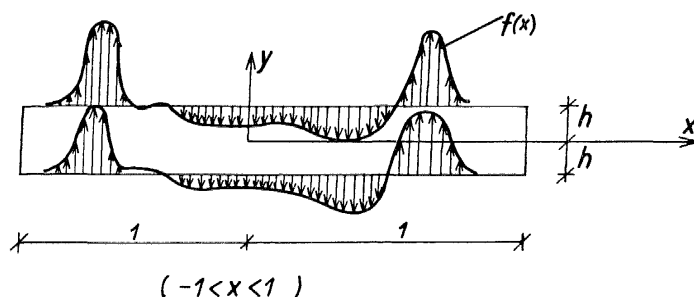
V této poznámce upozorníme na možnost rigorosního odhadu chyby technické teorie ohybu, která nám umožní vytvořit měřítko přesnosti nejen na poměru délky a výšky, ale i na speciálním druhu zatížení. Přitom tento odhad provedeme výhradně prostřednictvím průběhu ohybového momentu, posouvající síly a zatížení, tedy veličin, které při technickém řešení je třeba určovat.

Vzhledem k tomu, jak jsme se již zmínili, je (srv. [1], [2]) technické řešení v jistém smyslu optimální, lze očekávat, že i získaný odhad bude rovněž v tomtéž smyslu optimální. Na konkrétním příkladě ukážeme efektivnost postupu.

Řešme problém ohybu nosníku a pro jednoduchost se omezme na antisymetrické zatížení. Problém je dobře patrný z obr. 1. Zatížení je dáno funkcí  $f(x)$ , o níž budeme

předpokládat (opět pro jednoduchost), že v okolí  $x = \pm 1$  je  $f(x) \equiv 0$ ; předpokládáme, že horní a spodní líc je zatížen stejně (viz obr.) a čela nosníků jsou nezatížena. V tomto případě je třeba zřejmě předpokládat součtovou a momentovou výminku rovnováhy

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \int_{-1}^{+1} x f(x) dx = 0.$$



Obr. 1.

Za předpokladu rovinné deformace a Poissonovy konstanty rovné nule – a na tento případ se omezíme – můžeme daný problém formulovat v posunutích  $u(x, y)$  a  $v(x, y)$ , kdy tyto funkce vyhovují rovnicím Lamého,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \Delta u &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \Delta v &= 0, \end{aligned}$$

s příslušnými okrajovými podmínkami. Můžeme také daný problém formulovat v napětích, kdy neznámá funkce je Airy-ho biharmonická funkce  $U$ , vyhovující předepsaným okrajovým podmínkám. Mezi funkcemi  $u$ ,  $v$  a  $U$  platí známý vztah

$$E \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad E \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad \frac{E}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

Přitom jsme symbolem  $E$  označili modul pružnosti. Označíme-li  $u_0, v_0$  řešení, pak je známo (srv. [4]), že tyto funkce minimalisují kvadratický funkcional

$$\begin{aligned} (1) \quad W_1[u, v] &= E \int_{-1}^{+1} \int_{-h}^{+h} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy - \\ &\quad - 2 \int_{-1}^{+1} (v(x, h) + v(x, -h)) f(x) dx \end{aligned}$$

ve třídě všech dvojic funkcí  $(u, v)$  s kvadrátem integrovatelnými prvými derivacemi (funkce  $u_0, v_0$  jsou určeny až na funkce vyjadřující translaci a rotaci tělesa jako tuhého celku). Minimum funkcionálu  $W_1[u, v]$  označíme  $-\alpha, \alpha > 0$ .

Označíme-li  $U_0$  hledané řešení, pak je známo, že (srv. [4]) tato funkce minimalisuje kvadratický funkcionál

$$(2) \quad W_2[U] = \frac{1}{E} \int_{-1}^{+1} \int_{-h}^{+h} \left[ \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy$$

na třídě všech funkcí, které mají s kvadrátem integrovatelné druhé derivace a které splňují na hranici okrajové podmínky

$$U(x, y) = \frac{M(x)}{2} \quad \text{pro } y = h, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

$$U(x, y) = -\frac{M(x)}{2} \quad \text{pro } y = -h, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad \text{pro } y = \pm h, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

$$U = \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \text{pro } x = \pm 1, \quad -h < y < h,$$

kde jsme označili

$$(3) \quad M(x) = 2 \int_{-1}^x dt \int_{-1}^t f(\tau) d\tau.$$

(Je  $M''(x) = 2f(x)$  a  $M(x)$  je průběh ohybového momentu.) Minimum funkcionálu  $W_2[U]$  je  $\alpha$ . Podle [1] a [2] nyní položíme

$$(4) \quad \begin{aligned} \tilde{u}(x, y) &= -yg'(x), \\ \tilde{v}(x, y) &= g(x) \end{aligned}$$

a funkci  $g(x)$  určíme tak, aby byl minimalisován funkcionál  $W_1[u, v]$  ve třídě všech funkcí, majících tvar (4). Snadno zjistíme, že pro  $g(x)$  dostaneme následující Eulerovu rovnici

$$(5) \quad EJg^{IV} = 2f$$

s okrajovou podmínkou  $g'' = g''' = 0$ . Přitom  $J$  je moment setrvačnosti průřezu, v našem případě  $J = \frac{3}{2} h^3$ .

