

# Aplikace matematiky

---

Stanislav Vojtášek

Diodový detektor s filtrem

*Aplikace matematiky*, Vol. 6 (1961), No. 6, 415–427

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102776>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1961

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ČLÁNKY

DIODOVÝ DETEKTOR S FILTREM

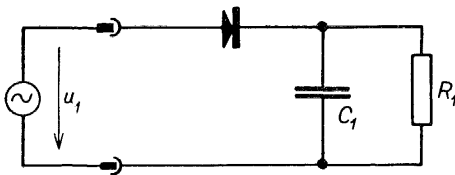
STANISLAV VOJTÁŠEK

(Došlo dne 28. října 1960.)

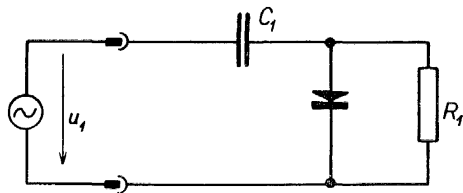
Zkoumaný detektor je popsán soustavou dvou nelineárních diferenciálních rovnic prvního řádu. Při hledání periodického řešení a jeho stability je použito metody Poincarého. Teoretické výsledky jsou upraveny pro praktické použití.

1. ÚVOD

Diodový detektor zaujímá stále důležité místo jak v měřicí technice, tak v samotné vf i nf elektrotechnice. Jsou známy dva druhy diodového detektoru: sériový a paralelní. Oba druhy jsou na obr. 1 a 2. V praxi se používá převážně jen paralelního detektoru, jehož hlavní výhodou je, že zdroj měřeného napětí nemusí být galvanicky vodivý. Ve většině případů se používá paralelního detektoru s filtrem podle obr. 3. Filtr



Obr. 1. Prostý sériový detektor.



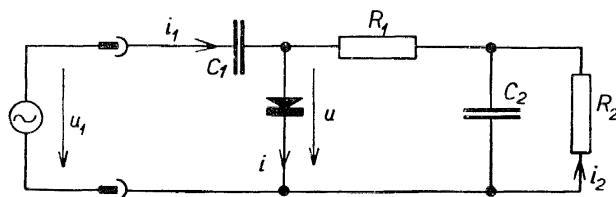
Obr. 2. Prostý paralelní detektor.

sestává z odporu  $R_1$  a kondensátoru  $C_2$ . Zátěž (indikátor) je představován odporem  $R_2$ . Filtr zabraňuje vnikání měřeného napětí do zátěže  $R_2$ , kterou lze pak umístit i mimo vlastní detektor. Tak tomu je např. u diodových voltmetrů, u kterých jsou  $C_1, C_2, R_1$  a dioda  $D$  zasazeny do stíněné sondy, zatím co  $R_2$  je umístěn ve vlastním přístroji. Odpor  $R_2$  bývá přepínatelný s ohledem na požadované rozsahy. Má-li diodový voltmetr ještě stejnosměrný zesilovač, pak bývá  $R_2$  pevný a tvoří obvyčejně současně mřížkový odpor vstupní elektronky zesilovače.

Teorii i výpočtem detektoru se zabývalo a zabývá řada prací. Nebyl však dosud řešen diodový detektor s filtrem. Jako každý nelineární obvod je náročný z matema-

tické stránky. Filtr pak zkomplikuje celé řešení tak, že toto nelze dobře zvládnout bez hlubších matematických znalostí.

Hlavním obsahem této práce je odvození ustáleného stavu paralelního detektoru s filtrem a s polovodičovou diodou a jeho stability.



Obr. 3. Paralelní detektor s filtrem.

Spolu s tím je řešen problém vhodné aproximace a je diskutován obsah vyšších harmonických složek na zátěži. Nakonec je ukázáno použití teoretických výsledků v praxi. Přitom se předpokládá, že použitý kmitočet je tak malý, že lze uvažovat pouze statickou charakteristiku diody. V našem případě se předpokládá použití hrotových diod pro cm vlny, takže uvedené předpoklady jsou splněny.

## 2. APROXIMACE

Při řešení všech nelineárních úloh hraje důležitou roli vhodná aproximace charakteristik nelineárních prvků (zde polovodičová dioda). Aproximace musí být co možná nejjednodušší, musí dobře vystihovat skutečnou charakteristiku. Navíc musí umožnit efektivní výpočet i splňovat potřebné matematické předpoklady.

Pro svou jednoduchost bývá oblíbená v praxi aproximace lomenou čarou. Pokud však užijeme k řešení metody malého parametru (metody Poincaré-ho), pak lomená čára nespĺňuje předpoklady matematické teorie.

Výhodnou se zdá aproximace exponenciálou, popř. součtem více exponenciál. Její velikou výhodou je, že je všude analytická. Nevýhodou je, že vnáší jisté komplikace při konkrétním vyčíslení. Nehodí se tedy pro všechny případy.

