Aplikace matematiky

Václav Stach

Difuse do laminární mezní vrstvy proudícího plynu s uvážením dynamického účinku přenosu hmoty

Aplikace matematiky, Vol. 6 (1961), No. 4, 311–325

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102763`

DIFUSE DO LAMINÁRNÍ MEZNÍ VRSTVY PROUDÍCÍHO PLYNU S UVÁŽENÍM DYNAMICKÉHO ÚČINKU PŘENOSU HMOTY

VÁCLAV STACH

(Došlo dne 12. května 1960.)

V práci jsou odvozeny vztahy umožňující řešit úlohu difuse do laminární mezní vrstvy proudícího plynu s uvážením dynamického účinku přenášené hmoty, za zjednodušujícího předpokladu, že molekulové hmoty obou medií se sobě blíží. Pro malé hodnoty difusního toku je provedeno analytické řešení, umožňující stanovit podmínku zanedbatelnosti dynamického účinku a odvodit kriteriální závislosti pro přenos hmoty.

Úlohy z oboru přenosu hmoty jsou v řadě případů řešeny na základě analogie tohoto děje s přestupem tepla. Analogie však není úplná, protože nerespektuje dynamický účinek přenášené hmoty. Při teoretickém rozboru této skutečnosti je nutno pro složitost probíhajících dějů omezit se na jednoduché stylisované případy.

FORMULACE ÚLOHY

Předložená práce se zabývá problematikou isothermické difuse do laminární mezní vrstvy plynu proudícího malou rychlostí podél rovinné stěny. Vychází z úlohy popsané touto soustavou [4] (viz obr. 1):

Rovnice kontinuity směsi

$$\operatorname{div}(\rho\vec{w}) = 0\,. \tag{1}$$

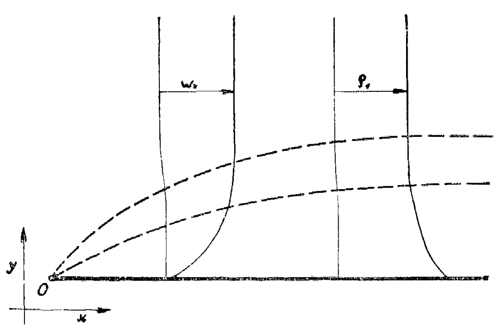
Dynamické rovnice pro směs (v Prandtlově zjednodušení)

(2) (a) $\mathrm{d}p = 0\,,$

(b) $\rho w_x \dfrac{\partial w_x}{\partial x} + \rho w_y \dfrac{\partial w_x}{\partial y} = \mu \dfrac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}\,.$

Rovnice kontinuity pro jednu ze složek

$$\operatorname{div}(\rho_1\vec{w}) + \operatorname{div}\vec{I}_1 = 0\,. \tag{3}$$



Obr. 1.

Rovnice difuse

$$\vec{I}_1 = -D_{12}\rho \operatorname{grad}\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right). \tag{4}$$

Okrajové podmínky

$$x = 0,\ 0 < y < \infty;\ w_x = w_0,\ w_y = 0;\ \rho_1 = \rho_{10},\ \rho_2 = \rho_{20}\,; \tag{5}$$

$$0 < x < \infty,\ y = \infty;\ w_x = w_0,\ w_y = 0;\ \rho_1 = \rho_{10},\ \rho_2 = \rho_{20}; \tag{6}$$

$$0 < x < \infty,\ y = 0;\ w_x = 0,\ w_{2y} = 0;\ \rho_1 = \rho_{1s}\,. \tag{7}$$

Pomocné vztahy

$$p = p_1 + p_2\,, \tag{8}$$

$$p_1 = gRT\frac{\rho_1}{M_1}\,, \tag{9}$$

$$p_2 = gRT\frac{\rho_2}{M_2}\,, \tag{10}$$

$$\rho = \rho_1 + \rho_2\,, \tag{11}$$

$$\vec{w} = \frac{\rho_1}{\rho}\vec{w}_1 + \frac{\rho_2}{\rho}\vec{w}_2\,, \tag{12}$$

$$\vec{I}_1 = \rho_1(\vec{w}_1 - \vec{w})\,. \tag{13}$$

V rovnicích značí ρ měrnou hmotu (kgm^{-4}sec^2), w rychlost (m sec^{-1}), p tlak (kg m^{-2}), D_{12} difusní součinitel (m^2sec^{-1}), μ součinitel viskosity (kgm^{-2} sec), R plynovou konstantu (m°K^{-1}), g tíhové zrychlení (m sec^{-2}), T teplotu (°K), M molekulovou váhu (1), index 1 a 2 rozlišuje složky směsi, index s označuje hodnoty na stěně, index o v okolí.