Vidíme, že jsme obdrželi známou rovnici ohybové čáry technické teorie pružnosti (zatížení je  $2f$ ). Označíme ještě  $-\beta$  minimum funkcionálu  $W_1$  ve třídě funkcí tvaru (4). Zřejmě bude  $\beta > 0$  a  $\beta < \alpha$ . Obdobně položíme ve smyslu [1] a [2]

$$(6) \quad \tilde{U}(x, y) = \frac{M(x)}{2} \left( \frac{3}{2} \frac{y}{h} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{h} \right)^3 \right).$$

Pak bude  $U(x, y)$  zřejmě splňovat příslušné (okrajové) podmínky. Dosadíme-li funkci  $U(x, y)$  z (6) do (2), dostaneme  $W_2[U] = \gamma$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\gamma > \alpha$ . Přitom srovnáme-li (3) a (5) vidíme, že

$$(7) \quad g''(x) = \frac{M(x)}{EJ}.$$

Vzhledem k tomu, že technické řešení nám minimalisuje příslušné funkcionály, rozdíl  $\gamma - \beta$  je horním odhadem energetické chyby technického řešení [srv. [4], 648]. Za relativní charakteristiku chyby technického řešení můžeme považovat hodnotu

$$\eta = \frac{\gamma - \beta}{\beta}.$$

S ohledem na (7) máme však (po snadném výpočtu)

$$-\beta = -\frac{1}{EJ} \int_{-1}^{+1} M^2(x) dx$$

a

$$\gamma = \frac{1}{EJ} \int_{-1}^{+1} M^2(x) dx + \frac{6}{5Eh} \int_{-1}^{+1} M'^2(x) dx + \frac{17}{70} \frac{h}{E} \int_{-1}^{+1} (2f)^2 dx$$

a tedy

$$(8) \quad \eta = \frac{\frac{6}{5} \frac{J}{h} \int_{-1}^{+1} T^2(x) dx + \frac{17}{70} J \cdot h \int_{-1}^{+1} q^2(x) dx}{\int_{-1}^{+1} M^2(x) dx},$$

kde jsme označili  $M'(x) = T(x)$  ( $T(x)$  posouvající síla) a  $2f = q$  ( $q(x)$  je zatížení).

Výraz (8) je odvozen za předpokladu, že neuvažujeme vliv posouvajících sil, což se projeví v původní volbě (4). Budeme-li studovat problém s ohledem na vliv posouvajících sil (srv. [2]) pak místo (4) je třeba položit

$$(9) \quad \begin{aligned} \tilde{u}(x, y) &= -yk(x), \\ v(x, y) &= g(x). \end{aligned}$$

Určíme-li nyní funkce  $g(x)$  a  $k(x)$ , aby byl minimalisován funkcionál  $W_1[u, v]$ , dostáváme pro  $k(x)$  a  $g(x)$  Eulerovy rovnice

$$(10) \quad k' - g'' = \frac{4f}{2Eh}, \quad -Jk''^2 + 2hk - g'2h = 0,$$

což po úpravě vede k rovnici

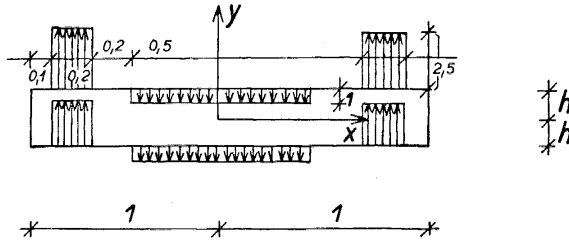
$$(11) \quad EJg^{IV} = 2f - \frac{2}{3} 2f''h^2$$

s okrajovými podmínkami  $g'' = g''' = 0$ . Obdrželi jsme rovnici (11), což je rovnice technického řešení s uvažováním vlivu posouvajících sil – ovšem s jiným koeficientem. (V [5] je uvažován koeficient  $\frac{1}{4}$ , v [6] koeficient 1.) Označme ještě  $-\beta$  minimum

funkcionálu  $W_1[u, v]$  ve třídě funkcí tvaru (9). Zřejmě bude  $\bar{\beta} > 0$ ,  $\beta < \alpha$ . Obdobně jako v předešlém případě dostáváme

$$-\bar{\beta} = -\frac{1}{EJ} \int_{-1}^{+1} M^2(x) dx - \frac{1}{hE} \int_{-1}^{+1} T^2(x) dx.$$

Takže dostáváme relativní chybu



Obr. 2.

$$(9) \quad \bar{\eta} = \frac{\gamma - \bar{\beta}^{-1}}{\beta} = \frac{\frac{1}{5} \frac{J}{h} \int_{-1}^{+1} T^2(x) dx + \frac{17}{70} Jh \int_{-1}^{+1} q^2(x) dx}{\int_{-1}^{+1} M^2(x) dx}.$$

Uvedme nyní příklad. Provedeme odhad chyby řešení problému studovaného v [1] a [2]. Zde byl studován případ zatížení, které je dobře patrné z obr. 2. V tabulce 1 jsou uvedeny hodnoty relativních chyb  $\eta$  a  $\bar{\eta}$  pro různá  $h$ .