V našem případě bylo použito aproximace součtem dvou exponenciál pro charakteristiku použité diody, která je na obr. 4. Taková aproximace dobře vyhovuje. Komplikace při výpočtu jsou ještě únosné.

S ohledem na průběh změřené charakteristiky je nutné, aby pro  $i \geq 0$  celá ležela nad osou napětí  $u$ . Hledáme tedy v daném intervalu proměnné  $u$  aproximaci ve tvaru

$$(1) \quad i = a_1 e^{\alpha_1 u} + a_2 e^{\alpha_2 u} - a_3.$$

Neznámé jsou konstanty  $a_1, a_2, a_3, \alpha_1, \alpha_2$ . Konstantu  $a_3$  volíme tak, aby  $a_1 + a_2 = a_3$ . Hledáme tedy nejprve  $a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2$ . Postupujeme při tom podle [2].

Zvolme čtyři body, kterými aproximace prochází, s ekvidistantním krokem v šíři  $h$ .<sup>1)</sup>

Budou tedy jednotlivé souřadnice napětí

$$u_0, u_0 + h, u_0 + 2h, u_0 + 3h.$$

Příslušné pořadnice proudu jsou  $i_0, i_1, i_2, i_3$ .

Položme dále

$$(2) \quad p_1 = a_1 e^{\alpha_1 u_0},$$

$$p_2 = a_2 e^{\alpha_2 u_0},$$

$$(3) \quad z_1 = e^{\alpha_1 h},$$

$$z_2 = e^{\alpha_2 h}.$$

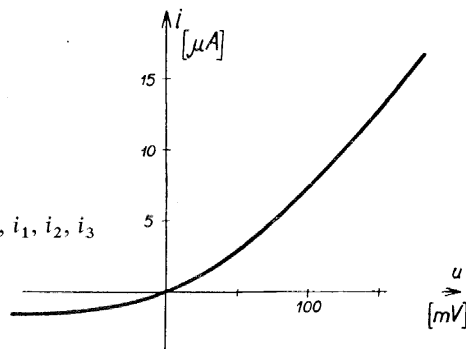
Vyjádříme-li hodnoty argumentů  $i_0, i_1, i_2, i_3$  pomocí (1), (2) a (3), dostaneme

$$(4) \quad i_0 = p_1 + p_2,$$

$$i_1 = p_1 z_1 + p_2 z_2,$$

$$i_2 = p_1 z_1^2 + p_2 z_2^2,$$

$$i_3 = p_1 z_1^3 + p_2 z_2^3.$$



Obr. 4. Statická charakteristika křemíkové diody 33 NQ 50.

Předpokládejme podle [2], že  $z_1$  a  $z_2$  jsou kořeny kvadratické rovnice

$$(5) \quad z^2 + Bz + A = 0,$$

kde  $A, B$  jsou dosud neznámé konstanty. Tyto se určí tak, že se první dvě rovnice soustavy (4) násobí postupně  $A$  a  $B$  a sečtou se spolu s třetí rovnicí této soustavy. Stejně tak vynásobíme druhou a třetí rovnici soustavy (4)  $A$  a  $B$  a sečteme je se čtvrtou rovnicí. Vzniknou tak dvě rovnice pro  $A$  a  $B$  (využijeme také té skutečnosti, že  $z_1$  a  $z_2$  jsou kořeny rovnice (4))

$$(6) \quad Ai_0 + Bi_1 + i_2 = 0,$$

$$Ai_1 + Bi_2 + i_3 = 0.$$

Pomocí  $A$  a  $B$  řešíme dále rovnici (5) a z jejich kořenů  $z_1$  a  $z_2$  vypočteme  $\alpha_1, \alpha_2$ . Předpokládá se, že kořeny  $z_1, z_2$  jsou reálné, kladné. Potom vypočteme  $p_1$  a  $p_2$  pomocí prvních dvou rovnic soustavy (4) a z toho pak na konec vypočteme  $a_1, a_2$ , čímž jsou určeny všechny konstanty. Někdy je účelné zkusmo změnit některou z konstant  $\alpha_1$  popř.  $\alpha_2$ , čímž se aproximace může ještě zlepšit.

### 3. USTÁLENÝ STAV

Úkolem tohoto odstavce je nalézt výrazy, které určují proud  $i_2$  na výstupu detektoru v ustáleném stavu, což značí v matematickém smyslu nalézt periodické řešení pro

<sup>1)</sup> Obecně lze zvolit libovolný, konečný počet bodů. Výpočet neznámých konstant je pak založen na metodě nejmenších čtverců [2].

proud  $i_2$ . K tomu použijeme metody malého parametru, pro kterou jsou zde splněny příslušné předpoklady [1].