Obecný charakter vytčené úlohy je omezen, jak je patrno z rov. (2), předpokladem μ = konst. Tento předpoklad může být splněn u určitých kombinací složek směsi i pro široký rozsah změny ostatních uvažovaných proměnných parametrů.

ANALOGIE MEZI DIFUSÍ A PŘESTUPEM TEPLA

Úloha je řešena (např. [1]) pro případ $\rho_1 \ll \rho_2$, z kterého vyplývá toto její zjednodušení:

$$\rho \doteq \rho_2 = \rho_{20} = \text{konst}\,. \tag{14}$$

Rovnice kontinuity směsi

$$\operatorname{div} \vec{w} = 0\,. \tag{15}$$

Dynamické rovnice

(16) $$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2},$$

$$\mathrm{d}p = 0,$$

kde $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, je součinitel kinematické vazkosti.

Rovnice kontinuity složky

(17) $$\vec{w} \operatorname{grad} \rho_1 + \operatorname{div} \vec{I}_1 = 0.$$

Rovnice difuse

(18) $$\vec{I}_1 = -D_{12} \operatorname{grad} \rho_1.$$

Okrajové podmínky

(19) $$x = 0,\ 0 < y < \infty;\quad w_x = w_0,\ w_y = 0;\ \rho_1 = \rho_{10};$$

(20) $$0 < x < \infty,\ y = \infty;\ w_x = w_0,\ w_y = 0;\ \rho_1 = \rho_{10};$$

(21) $$0 < x < \infty,\ y = 0;\quad w_x = 0,\ w_y = 0;\quad \rho_1 = \rho_{1s}.$$

Změna ve formulaci okrajové podmínky (21) v porovnání s (7) vyplývá z (12) po zavedení (14) při uvážení, že rychlosti difuse nenabývají velkých hodnot. Důsledky (14) pro zjednodušení ostatních rovnic jsou zřejmé.

Řešení úlohy se pak rozpadne na dvě části, a to: hydrodynamickou (Blasiovu) a difusní, z nichž první je na druhé nezávislá a její řešení je známé. Spojením rovnic (17) a (18) pro D_{12} = konst. dostaneme rovnici

$$w_x \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + w_y \frac{\partial \rho_1}{\partial y} = D_{12} \left(\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial y^2} \right)$$

a po zanedbání difusního přenosu proti konvektivnímu ve směru x

(22) $$w_x \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + w_y \frac{\partial \rho_1}{\partial y} = D_{12} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial y^2};$$

zavedeme-li sem známé řešení Blasiovy úlohy ve tvaru

(23) $$w_x = \frac{1}{2} w_0 \varphi'(\eta),$$

$$w_y = \frac{1}{2} w_0 \frac{1}{\sqrt{\frac{\nu x}{w_0}}} [\eta \varphi'(\eta) - \varphi(\eta)],$$

kde (24) $\eta = \frac{1}{2} \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{w_0}}}$

a $\varphi(\eta)$ je řešením rovnice

$$\varphi'''(\eta) + \varphi''(\eta)\,\varphi(\eta) = 0 \tag{25}$$

při okrajových podmínkách

$$\begin{aligned} \eta &= 0 \quad \varphi'(\eta) = 0 \quad \varphi(\eta) = 0 \\ \eta &= \infty \quad \varphi'(\eta) = 2\,, \end{aligned} \tag{26}$$

a dále, zavedeme-li

$$\bar{\rho}_1 = \frac{\rho_1 - \rho_{1s}}{\rho_{10} - \rho_{1s}} \tag{27}$$

a předpokládáme

$$\bar{\rho}_1 = f(\eta)\,, \tag{28}$$

můžeme rovnici (22) převést na tvar

$$f''(\eta) + \frac{\nu}{D_{12}}\,\varphi(\eta)\,f'(\eta) = 0 \tag{29}$$

s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} \eta &= 0\,, \quad f(\eta) = 0\,, \\ \eta &= \infty\,, \quad f(\eta) = 1\,. \end{aligned} \tag{30}$$

V citovaném řešení [1] se zavádí $\varphi(\eta)$ ve tvaru Blasiova rozvoje

$$\varphi(\eta) = 0{,}664\eta^2 - 0{,}0147\eta^5 + 0{,}000637\eta^8 \ldots \tag{31}$$

a omezuje se na první člen tohoto rozvoje. Rov. (29) lze řešit prostými kvadraturami a pro okrajové podmínky (30) obdržet řešení

$$\bar{\rho}_1 = \frac{\Gamma_\xi(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})}\,, \tag{32}$$

