Aplikace matematiky

Josef Matušů

O jednom typu integrálu, u něhož se projevuje tzv. „Gibbsův zjev"

Aplikace matematiky, Vol. 6 (1961), No. 4, 245–262

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102758

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1961

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

ČLÁNKY

O JEDNOM TYPU INTEGRÁLU, U NĚHOŽ SE PROJEVUJE TZV. „GIBBSŮV ZJEV“

JOSEF MATUŠŮ

(Došlo dne 31. března 1960.)

V práci je dokázána existence Gibbsova zjevu u jistého typu integrálu, jehož speciálním případem je integrál Fourierův.

1. ÚVOD

Dne 6. října 1898 uveřejnil významný fyzik A. A. MICHELSON v časopisu [1] (viz seznam literatury na konci) krátký článek o Fourierových řadách. V článku se zkoumala souvislost mezi součtem Fourierovy řady a jejími částečnými součty v blízkosti bodu nespojitosti funkce, reprezentované Fourierovou řadou. O týden později, tedy 13. října 1898, vyšel v témže časopisu jiný článek, který se zabýval stejnou problematikou. Autorem tohoto článku byl A. E. H. LOVE. Love v podstatě popíral Michelsonovy vývody a uváděl některá vlastní hlediska, týkající se problému. 29. listopadu téhož roku byla pak v časopisu [1] otištěna kratičká odpověď Michelsonova na článek Loveův, ve kterém Michelson upozorňoval na některé nelogičnosti, kterých se Love ve svém článku dopustil. V témže sešitu ze dne 29. listopadu 1898 byl pak otištěn ještě jeden příspěvek ke zmíněnému problému, jehož autorem byl J. W. GIBBS. Gibbsova analýza problému byla již detailnější a přesnější (nutno poznamenat, že měla rovněž víceméně experimentální charakter podobně jako práce obou již jmenovaných autorů), nebyla však ještě zcela bez chyby, na kterou později upozornil Love. 14. dubna 1899 uveřejnil Gibbs v časopisu [1] korekci chyby, kterou, jak sám přiznal, udělal z „nedbalosti“.

To je stručný historický přehled jedné problematiky z oboru Fourierových řad, která je dnes známa pod názvem *Gibbsův zjev*. Připomeňme si v hrubých rysech, o co tu jde.

Funkce f mějž periodu např. 2π a variaci konečnou v nějakém intervalu $\langle a, b\rangle$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. Fourierova řada funkce f je potom konvergentní v každém bodě $t \in (a, b)$ a má součet $\{f(t+) + f(t-)\}/2$. Je-li teď c jistý bod uvnitř tohoto intervalu a je-li $f(c+) \neq f(c-)$ (ve všech ostatních bodech tohoto intervalu budiž f spojitá), je součet Fourierovy řady funkce f funkce nespojitá v bodě c. Pak ovšem tato řada nemůže konvergovat stejnoměrně v žádném okolí $(c - \delta, c + \delta)$ $(\delta > 0)$ bodu c, tj. její částečné součty $s_m(t)$ se i při velkém indexu v některém bodě (resp. bodech) tohoto intervalu „značně" liší od hodnoty $f(t)$. Nejzajímavější na této skutečnosti je však to, že příslušné „převýšení" je vždy přibližně 9% z absolutní hodnoty $|f(c+) - f(c-)|$ skoku $f(c+) - f(c-)$ funkce f v bodě nespojitosti c. A to je podstata tzv. Gibbsova zjevu (konkrétně v případě Fourierových řad).

Jak známo, existuje velmi úzká souvislost mezi Fourierovou řadou a tzv. Fourierovým integrálem dané funkce f (splňující jisté podmínky):

$$F(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega(\tau - t) \, d\tau \right) d\omega \,. \tag{1}$$

Říká se také, že Fourierův integrál (1) je „spojitou analogií" příslušné Fourierovy řady funkce f. Lze tudíž očekávat Gibbsův zjev také u Fourierova integrálu, tj. jinými slovy lze očekávat, že „převýšení" $|F_A(t) - f(t)|$ křivky f křivkou

$$F_A(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{A} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega(\tau - t) \, d\tau \right) d\omega$$

bude v určitých bodech (závislých také na zvoleném $A \in (0, +\infty)$), ležících „blízko" u bodu c nespojitosti funkce f, přibližně konstantní (s jistou chybou, kterou dovedeme učinit vhodnou volbou čísla A libovolně malou; předpokládá se, že v těchto bodech $F(t) = f(t)$). Skutečně, Gibbsův zjev u Fourierova integrálu existuje a projevuje se analogickými charakteristickými vlastnostmi jako u Fourierovy řady. To je známo (viz např. [2]). V knižní literatuře není však Gibbsův zjev u Fourierova integrálu systematicky zpracován. Objeví se jen tu a tam stručné zmínky, připomínající existenci tohoto zjevu, a to hlavně v učebnicích teoretických základů sdělovací techniky (viz např. [3]). Na tuto skutečnost upozornil ve svém semináři, konaném v roce 1958, prof. dr. ZD. PÍRKO. Z jeho popudu vznikla pak tato práce.