Vyjdeme nejdříve z integro-diferenciálních rovnic pro závisle proměnné  $u$  a  $i_2$ , které popisují obvod detektoru připojeného na zdroj čistě harmonického napětí  $u_1$  s kruhovým kmitočtem  $\omega$  (viz obr. 3)

$$(7) \quad \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + u - u_1 = 0,$$

$$(8) \quad (i_1 - i) R_1 - i_2 R_2 - u = 0,$$

$$(9) \quad \frac{1}{C_2} \int (i_1 - i + i_2) dt + i_2 R_2 = 0.$$

Vyloučíme pomocí (8) proud  $i_1$  z rovnic (7) a (9), čímž vznikne po úpravě soustava dvou diferenciálních rovnic (nadále jen d. r.) pro  $u$  a  $i_2$

$$(10) \quad \frac{du}{dt} = \frac{du_1}{dt} - \frac{i}{C_1} - \frac{u}{R_1 C_1} - i_2 \frac{R_2}{R_1 C_1},$$

$$(11) \quad \frac{di_2}{dt} = -\frac{u}{R_1 R_2 C_2} - \frac{i_2}{C_2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Aby bylo možno posoudit velikost koeficientů na pravých stranách d. r. (10) a (11), zavedeme transformaci času substitucí

$$(12) \quad \tau = \omega t,$$

čímž se tyto koeficienty stanou bezrozměrnými. Dostaneme

$$(13) \quad \frac{du}{d\tau} = \frac{du_1}{d\tau} - \frac{u}{\omega R_1 C_1} - \frac{i_2}{\omega R_1 C_1} R_2 - \frac{i}{\omega C_1},$$

$$(14) \quad \frac{di_2}{d\tau} = -\frac{u}{\omega R_1 R_2 C_2} - \frac{i_2}{\omega C_2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Pišme zkráceně d. r. (13) a (14) ve tvaru

$$(15) \quad \begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= \frac{du_1}{d\tau} + \mu f(u, i_2), \\ \frac{di_2}{d\tau} &= \mu g(u, i_2), \end{aligned}$$

kde  $\mu$  je tzv. malý parametr. Při tom charakteristika diody je aproximována funkcí

$$(16) \quad i = F(u),$$

která vzhledem k (1) je všude analytická. Jsou tedy funkce  $f(u, i_2)$  a  $g(u, i_2)$  analytické

pro všechny konečné hodnoty  $u, i_2$ . Derivace  $du/d\tau$  je spojitá periodická funkce v  $\tau$  s periodou  $2\pi$ .

Podle metody rozvoje v mocninné řady malého parametru  $\mu$  hledáme periodické řešení d. r. (14) a (15) ve tvaru

$$(17) \quad \begin{aligned} u &= u(\tau, \beta_1, \beta_2, \mu), \\ i_2 &= i_2(\tau, \beta_1, \beta_2, \mu), \end{aligned}$$

kde  $\beta_1, \beta_2$  jsou parametry prozatím blíže neurčené. Jsou však vázány počátečními podmínkami takto:

$$\begin{aligned} u(0, \beta_1, \beta_2, \mu) &= u^{(0)}(0) + \beta_1, \\ i_2(0, \beta_1, \beta_2, \mu) &= i_2^{(0)}(0) + \beta_2. \end{aligned}$$

Při tom  $u^{(0)}(0)$  a  $i_2^{(0)}(0)$  mají význam počátečních hodnot jednoho z řešení tzv. vytvořující soustavy, tj. soustavy odvozené z (15) tak, že v ní položíme  $\mu = 0$ . Vytvořující soustava tedy zní:

$$(18) \quad \begin{aligned} \frac{du^{(0)}}{d\tau} &= \frac{du_1}{d\tau}, \\ \frac{di_2^{(0)}}{d\tau} &= 0. \end{aligned}$$

Za jistých podmínek (viz také dále) lze pak nalézt  $\beta_1$  a  $\beta_2$  jako analytické funkce malého parametru  $\mu$ .

Vzhledem k naznačeným předpokladům píšme hledaná řešení ve tvaru mocninných řad  $\mu$

$$(19) \quad \begin{aligned} u(\tau) &= u^{(0)}(\tau) + \mu u^{(1)}(\tau) + \mu^2 u^{(2)}(\tau) + \dots, \\ i_2(\tau) &= i_2^{(0)}(\tau) + \mu i_2^{(1)}(\tau) + \mu^2 i_2^{(2)}(\tau) + \dots, \end{aligned}$$

kde funkce  $u^{(k)}(\tau)$  a  $i_2^{(k)}(\tau)$  jsou periodické s periodou  $2\pi$ ; při tom  $k = 0, 1, 2, \dots$

Dosadíme předpokládaná řešení (19) do soustavy (15), v níž byly funkce  $f$  a  $g$  rozvinuty v řady v okolí vytvořujícího řešení  $u^{(0)}(\tau)$  a  $i_2^{(0)}(\tau)$ . Srovnáme-li pak výrazy u týchž mocnin  $\mu$ , dostaneme postupně soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty pro jednotlivé funkce  $u^{(k)}(\tau)$  a  $i_2^{(k)}(\tau)$ .