kde symbol Γ_ξ označuje neúplnou gamma funkci, a

$$\xi = 0{,}221\,\frac{\nu}{D_{12}}\,\eta^3\,. \tag{33}$$

Odtud pro lokální hodnoty difusního toku lze odvodit kriteriální vztah

$$(Nu_D)_x = 0{,}338\,(Re)_x^{0,5}\,Pr_D^{1/3}\,, \tag{34}$$

kde

$$(Nu_D)_x = \frac{\beta x}{D_{12}}\,, \quad (Re)_x = \frac{w_0 x}{\nu}\,, \quad Pr_D = \frac{\nu}{D_{12}}\,,$$

$$I_{1y}|_{y=0} = \beta_x(\rho_{1s} - \rho_{10})\,,$$

a pro střední hodnoty na délce $x = l$,

$$(Nu_D)_l = 0{,}676\,(Re)_l^{0,5}\,Pr_D^{1/3}\,, \tag{35}$$

kde

$$(Nu_D)_l = \frac{\beta_l l}{D_{12}}, \quad (Re)_l = \frac{w_0 l}{\nu}.$$

Rovnice (22) je analogická rovnici Pécletově. Celá úloha popsaná vztahy (15), (16), (19) ÷ (21), (22) je analogická úloze o přestupu tepla do nestlačitelné tekutiny.

VLIV PŘENOSU HMOTY

Nelze-li položit $\rho_1 \ll \rho_2$, bude úloha složitější a analogie mezi difusí a přestupem tepla nebude zachována. Pro usnadnění řešení se budeme zabývat případem, kdy bude platit

(36) $$M_1 \to M_2 .$$

Potom v důsledku (2a), jak je vidět ze vztahů (8) ÷ (11), bude možno opět položit

(37) $$\mathrm{d}\rho = 0$$

a úloha bude popsaná rovnicemi

(38) $$\operatorname{div} \vec{w} = 0 ,$$

(39) $$\mathrm{d}p = 0 ,$$

(40) $$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2},$$

(41) $$w_x \frac{\partial \bar{\rho}_1}{\partial x} + w_y \frac{\partial \bar{\rho}_1}{\partial y} = D_{12} \frac{\partial^2 \bar{\rho}_1}{\partial y^2}$$

a okrajovými podmínkami

(42) $$x = 0, \quad 0 < y < \infty ; \quad \bar{\rho}_1 = 1; \; w_x = w_0 , \quad w_y = 0 ;$$

(43) $$y = 0, \quad 0 < x < \infty ; \quad \bar{\rho}_1 = 0; \; w_x = 0 , \quad w_{2y} = 0 ;$$

(44) $$y = \infty , \; 0 < x < \infty ; \quad \bar{\rho}_1 = 1; \quad w_x = w_0 , \quad w_y = 0 .$$

Podrobíme rozboru okrajovou podmínku (43). Požadavek

$$w_{2y}\big|_{y=0} = 0$$

znamená podle (12), že

(45) $$\rho w_y\big|_{y=0} = \rho_1 w_{1y}\big|_{y=0} ;$$

odtud za pomoci (13) a (18)

(46) $$I_{1y}\big|_{y=0} \equiv \rho w_y \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho}\right) = - D_{12} \frac{\partial \rho_1}{\partial y}\bigg|_{y=0},$$

a po úpravě

(47) $$w_y\big|_{y=0} = - D_{12} \frac{\rho_{10} - \rho_{1s}}{\rho - \rho_{1s}} \frac{\partial \bar{\rho}_1}{\partial y}\bigg|_{y=0}.$$

Předpokládáme-li řešení úlohy ve tvaru

(48) $$\bar{\rho}_1 = f(\eta)\,,$$

kde je opět

$$\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{w_0}{\nu}\right)^{1/2} \frac{y}{\sqrt{x}}\,,$$

můžeme (47) přepsat jako

$$w_y\big|_{y=0} = -\,D_{12}\,\frac{\rho_{10} - \rho_{1s}}{\rho - \rho_{1s}}\,\frac{1}{2}\left(\frac{w_0}{\nu}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{\mathrm{d}\bar{\rho}_1}{\mathrm{d}\eta}\bigg|_{\eta=0}\,,$$

aneb

(49) $$w_y\big|_{y=0} = A\,\frac{1}{2}\left(\frac{w_0}{\nu}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x}}\,,$$

kde

$$A = -\,D_{12}\,\frac{\rho_{10} - \rho_{1s}}{\rho - \rho_{1s}}\,\frac{\mathrm{d}\bar{\rho}_1}{\mathrm{d}\eta}\bigg|_{\eta=0}$$

je za uvažovaných předpokladů zřejmě konstantou.