Tabulka 1

$h$	$\eta$	$\bar{\eta}$
0,2	0,141225	0,037117
0,4	0,760883	0,344575
0,6	2,446932	1,510239

Třebaže v tabulce 1 jsou udány odhady chyb v energetické normě, přece však jsou dobrým měřítkem pro chybu technického řešení. Je dobře vidět, jaký má vliv uvažování vlivu posouvajících sil (správným způsobem). Energetická chyba nám dává technicky dobré ocenění i chyby, která může být z hlediska technického důležitější.

<sup>1)</sup> Relativní chybu určujeme vůči těžce energii jako jsme uvažovali v (8). Tento odhad relativní chyby (vůči přesné energii) je poněkud nepříznivější než je nutno, takže správnější by bylo uvažovat ve jmenovateli hodnotu  $\beta$  místo  $\bar{\beta}$ . Hodnotu (9) volíme zde proto, aby byla lépe patrna absolutní velikost chyby, která je vyjádřena čitatelcem v (8) resp. (9).

Ukažme to na uvedeném příkladě. V tabulce 2 jsou podle [2] uvedeny průhyby bodu  $(0, 0)$ , tj.  $v(0, 0)$  je-li posunutí  $v(0, 8, 0) = 0$ , a to v případě technického řešení a řešení, které můžeme relativně považovat za přesné. Uvažovali jsme případ  $E = 2$ .

Tabulka 2

h	Technické řešení	Přesné řešení	$\eta_0$
0,2	13,366	14,886	0,113721
0,4	1,671	2,365	0,415320
0,6	0,495	0,896	0,810101

Vzhledem k rovnosti práce vnitřních a vnějších sil jsou hodnoty přibližným oceněním poměru rozdílu průhybu přesného a technického řešení k průhybu od technického řešení, neboť práce vnějších sil je v našem případě rovna průměrné velikosti průhybu v intervalu  $(-0,5; 0,5)$ . V tab. 2 jsou uvedeny ještě tyto poměry, které jsme označili  $\eta_0$ . Srovnáním tabulky 1 a tabulky 2 je patrné, že odhady (jedná se o horní odhady) jsou relativně velmi dobré. Z tab. 1 plyne, že případ zatížení naznačeného na obr. 2 při poměru výšky k délce 1 : 5 je chyba (energetická resp. v průhybu) při klasickém řešení asi 10% při řešení s uvažováním vlivu posouvajících sil asi 4%. Při poměrech větších je rozdíl přiměřeně větší. Lze tedy v uvedeném případě s technickou přesností počítat s technickým řešením pro  $h < 0,1 - 0,2$ .

#### Literatura

- [1] I. Babuška, M. Práger: Reissnerian Algorithmus in the Theory of Elasticity. Bull. de l'acad. pol. — Appl. Mech. VIII., No 8, 1960, 411—417.
- [2] I. Babuška, M. Práger a j.: Algoritmy Reissnerova typu v matematické teorii pružnosti. Sborník prací vědecké konference F. S. ČVUT 1960.
- [3] П. П. Теодореску: Некоторые соображения по вопросу расчета прямых балок. Revue de mécanique appliquée, том V., 1960, No 1, 127—144.
- [4] С. Г. Михлин: Вариационные методы в математической физике. Москва 1957, § 26.
- [5] М. М. Филопенко-Бородич и др.: Курс сопротивления материалов. Москва 1949, т. 2., стр. 15.
- [6] Š. Timošenko: Pružnost a pevnost I. Praha 1951, str. 156.

#### Резюме

### ЗАМЕТКА К ТЕХНИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОГИБАНИЯ

РЕНАТА БАБУШКОВА (Renata Babušková)

В работе изучается проблема точной оценки погрешности (по энергетической норме) технического решения задачи огибания по сравнению с точным решением в математической теории упругости. Показано, что эту оценку можно вы-

разить при помощи понятий технической теории упругости, а именно — момента перерезывающей силы и нагрузки. Также выяснено влияние учета перерезывающих сил на точность решения. На примере показана точность оценки и ее эффективность.

### Zusammenfassung

## BEITRAG ZUR TECHNISCHEN BIEGUNGSTHEORIE

RENATA BABUŠKOVÁ

In der vorgelegten Arbeit wird eine rigorose Abschätzung des Fehlers, im energetischen Sinne, der Lösung auf Grund der technischen Biegungstheorie mit Rücksicht auf die genaue Lösung mit Hilfe der ebenen Elastizitätstheorie angeführt. Es wird gezeigt, dass diese Abschätzung nur mit Hilfe von Ausdrücken, welche der technischen Theorie geläufig sind, d. h. Biegemoment, Belastung, Schubkraft usw. angeführt werden kann. Es wird auch der grosse Einfluss der Einberechnung der Schubkraft auf die Lösung gezeigt. An einem Beispiel wird die Genauigkeit der Abschätzung und ihre Wirksamkeit erläutert.