Tak např. vytvořující soustava byla již uvedena jako soustava (18). Soustava pro  $k = 1$  zní

$$(20) \quad \begin{aligned} \frac{du^{(1)}}{d\tau} &= f(u^{(0)}, i_2^{(0)}), \\ \frac{di_2^{(1)}}{d\tau} &= g(u^{(0)}, i_2^{(0)}). \end{aligned}$$

Zkoumaná soustava (15) náleží k tzv. rezonančnímu případu. Charakteristická rovnice homogenní soustavy odvozené z (15), (pro  $\mu = 0$ ), to je soustavy

$$\frac{d\bar{u}}{d\tau} = 0,$$

$$\frac{d\bar{i}_2}{d\tau} = 0,$$

má totiž kořeny 0,0. Hledáme nyní postupně periodická řešení pro jednotlivé funkce  $u^{(k)}(\tau)$  a  $i_2^{(k)}(\tau)$ . Tato řešení však v tomto rezonančním případě závisí obecně na dvou libovolných konstantách. V našem případě obecné periodické řešení vytvořující soustavy je

$$(21) \quad \begin{aligned} u^{(0)}(\tau) &= u_1 + U^{(0)}, \\ i_2^{(0)}(\tau) &= I_2^{(0)}, \end{aligned}$$

kde právě  $U^{(0)}$  a  $I_2^{(0)}$  mají význam výše uvedených dvou libovolných konstant. Tyto konstanty určíme z podmínek, aby bylo řešení soustavy (20) také periodické — a to s periodou  $2\pi$ . Zmíněné podmínky periodičnosti, které jsou odvozeny např. v [1], v našem případě jsou

$$(22) \quad \begin{aligned} P_1^{(1)} &\equiv \int_0^{2\pi} f(u^{(0)}, i_2^{(0)}) d\tau = 0, \\ P_2^{(1)} &\equiv \int_0^{2\pi} g(u^{(0)}, i_2^{(0)}) d\tau = 0. \end{aligned}$$

Předpokládejme, že soustava rovnic (22) má reálné řešení, které označme  $U^{(0)*}$ ,  $I_2^{(0)*}$ . Jestliže pak v bodě  $U^{(0)} = U^{(0)*}$ ,  $I_2^{(0)} = I_2^{(0)*}$  platí

$$(23) \quad \frac{\partial(P_1^{(1)}, P_2^{(1)})}{\partial(U^{(0)}, I_2^{(0)})} \neq 0,$$

má soustava (15) pro dosti malá  $\mu$  jediné  $2\pi$ -periodické řešení, jež je analytické v  $\mu$ , a které pro  $\mu \rightarrow 0$  přejde ve vytvořující řešení s konstantami  $U^{(0)*}$  a  $I_2^{(0)*}$ .

Obecné řešení soustavy (20) zní

$$(24) \quad \begin{aligned} u^{(1)} &= \int_0^\tau f(u^{(0)}, i_2^{(0)}) d\tau + U^{(1)}, \\ i_2^{(1)} &= \int_0^\tau g(u^{(0)}, i_2^{(0)}) d\tau + I_2^{(1)}. \end{aligned}$$

Konstanty  $U^{(1)}$  a  $I_2^{(1)}$  se opět určí z podmínek, aby funkce  $u^{(2)}(\tau)$  a  $i_2^{(2)}(\tau)$  byly periodické. Takto můžeme postupovat dále, pokud budou ovšem příslušné matematické operace zvládnutelné. V odstavci 5 a 8 bude naznačeno, jak lze využít v praxi výpočtů vyšších aproximací.

#### 4. STABILITA

V předešlém odstavci bylo naznačeno, za jakých podmínek může existovat periodické řešení. Jeho fyzikální existence tím však ještě není zaručena. Aby takové řešení mohlo existovat ve skutečnosti, musí být ještě také tzv. „asymptoticky stabilní“ [3]. Potom je totiž zaručeno, že skutečné řešení je blízké nalezenému řešení i při malých nepřesnostech nastavení počátečních hodnot i při náhodných malých poruchách působících z vnějška.