Odvození nám umožňuje řešit hydrodynamickou část úlohy relativně samostatně, a to jako úlohu popsanou soustavou

(50) $$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0\,, \quad w_x\,\frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y\,\frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu\,\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}\,,$$

$$x = 0\,, \quad 0 < y < \infty\,; \quad w_x = w_0\,, \quad w_y = 0\,;$$

$$y = 0\,, \quad 0 < x < \infty\,; \quad w_x = 0\,, \quad w_y = A\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{w_0}{\nu}}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,;$$

$$y = \infty\,, \quad 0 < x < \infty\,; \quad w_x = w_0\,, \quad w_y = 0\,.$$

Úloha je totožná s úlohou o vyfukování do mezní vrstvy podle zákona $x^{-1/2}$ (úloha Schlichting-Bussmannova [2]). Souvislost s difusní částí problému je tu representována předem neurčenou hodnotou konstanty A.

Za použití vztahů (23) a (24) lze popis úlohy (50) přepsat do tvaru

(51) $$\begin{aligned} &\varphi'''(\eta) + \varphi''(\eta)\,\varphi(\eta) = 0\,,\\ &\eta = 0, \quad \varphi'(\eta) = 0, \quad \varphi = B\,,\\ &\eta = \infty, \quad \varphi'(\eta) = 2\,, \end{aligned}$$

kde

(52) $$B = -\,\frac{A}{\nu} = \frac{D_{12}}{\nu}\,\frac{\rho_{10} - \rho_{1s}}{\rho - \rho_{1s}}\,\frac{\mathrm{d}\bar{\rho}_1}{\mathrm{d}\eta}\bigg|_{\eta=0}\,.$$

Při řešení úlohy (51) použijme metodiky obdobné k té, jíž byla řešena úloha (25) – (26) [3], tj. budeme hledat řešení jako kombinaci mocninového rozvoje hledané funkce pro malá η s asymptotickým přiblížením řešení rovnice pro velká η.

Za předpokladu, že v okolí bodu $\eta = 0$ lze $\phi(\eta)$ rozvinout v Mac Laurinovu řadu, můžeme psát

$$\varphi(\eta) = \alpha_1 + \frac{\beta_1}{1!}\eta + \frac{\gamma_1}{2!}\eta^2 + \frac{\delta_1}{3!}\eta^3 + \frac{\varepsilon_1}{4!}\eta^4 + \ldots; \tag{53}$$

odtud za použití diferenciální rovnice a prvé okrajové podmínky z (51)

$$\varphi(\eta) = B + \frac{\gamma_1}{2!}\eta^2 - B\frac{\gamma_1}{3!}\eta^3 + \frac{B^2\gamma_1}{4!}\eta^4 - \frac{B^3\gamma_1 + \gamma_1^2}{5!}\eta^5 + \ldots \tag{54}$$

$$\varphi'(\eta) = \gamma_1\eta - \frac{B\gamma_1}{2!}\eta^2 + \frac{B^2\gamma_1}{3!}\eta^3 - \frac{B^3\gamma_1 + \gamma_1^2}{4!}\eta^4 + \frac{B^4\gamma_1 + 5B\gamma_1^2}{5!}\eta^5 \ldots,$$

$$\varphi''(\eta) = \gamma_1 - B\gamma_1\eta + \frac{B^2\gamma_1}{2!}\eta^2 - \frac{B^3\gamma_1 + \gamma_1^2}{3!}\eta^3 + \frac{B^4\gamma_1 + 5B\gamma_1^2}{4!}\eta^4 \ldots,$$

kde γ_1 má smysl integrační konstanty. Pro $B = 0$ přejdou zřejmě tyto výrazy v rozvoje Blasiovy [3].

Pro asymptotické přiblížení řešení rovnice (51) lze použít přímo vztahů Blasiových [3]. Použijme pro jednoduchost pouze prvého přiblížení, tj.

$$\varphi = 2\zeta + \omega\zeta\int_{\infty}^{\zeta} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u + \frac{\omega}{2}e^{-\zeta^2}, \tag{55}$$

$$\varphi' = 2 + \omega\int_{\infty}^{\zeta} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u,$$

$$\varphi'' = \omega e^{-\zeta^2},$$

kde

$$\zeta = \eta + \pi.$$

Integrační konstanty ω a π spolu s konstantou γ_1 lze určit spojením vztahů (54) a (55) pro vhodně volenou hodnotu proměnné η.

K tomu účelu je výhodné upravit vztahy (54) tak, že do nich obdobně jako v [3] zavedeme

$$\Phi = \gamma_1^{-1/3}\varphi, \qquad H = \gamma_1^{1/3}\eta$$

a

$$B = E\gamma_1^{1/3};$$

potom

$$\Phi = E + \frac{1}{2!}H^2 - E\frac{1}{3!}H^3 + E^2\frac{1}{4!}H^4 - (E^3 + 1)\frac{1}{5!}H^5 + \ldots, \tag{56}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}H} = H - E\frac{1}{2!}H^2 + E^2\frac{1}{3!}H^3 - (E^3 + 1)\frac{1}{4!}H^4 + (E^4 + 5E)\frac{1}{5!}H^5 \ldots,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}H^2} = 1 - EH + E^2\frac{1}{2!}H^2 - (E^3 + 1)\frac{1}{3!}H^3 + (E^4 + 5E)\frac{1}{4!}H^4 \ldots$$

a

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}H} = \gamma_1^{-2/3} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\eta}, \quad \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}H^2} = \gamma_1^{-1} \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\eta^2}.$$

Z grafického vyjádření vztahů (56) lze totiž jako v [3] odhadnout přibližné hodnoty konstant γ_1 a π před jejich poměrně pracným vyčíslením.

MEZ DYNAMICKÉHO ÚČINKU

Při malých hodnotách E je možno v rozvojích (56) zanedbat členy vyššího řádu než lineární v E. Potom se rozvoj $\Phi(H)$ bude skládat z členů Blasiových, které lze obecně psát jako

$$(-1)^n \frac{a_n}{(3n+2)!} H^{3n+2},$$

kde pro a_n platí známá rekurentní formule

$$a_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{3n-1}{3\nu} a_\nu a_{n-1-\nu} \quad (a_0 = 1),$$

a ze členů s lineárním E, pro které lze odvodit obecný tvar

$$(-1)^{n+1} E \frac{a'_n}{(3n+3)!} H^{3n+3},$$

kde

$$a'_n = a_n + \sum_{\lambda=0}^{n-1} \left[\sum_{\nu=3\lambda-1}^{3\lambda+2} \binom{3n-1}{\nu} \right] a_\lambda a'_{n-1-\lambda}.$$

Numerické hodnoty a'_n jsou

$$a'_0 = 1, \quad a'_1 = 5, \quad a'_2 = 117, \quad a'_3 = 6777,$$

$$a'_4 = 761\,405, \quad a'_5 = 147\,739\,654, \quad a'_6 = 45\,137\,819\,883,$$

atd.

Jak se lze přesvědčit, bude potom pro $(\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}H)$

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}H} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a_n}{(3n+1)!} H^{3n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} E \frac{a'_n}{(3n+2)!} H^{3n+2} \tag{57}$$

aneb

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}H} = X_1(H) + EX_2(H).$$

Pro rostoucí H blíží se $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}H$ asymptoticky určité konstantě, funkce $X_1(H)$ a $X_2(H)$ se asymptoticky blíží hodnotám h_1 a h_2. Je známo, že

$$h_1 = 1{,}67;$$

hodnotu h_2 lze určit popsaným přibližným řešením úlohy. Odhadem z průběhu $X_2(H)$ je možno stanovit

$$h_2 \doteq 1{,}3 \, .$$

Vrátíme-li se ke druhé okrajové podmínce rovnice (51) a vztahům (56) vidíme, že musí platit

$$2 \, . \, \gamma_1^{-2/3} = h_1 + Eh_2 \tag{58}$$

aneb

$$\gamma_1^{2/3} h_1 + \gamma_1^{1/3} Bh_2 - 2 = 0 \, .$$

Odtud

$$\gamma_1^{1/3} = \frac{-Bh_2 \pm (B^2 h_2^2 + 8h_1)^{1/2}}{2h_1} \; ; \tag{59}$$

fysikální smysl má zřejmě kořen s kladným znaménkem u odmocniny.

Pro stanovení hodnoty B je nutno řešit rovnici (41) s příslušnými okrajovými podmínkami (42) ÷ (44).

Za použití vztahů (48), (23) a (24) převedeme rov. (41) na rovnici

$$f''(\eta) + \frac{v}{D_{12}} \varphi(\eta) f'(\eta) = 0 \tag{60}$$

s okrajovými podmínkami

$$\eta = 0 \quad , \quad f(\eta) = 0 \, ,$$
$$\eta = \infty \, , \quad f(\eta) = 1 \, .$$

K usnadnění integrace rov. (60) omezíme se v rozvoji $\varphi(\eta)$ (54) pouze na první dva členy. Chyba, které se tím dopouštíme, nebude podstatně větší než pro řešení (32). Odtud

$$f'(\eta) = C \exp\left(-\frac{v}{D_{12}} B\eta\right) \exp\left(-\frac{1}{6}\frac{v}{D_{12}} \gamma_1 \eta^3\right) . \tag{61}$$

Pro malé hodnoty B je možno rozvinout

$$\exp\left(-\frac{v}{D_{12}} B\eta\right) = 1 - \frac{v}{D_{12}} B\eta + \left(\frac{v}{D_{12}}\right)^2 B^2 \frac{1}{2!} \eta^2 \ldots$$

a omezit se na první dva členy rozvoje. Po zavedení do (61)

$$f'(\eta) = C \exp\left(-\frac{1}{6}\frac{v}{D_{12}} \gamma_1 \eta^3\right) - C \frac{v}{D_{12}} B\eta \exp\left(-\frac{1}{6}\frac{v}{D_{12}} \gamma_1 \eta^3\right) .$$