Budeme vyšetřovat stabilitu vytvořujícího řešení. Zavedme podle [1] do původní soustavy (15) tzv. „poruchy“  $x_1$  a  $x_2$ , dané rozdíly

$$(25) \quad \begin{aligned} x_1 &= u - u(\tau, \mu), \\ x_2 &= i_2 - i_2(\tau, \mu), \end{aligned}$$

kde  $u(\tau, \mu)$ ,  $i_2(\tau, \mu)$  jsou zkoumaná řešení a  $u$ ,  $i_2$  jsou řešení soustavy (15). Rozvedme pak funkce  $f$  a  $g$  v řady v okolí bodu  $u^{(0)}$ ,  $i_2^{(0)}$ . Ponecháme-li pouze členy rozvoje obsahující nejvýše první mocniny  $\mu$ , dostaneme tyto diferenciální rovnice

$$(26) \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= \mu \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right) x_1 + \mu \left( \frac{\partial f}{\partial i_2} \right) x_2, \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= \mu \left( \frac{\partial g}{\partial u} \right) x_1 + \mu \left( \frac{\partial g}{\partial i_2} \right) x_2. \end{aligned}$$

Podle Ljapunovových vět stačí v tzv. „nekritických“ případech vyšetřovat pouze soustavu (38) bez vyšších členů rozvoju funkcí  $f$  a  $g$  [3]. Při tom závorky značí, že se po derivování dosadí za  $u$  a  $i_2$  příslušná tvořící řešení. Charakteristická rovnice soustavy (26) má kořeny 0,0 a jedná se tedy o „kritický“ případ (viz ještě dále). Předpokládejme, že v našem případě řešení soustavy (26) má tvar

$$(27) \quad \begin{aligned} x_1 &= e^{\mu\beta(\mu)\tau} \cdot y_1, \\ x_2 &= e^{\mu\beta(\mu)\tau} \cdot y_2, \end{aligned}$$

kde  $\mu\beta(\mu)$  je tzv. „charakteristický“ exponent, o němž předpokládáme, že je analytickou funkcí  $\mu$ . Funkce  $y_1$ ,  $y_2$  jsou dosud neznámé periodické funkce. Vezměme jen první člen rozvoje  $\beta(\mu)$  označený jako  $\beta_1$  a dosadíme řešení (27) do (26). Hledáme opět řešení pro  $y_1$  a  $y_2$  ve tvaru řady mocnin  $\mu$ . Dostaneme pak po dosazení předpokládaného řešení a po srovnání výrazů u týchž mocnin  $\mu$  postupně nejprve vytvořující soustavu

$$(28) \quad \begin{aligned} \frac{dy_1^{(0)}}{d\tau} &= 0, \\ \frac{dy_2^{(0)}}{d\tau} &= 0 \end{aligned}$$



a dále pak ještě soustavu

$$(29) \quad \begin{aligned} \frac{dy_1^{(1)}}{d\tau} &= -\beta_1 y_1^{(0)} + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) y_1^{(0)} + \left(\frac{\partial f}{\partial i_2}\right) y_2^{(0)}, \\ \frac{dy_2^{(1)}}{d\tau} &= -\beta_1 y_2^{(0)} + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) y_1^{(0)} + \left(\frac{\partial g}{\partial i_2}\right) y_2^{(0)}. \end{aligned}$$

Předpokládejme, že soustavy (28) a (29) nám dovoli i v tomto našem případě rozhodnout o znaménku výše zmíněného charakteristického exponentu a tím i rozhodnout o stabilitě zkoumaného periodického řešení. Řešení soustavy (28) je

$$(30) \quad \begin{aligned} y_1^{(0)} &= C, \\ y_2^{(0)} &= D. \end{aligned}$$

Konstanty  $C$  a  $D$  se určí z podmínky, aby soustava (29) měla periodické řešení. K tomu je nutné a stačí, jak známo, aby

$$(31) \quad \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left[ -\beta_1 C + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) C + \left(\frac{\partial f}{\partial i_2}\right) D \right] d\tau &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \left[ -\beta_1 D + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) C + \left(\frac{\partial g}{\partial i_2}\right) D \right] d\tau &= 0, \end{aligned}$$

což je obdoba podmínek (22).

Podmínky (31) dávají po zintegrování soustavu lineárních algebraických homogenních rovnic. Tyto rovnice mají nenulové řešení pro  $C$  a  $D$  když a jen když

$$(32) \quad \begin{vmatrix} -2\pi\beta_1 + \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) d\tau, & \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial i_2}\right) d\tau \\ \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) d\tau, & -2\pi\beta_1 + \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial g}{\partial i_2}\right) d\tau \end{vmatrix} = 0.$$

Aby byla zajištěna asymptotická stabilita zkoumaného řešení, musí být reálné části kořenů  $(\beta_1)_{1,2}$ , splňující kvadratickou rovnici (32), záporné. Pro to jsou nutné a postačující dvě podmínky (dané známým Hurwitzovým kritériem)

$$(33) \quad \int_0^{2\pi} \left[ \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial g}{\partial i_2}\right) \right] d\tau < 0,$$

$$(34) \quad \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial i_2}\right) d\tau \cdot \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) d\tau - \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) d\tau \cdot \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial g}{\partial i_2}\right) d\tau < 0.$$

V našem případě jsou podmínky (33) a (34) vždy splněny, jak také bude ukázáno v odstavci 7.