Po integraci a zavedení okrajových podmínek dostaneme řešení ve tvaru

$$f(t) = \frac{\Gamma_t\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{v}{D_{12}} B \left(\frac{1}{6}\frac{v}{D_{12}} \gamma_1\right)^{-1/3} \Gamma_t\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{v}{D_{12}} B \left(\frac{1}{6}\frac{v}{D_{12}} \gamma_1\right)^{-1/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \, , \tag{62}$$

kde

(63) $$t = \frac{1}{6}\frac{\nu}{D_{12}}\gamma_1\eta^3 .$$

Ze vztahů (62) a (63) najdeme

(64) $$f'(\eta)|_{\eta=0} = 3\frac{\left(\frac{1}{6}\frac{\nu}{D_{12}}\gamma_1\right)^{1/3}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{\nu}{D_{12}}B\left(\frac{1}{6}\frac{\nu}{D_{12}}\gamma_1\right)^{-1/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} .$$

Označíme

$$\kappa = \frac{B\frac{\nu}{D_{12}}}{\left(\frac{1}{6}\frac{\nu}{D_{12}}\gamma_1\right)^{1/3}}$$

a zavedeme (64) do (52). Odtud

(65) $$\kappa\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) - \kappa^2\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = 3\frac{\rho_{10} - \rho_{1s}}{\rho - \rho_{1s}} .$$

Rovnice (65) svazuje hydrodynamickou část úlohy s její difusní částí. Jejím řešením dostaneme

(66) $$\kappa_{1,2} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \pm \left\{\left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^2 - 12\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\frac{\rho_{10} - \rho_{1s}}{\rho - \rho_{1s}}\right\}^{1/2}}{2\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} .$$

Fysikální smysl tu má zřejmě jen kořen se záporným znaménkem u odmocniny. Ze vztahu (66) lze odvodit podmínku zanedbatelnosti dynamického účinku přenosu hmoty ve tvaru

(67) $$12\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^2}\left|\frac{\rho_{10} - \rho_{1s}}{\rho - \rho_{1s}}\right| \ll 1$$

a s použitím numerických hodnot

(68) $$2{,}264\left|\frac{\rho_{10} - \rho_{1s}}{\rho - \rho_{1s}}\right| \ll 1 .$$

Charakteristický parametr je, jak je vidět, závislý pouze na výrazu

(69) $$R_1 = \frac{\rho_{10} - \rho_{1s}}{\rho - \rho_{1s}} ,$$

který je pro danou úlohu předem znám. Z definičního vztahu lze pak určit parametr E

$$E = \frac{B}{\gamma_1^{1/3}} = \kappa \frac{\left(\frac{\nu}{D_{12}}\right)^{2/3}}{\left(\frac{1}{6}\right)^{1/3}} \tag{70}$$

a z rovnice (58) stanovit γ_1

$$\gamma_1 = \left(\frac{2}{h_1 + E h_2}\right)^{3/2}. \tag{71}$$

Tím jsou známy všechny konstanty potřebné pro řešení.

VLIV NA DIFUSNÍ TOK

Existence kolmé složky rychlosti w na obtékané ploše způsobuje, že jako difusní tok je nutno uvažovat veličinu

$$J_{1y}\big|_{y=0} = \rho_1 w_{1y}\big|_{y=0}. \tag{72}$$

Na základě (45), (47) a (49) můžeme psát

$$J_{1y}\big|_{y=0} = -D_{12}\rho \frac{\rho_{10} - \rho_{1s}}{\rho - \rho_{1s}} \frac{1}{2}\left(\frac{w_0}{\nu}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{d\bar{\rho}_1}{d\eta}\bigg|_{\eta=0}. \tag{73}$$

Odtud zavedeme-li obdobně k (34)

$$\beta_x = \frac{J_{1y}\big|_{y=0}}{\rho_{1s} - \rho_{10}},$$

dostaneme s použitím (64)

$$(Nu_D)_x = \frac{3}{2} \frac{\left(\frac{1}{6}\frac{\nu}{D_{12}}\gamma_1\right)^{1/3}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{\nu}{D_{12}} B \left(\frac{1}{6}\frac{\nu}{D_{12}}\gamma_1\right)^{-1/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \frac{\rho}{\rho - \rho_{1s}} (\mathrm{Re})_x^{0,5} \tag{74}$$

pro lokální hodnoty difusního toku. Závislost (74) přechází pro $B = 0$ v závislost (34), zavedeme-li sem za γ_1 příslušnou hodnotu z rozvoje Blasiova.

Zavedením vztahů (65), (70), (71) můžeme (74) upravit na

$$(Nu_D)_x = 0{,}389 \left(\frac{1}{h_1 + 1{,}82 h_2 \kappa Pr_D^{2/3}}\right)^{1/2} \kappa R_2 Pr_D^{1/3} (Re)_x^{0,5}, \tag{75}$$

kde

$$R_2 = \frac{\rho}{\rho_{10} - \rho_{1s}} .$$

Pro střední hodnoty difusního toku potom dostaneme vztah

$$(76) \qquad (Nu_D)_l = 0{,}778 \left(\frac{1}{h_1 + 1{,}82 h_2 \kappa Pr_D^{2/3}} \right)^{1/2} \kappa R_2 Pr_D^{1/3} (Re)_l^{0,5} .$$

Ve srovnání se vztahy (34) a (35) přistupují ve vztazích (75) a (76) vedle Pr_D a Re další kriteria, a to

$$R_1 = \frac{\rho_{10} - \rho_{1s}}{\rho - \rho_{1s}} ,$$

které je zahrnuto v parametru κ, a

$$R_2 = \frac{\rho}{\rho_{10} - \rho_{1s}} .$$

ZÁVĚR

V případě, že se sobě blíží molekulové hmoty složek směsi, lze řešit úlohu o difusi do laminární mezní vrstvy s uvážením dynamického účinku přenášené hmoty řešením rov. (29) a (51) pomocí vztahů (52), (54) a (55).

Pro případ malého difusního toku budou řešením úlohy vztahy (62) – (63) a (75) – (76).

V těchto vztazích vystupují kromě Re a Pr_D ještě další kriteria R_1 a R_2, vytvořená z měrných hmot složek a směsi.

Podmínka zanedbatelnosti dynamického účinku difuse, tj. podmínka použitelnosti termokinetické analogie, je pro uvažovaný případ vyjádřena vztahem (67) resp. (68).

Literatura

[1] *Левич Б. Г.*: Физикохимическая гидродинамика, Москва 1952, Изд. АН СССР.

[2] *Шлихтинг Г.*: Теория пограничного слоя (překl. z něm.), Москва 1956, Изд. иностранной лит.

[3] *Blasius H.*: Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Z. f. Math. u. Phys. 56 (1908), 1.

[4] *Stach V.*: Odpařování do laminární mezní vrstvy. Disertační práce. Praha 1957, ČVUT.

Резюме

ДИФФУЗИЯ В ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ТЕКУЩЕГО ГАЗА С УЧЕТОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ ПЕРЕНОСИМОЙ МАССЫ

ВАЦЛАВ СТАХ (Václav Stach)

Задача об изотермической диффузии в ламинарном пограничном слое газа, текущего малой скоростью вдоль плоской стенки, описана для исследуемого случая уравнением

$$f''(\eta) + \frac{\nu}{D_{12}} \varphi(\eta) f'(\eta) = 0$$

с граничными условиями

$$\eta = 0\,, \quad f(\eta) = 1\,,$$
$$\eta = \infty\,, \quad f(\eta) = 0\,;$$

в этом уравнении $f(\eta)$ — безразмерная концентрация диффундирующей компоненты.

Для случая $\rho_1 \ll \rho_2$ динамическим воздействием переносимой массы можно пренебречь, $\varphi(\eta)$ представляет решение задачи Блазия в виде

$$\varphi'''(\eta) + \varphi''(\eta)\,\varphi(\eta) = 0\,,$$
$$\eta = 0\,, \quad \varphi'(\eta) = 0\,, \quad \varphi(\eta) = 0\,,$$
$$\eta = \infty\,, \quad \varphi'(\eta) = 2\,.$$

Если не имеет места $\rho_1 \ll \rho_2$, то при предположении $M_1 \to M_2$ $\varphi(\eta)$ является решением задачи Шлихтинга и Бусмана в виде

$$\varphi'''(\eta) + \varphi''(\eta)\,\varphi(\eta) = 0\,,$$
$$\eta = 0\,, \quad \varphi'(\eta) = 0\,, \quad \varphi(\eta) = B\,,$$
$$\eta = \infty\,, \quad \varphi'(\eta) = 2\,.$$

Решение можно получить в виде комбинации степенного ряда для малых η с асимптотическим приближением для больших η.