## 5. FILTRACE DETEKTORU

U detektoru se vyžaduje, aby měl malý obsah harmonických složek ve výstupním napětí. Je tedy důležité posoudit, které parametry detektoru zmíněný obsah ovlivňují. Z postupu dosud uvedeného vyplývá, že ovlivnění filtrace nelze zjistit z první aproximace. První názor lze získat teprve z druhé aproximace, tj. z přibližného řešení  $u^{(0)} + \mu u^{(1)}, i_2^{(0)} + \mu i_2^{(1)}$ . Do uvedených funkcí je ovšem třeba dosadit hodnoty konstant  $U^{(1)}, I_2^{(1)}$ , odpovídající periodickým řešením, neboť nás zajímá pouze periodické řešení pro  $u$  a  $i_2$ . Tato řešení již obsahují členy s periodickými (goniometrickými) funkcemi, ze kterých lze alespoň do jisté míry usoudit na obsah harmonických složek nižších řádů. Koeficienty u zmíněných členů představují pak přímo amplitudy harmonických složek. Pro získání ještě přesnějšího názoru na obsah těchto složek nutno nalézt další (vyšší) přiblížení periodického řešení.

## 6. ROZBOR KONKRÉTNÍHO PŘÍPADU

Požadovaný interval aproximace je  $+15$  mV až  $-60$  mV. Šířka kroku  $h$  je 25 mV. Aproximace získaná výpočtem je

$$i = 0,567e^{3,43 \cdot 10^{-2}u} + 0,054e^{-6,2 \cdot 10^{-3}u} - 0,621.$$

Zkusmo byla konstanta  $\alpha_1$  pozměněna kvůli lepšímu souhlasu tak, že přesnější aproximace má tvar

$$(35) \quad i = 0,567e^{3,34 \cdot 10^{-2}u} + 0,054e^{-6,2 \cdot 10^{-3}u} - 0,621.$$

Určeme nejprve vytvořující řešení podle (21)

$$(36) \quad \begin{aligned} u^{(0)}(\tau) &= U_1 \sin \tau + U^{(0)}, \\ i_2^{(0)}(\tau) &= I_2^{(0)}. \end{aligned}$$

Amplituda sinusového vstupního (usměrňovaného) napětí je  $U_1$ .

Podmínky periodičnosti (22) jsou na základě (12), (13), (14), (21), (35) a (36)

$$(37) \quad \int_0^{2\pi} \left[ \frac{U_1 \sin \tau + U^{(0)}}{\omega R_1 R_2 C_2} + \frac{I_2^{(0)}}{\omega C_2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] d\tau = 0,$$

$$(38) \quad \int_0^{2\pi} \left[ \frac{U_1 \sin \tau + U^{(0)} + I_2^{(0)} R_2}{\omega R_1 C_1} + \frac{1}{\omega C_1} (0,567e^{3,34 \cdot 10^{-2}u} + 0,054e^{-6,2 \cdot 10^{-3}u} - 0,621) \right] d\tau = 0.$$

Po integraci dostaneme

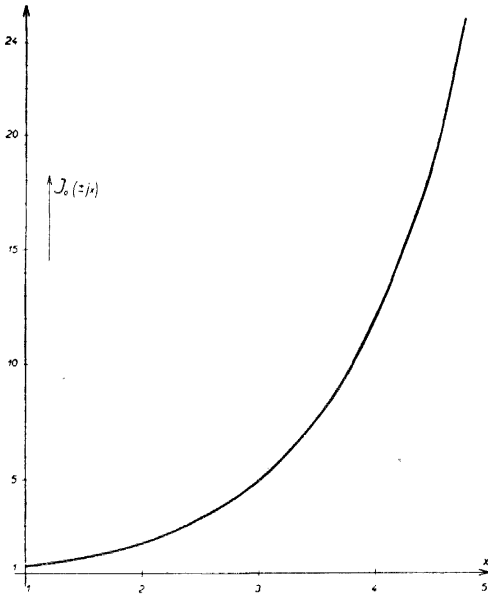
$$(39) \quad U^{(0)} = -I_2^{(0)}(R_1 + R_2),$$

$$(40) \quad \begin{aligned} I_2^{(0)} &= 0,567 J_0(j3,34 \cdot 10^{-2} U_1) e^{-3,34 \cdot 10^{-2} I_2^{(0)}(R_1 + R_2)} + \\ &+ 0,054 J_0(-j6,2 \cdot 10^{-3} U_1) \cdot e^{6,2 \cdot 10^{-3} I_2^{(0)}(R_1 + R_2)} - 0,621, \end{aligned}$$

kde značí

$J_0$  – Besselovu funkci nultého řádu, prvního druhu a  
 $j$  – imaginární jednotku.

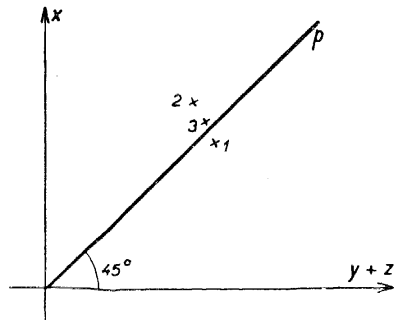
Průběh funkce  $J_0(-jx)$  je jak známo též jako průběh funkce  $J_0(jx)$  (viz obr. 5).



Obr. 5. Průběh Besselovy funkce prvního druhu, nultého řádu, imaginárního argumentu.

Při řešení detektoru je obvyčejně dáno  $U_1, R_1$  a  $R_2$ . Úlohou je nalézt  $I_2^{(0)}$ , což vede k řešení transcendentní rovnice (40). K řešení této rovnice se poměrně rychlou zdá být metoda, která bude nyní naznačena. Po vhodné transformaci výrazů obsahujících neznámou  $I_2$  lze obecně psát rovnici (40) ve tvaru

$$(41) \quad x = Ae^{-ax} + Be^{bx}.$$



Obr. 6. Pomocný graf pro řešení transcendentní rovnice  $x = Ae^{-ax} + Be^{bx}$ .

Při tom proměnná  $x$  obsahuje hledaný neznámý proud  $I_2^{(0)}$ , zatímco  $A, B, a, b$  jsou reálné konstanty obsahující parametry aproximující křivky, součet odporů  $R_1 + R_2$ . Položme dále

$$(42) \quad \begin{aligned} y &= Ae^{-ax}, \\ z &= Be^{bx}. \end{aligned}$$

Vynesme do pravouhlých souřadnic s osami označenými  $x$  a  $y + z$  a opatřených vhodným měřítkem přímku procházející počátkem pod úhlem  $45^\circ$  (obr. 6). Při řešení rovnice (41) odhadneme  $x$  a vypočteme podle (42)  $y$  a  $z$ . Součet  $y + z$  vyneseme pro volené  $x$  do pravouhlých souřadnic, čímž dostaneme bod 1, který nemusí ovšem padnout na přímku  $p$  (obr. 6). Podle polohy bodu 1 volíme popř. další, jinou hodnotu  $x$ , čímž získáme např. bod 2. Leží-li oba body blízko přímky  $p$ , spojíme je přímkou, jejíž průsečík s  $p$  udává přibližně svou svislou souřadnici řešení  $x$ . V praxi se ukázalo, že

k nalezení  $x$  stačí volit dvě, nejvýše tři hodnoty. Při volbě třech hodnot proloží se příslušné body případně vhodnou křivkou.

## 7. STABILITA PERIODICKÉHO ŘEŠENÍ

Pro posouzení stability tvořícího řešení určíme nejprve jednotlivé parciální derivace obsažené v (33) a (34)

$$(43) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = -\frac{1}{\omega R_1 C_1} - \frac{1}{\omega C_1} [\alpha_1 a_1 J_0(j\alpha_1 U_1) e^{-\alpha_1 I_2^{(0)}(R_1 + R_2)} + \alpha_2 a_2 J_0(-j\alpha_2 U_1) \cdot e^{-\alpha_2 I_2^{(0)}(R_1 + R_2)}],$$

$$(44) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial i_2}\right) = -\frac{R_2}{\omega R_1 C_1},$$

$$(45) \quad \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) = -\frac{1}{\omega R_1 R_2 C_2},$$

$$(46) \quad \left(\frac{\partial g}{\partial i_2}\right) = -\frac{1}{\omega C_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Označme pro zjednodušení výraz v závorce v (43) jako  $H$ . Podmínky asymptotické stability (33) a (34) pak mají tvar

$$(47) \quad \frac{1}{C_1} \left(H + \frac{1}{R_1}\right) + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_2} > 0,$$

$$(48) \quad 1 + H(R_1 + R_2) > 0.$$

Z následující úvahy pak plyne, že podmínky (47) a (48) jsou vždy splněny. Výraz  $H$  je totiž vždy kladný, neboť značí v podstatě derivaci proudu  $i$  podle napětí  $u$  v bodě charakteristiky  $u = -I_2^{(0)}(R_1 + R_2)$ . Jak vyplývá z funkce, která aproximuje charakteristiku diody, má tato v uvažované oblasti všude kladnou derivaci  $di/du$ . Kdyby se pracovalo v takové oblasti charakteristiky diody, která by např. vykazovala tzv. „záporný odpor“, nemusely by být podmínky (47) a (48) splněny.

## 8. OBSAH VYŠŠÍCH HARMONICKÝCH SLOŽEK

Přibližné ohodnocení výskytu vyšších harmonických složek lze provést na základě výrazů (24). Zajímá nás však jen na výstupní usměrněný proud  $i_2$ . Proud  $i_2$  v první aproximaci je

$$(49) \quad i_2^{(1)} = \frac{U \cos \tau}{\omega R_1 R_2 C_2} + I_2^{(0)} \left[ \frac{R_1 + R_2}{\omega R_1 R_2 C_2} - \frac{1}{\omega C_2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] \tau + K,$$

kde  $K$  je integrační konstanta.