При малых значениях диффузионного потока степенной ряд для $\Phi(H)$

$$\Phi = \gamma_1^{-1/3}\varphi\,, \quad H = \gamma_1^{1/3}\eta\,,$$

содержит члены Блазия в известном виде

$$(-1)^n \frac{a_n}{(3n+2)!} H^{3n+2}\,,$$

и члены первой степени в E ($E = \gamma_1^{-1/3}B$) в виде

$$(-1)^{n+1} E \frac{a_n'}{(3n+3)!} H^{3n+3}\,,$$

где

$$a'_n = a_n + \sum_{\lambda=0}^{n-1} \left[\sum_{\nu=3\lambda-1}^{3\lambda+2} \binom{3n-1}{\nu} \right] a_\lambda a'_{n-1-\lambda} .$$

Применяя первые два члена ряда, можно вывести условие пренебрежения динамическим воздействием переноса масы в виде

$$2{,}264 \left| \frac{\rho_{10} - \rho_{1s}}{\rho - \rho_{1s}} \right| \ll 1 ,$$

и критериальное уравнение для средней величины диффузионного потока с учетом нормальной составляющей скорости на стенке в виде

$$Nu_D = 0{,}778 \left(\frac{1}{h_1 + 1{,}82 h_2 \kappa Pr_D^{2/3}} \right)^{0,5} \kappa R_2 Pr_D^{1/3} Re^{0,5} .$$

В этом уравнении Nu_D зависит не только от критериев Pr_D и Re, но и от критерия

$$R_1 = \frac{\rho_{10} - \rho_{1s}}{\rho - \rho_{1s}} ,$$

функцией которого является параметр κ, и от критерия

$$R_2 = \frac{\rho}{\rho_{10} - \rho_{1s}} .$$

Summary

THE DIFFUSION IN A LAMINAR BOUNDARY LAYER OF A STREAMING GAS, CONSIDERING THE DYNAMICAL EFFECT OF THE TRANSFERRED MASS

Václav Stach

The problem of isothermal diffusion in a laminar boundary layer of a gas streaming with low velocity along plate wall is described for the case considered by the following equation:

$$f''(\eta) + \frac{\nu}{D_{12}} \varphi(\eta) f'(\eta) = 0 ,$$

with boundary conditions

$$\eta = 0 , \quad f(\eta) = 1 ,$$
$$\eta = \infty , \quad f(\eta) = 0 ,$$

where $f(\eta)$ is the dimensionless concentration of diffusing component.

In the case $\rho_1 \ll \rho_2$ it is possible to neglect the dynamical effect of the transferred mass, and $\varphi(\eta)$ is the solution of Blasius' problem in the form

$$\varphi'''(\eta) + \varphi''(\eta)\,\varphi(\eta) = 0\,,$$
$$\eta = 0\,,\quad \varphi'(\eta) = 0\,,\quad \varphi(\eta) = 0\,,$$
$$\eta = \infty\,,\quad \varphi'(\eta) = 2\,.$$

If not $\rho_1 \ll \rho_2$ it is possible – for the case that $M_1 \to M_2$ – to find $\varphi(\eta)$ as the solution of Schlichting-Bussmann's problem in the form

$$\varphi'''(\eta) + \varphi''(\eta)\,\varphi(\eta) = 0\,,$$
$$\eta = 0\,,\quad \varphi'(\eta) = 0\,,\quad \varphi(\eta) = B\,,$$
$$\eta = \infty\,,\quad \varphi'(\eta) = 2\,.$$

The solution can be found in the form of a combination of a power series for small η and of an asymptotic approximation for large η.

For small values of diffusion flux, the power series for $\Phi(H)$, where

$$\Phi = \gamma_1^{-1/3}\varphi\,,\quad H = \gamma_1^{1/3}\eta\,,$$

is composed of well known Blasius' terms in the form

$$(-1)^n \frac{a_n}{(3n+2)!} H^{3n+2}$$

and of the terms, linear in E $(E = \gamma_1^{-1/3}B)$ in the form

$$(-1)^{n+1} E \frac{a'_n}{(3n+3)!} H^{3n+3}\,,$$

where

$$a'_n = a_n + \sum_{\lambda=0}^{n-1} \left[\sum_{\nu=3\lambda-1}^{3\lambda+2} \binom{3n-1}{\nu} \right] a_\lambda a'_{n-1-\lambda}\,.$$

Using the first and second terms of the series, the dynamical effect of mass transfer may be neglected if

$$2{,}264 \left| \frac{\rho_{10} - \rho_{1s}}{\rho - \rho_{1s}} \right| \ll 1\,;$$

the expression for the mean value of the Nusselt number involving the effect of the velocity component at right angle to the surface is

$$Nu_D = 0{,}778 \left(\frac{1}{h_1 + 1{,}82 h_2 \kappa Pr_D^{2/3}} \right)^{0,5} \kappa R_2 Pr_D^{1/3} Re^{0,5}\,.$$

According to this expression, Nu_D depends, beside Pr_D and Re, on two other numbers which are

$$R_1 = \frac{\rho_{10} - \rho_{1s}}{\rho - \rho_{1s}}\,,$$

which is involved in the parameter κ, and

$$R_2 = \frac{\rho}{\rho_{10} - \rho_{1s}}\,.$$