Hranatá závorka je však rovna nule na základě podmínek periodičnosti (22). Podle (19) je přibližně

$$(50) \quad i_2 \doteq i_2^{(0)} + \mu i_2^{(1)}.$$

Význam malého parametru  $\mu$  lze přisoudit výrazu

$$(51) \quad \frac{R_1 + R_2}{\omega R_1 R_2 C_2},$$

jak je také vidět z výchozí soustavy (13) a (14). Bude tedy filtrace tím lepší, čím budou  $\omega$ ,  $C_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  větší. Amplituda zbytku základní harmonické složky má vzhledem k (49), (50) a (51) velikost

$$(52) \quad \frac{U_1(R_1 + R_2)}{\omega^2 R_1^2 R_2^2 C_2^2}.$$

Ovšem je to jen přibližný výsledek již s ohledem na (50). Chceme-li získat ještě přesnější výrazy, z kterých bylo by možno posoudit filtrační schopnosti filtru detektoru, nutno nalézt ještě vyšší aproximaci pro periodické řešení.

Ze vzorce (52) vidíme, že filtrace bude tím lepší, čím bude součin obou odporů  $R_1$  a  $R_2$  větší. Je-li dán jejich součet, pak nastane optimální filtrace tehdy, bude-li  $R_1 = R_2$ . Při stálém součtu obou odporů zůstane stálý i usměrněný proud (jak bylo uvedeno dříve), což bylo dokázáno i experimentálně. Někdy bývá z praktického stanoviska výhodné takové řešení, aby měl  $R_2$  velkou hodnotu. A to proto, že pak bude na  $R_2$  velký úbytek stejnosměrného napětí. Potom nemusí stejnosměrný zesilovač, jestliže jej použijeme, mnoho zesilovat. Při velkých hodnotách odporu  $R_2$  můžeme pak použít menších hodnot odporu  $R_1$ .

Na druhé straně musíme být opatrnými tehdy, požadujeme-li, aby detektor zatěžoval málo měřený obvod. I když ponecháme stranou definici takového zatížení, popř. definici vstupního odporu detektoru, je zřejmé, že takový detektor bude tím více zatěžovat měřený obvod, čím bude  $R_1$  menší. To vyplývá mimo jiné i z toho, že reaktance kapacity  $C_2$  bývá velmi malá při kmitočtech měřeného napětí.

## 9. ZÁVĚR

Jak naznačuje uvedený teoretický rozbor, bylo by možné v takových případech vypočítat i vyšší aproximace periodického řešení. Výsledků teorie, tak jak byly uvedeny, bylo použito pro řešení detektorů pro měřič mezního kmitočtu vysokofrekvenčních tranzistorů [4]. Detektory usměrňovaly malá vysokofrekvenční napětí sinusového průběhu řádu desítek mV.

### Literatura

- [1] Малкин И. Г.: Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Москва 1956.  
 [2] Крылов А. Н.: Лекции по приближенным вычислениям. Москва 1950.

[3] Малкин И. Г.: Теория устойчивости движения. Москва 1952.

[4] Vojtášek S.: Přístroj pro měření mezního kmitočtu tranzistorů v rozsahu 0,5–140 MHz. Čs. časopis fyzikální 1961, č. 1, 31–38.

## Резюме

### ДИОДНЫЙ ДЕТЕКТОР С ФИЛЬТРОМ

СТАНИСЛАВ ВОЙТАШЕК (Stanislav Vojtášek)

В работе изучается цепь детектора с полупроводниковым диодом и с присоединенным фильтром. Решение производится с точки зрения теории нелинейных дифференциальных уравнений по методу Пуанкаре. Анализируется проблема аппроксимации характеристики примененного полупроводникового диода, приводятся соотношения, определяющие установившееся состояние выходного тока детектора, и найдены условия асимптотической устойчивости этого установившегося состояния. Приближения более высокого порядка периодического решения дифференциального уравнения определяют переменную составляющую выходного тока детектора. На основании этого разбирается вопрос фильтрационных свойств фильтра за детектором. Результаты вычислений даются в удобном для практических приложений виде.

## Summary

### A DIODE DETECTOR WITH FILTER

STANISLAV VOJTÁŠEK

A detector with a semiconductor diode and a filter is examined from the view-point of non-linear differential equations, using Poincaré's small-parameter method.

First, the problem of approximation to the characteristic of the diode used is treated; then the relations determining the stationary state of the output current are established, and conditions found for its asymptotic stability. Higher-order approximations to the periodic solution determine the residual a. c. component of the output current. Using this, the filtering properties of the filter coupled to the detector are investigated.

The results of this paper have been put into a form suitable for practical calculations.