Bylo poznamenáno, že Gibbsův zjev u Fourierova integrálu se uvádí hlavně v učebnicích teoretických základů sdělovací techniky. Pro lepší informaci zmíníme se v té souvislosti v hrubých rysech o jednom problému sdělovací techniky.

Za tím účelem uvažujme nějaký lineární čtyřpól N (viz obr. 1), na jeho vstupu pak určitou vhodnou (tj. jistým podmínkám vyhovující) časovou funkci (signál) $e_1(t)$. Zajímá nás pak např. příslušná napěťová odezva $e_2(t)$ čtyřpólu N na daný signál $e_1(t)$. Značí-li nyní $g(\omega) = G(\omega) \exp(\mathrm{j}\, \varphi(\omega))$ $(\mathrm{j} = +\sqrt{(-1)})$ Fourierovu transformantu funkce $e_1(t)$, $Y_{12}(\omega)$ komplexní přenosovou admitanci a $h(\omega) = Y_{12}(\omega)\, Z_R(\omega) = H(\omega) \exp(-\mathrm{j}\, \Theta(\omega))$ tzv. přenos napětí uvažovaného čtyřpólu N (zatěžovací impedance $Z_R(\omega)$ a rovněž tak přenosová admitance $Y_{12}(\omega)$ jsou jisté vhodné funkce argumentu ω), pak platí, že funkce $G(\omega)\, H(\omega) \exp\{\mathrm{j}(\varphi(\omega) - \Theta(\omega))\}$ je Fourierovou transformantou napěťové odezvy $e_2(t)$. S pomocí této transformanty můžeme pak (zpětnou Fourierovou transformací) restituovat hledanou časovou funkci $e_2(t)$:

$$e_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)\, H(\omega)\, e^{\mathrm{j}\{\omega t + \varphi(\omega) - \Theta(\omega)\}} \, d\omega \,. \tag{2}$$

V případě tzv. ideálního čtyřpólu s ideálními přenosovými vlastnostmi

$$H(\omega) = \begin{cases} k = \text{konst.} \neq 0 & \text{pro } |\omega| < A,\ 0 < A < +\infty\,, \\ 0 & \text{pro } |\omega| > A\,, \end{cases} \quad \Theta(\omega) = \omega t_d\,, \quad t_d = \text{konst.}$$

přejde (2) ve tvar

$$e_2(t) = k \int_{-A}^{A} g(\omega)\, e^{j\omega(t - t_d)}\, d\omega = k F_A(t - t_d)\,.$$

A tedy funkce $e_2(t)$ je až na multiplikativní konstantu k vyjádřena integrálem

$$F_A(t - t_d) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e_1(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau \right) e^{j\omega(t - t_d)}\, d\omega =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{A} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e_1(\tau) \cos \omega(\tau - t + t_d)\, d\tau \right) d\omega\,,$$

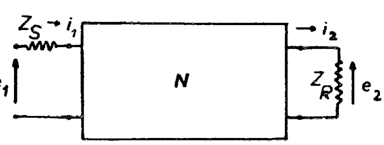
který aproximuje Fourierův integrál funkce $e_1(t - t_d)$:

$$e_1(t - t_d) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e_1(\tau) \cos \omega(\tau - t + t_d)\, d\tau \right) d\omega\,.$$

Předpokládejme nyní, že $e_1(t)$ je signál s určitou časovou nespojitostí (s konečným skokem) v bodě $t = c$. Bude pak „převýšení"

$$\left| \frac{k}{\pi} \int_{0}^{A} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e_1(\tau) \cos \omega(\tau - t + t_d)\, d\tau \right) d\omega - k e_1(t - t_d) \right|$$

křivky $k e_1(t - t_d)$ křivkou $(k/\pi) \int_0^A (\int_{-\infty}^{+\infty} e_1(\tau) \cos \omega(\tau - t + t_d)\, d\tau)\, d\omega$ v určitých bodech (závislých také na zvoleném $A \in (0, +\infty)$), ležících „blízko" u bodu $c + t_d$, přibližně konstantní (s jistou chybou $\Delta(A)$, kde $|\Delta(A)|$ je nejvýše rovno danému číslu $\varepsilon > 0$, a to pro všechna „dosti velká" A).



Obr. 1.

Místo integrálu (1) budeme obecněji uvažovat integrál

$$F(t) = K \int_{0}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, g'\{\omega(\tau - t)\}\, d\tau \right) d\omega\,, \tag{3}$$

kde $g'(t)$ značí derivaci funkce $g(t)$ podle proměnné t; $K \neq 0$ je nějaké konečné (reálné) číslo. Je potom (1) speciální případ (3) pro $g(t) = \sin t$ a $K = 1/\pi$.

2. NĚKTERÉ DEFINICE A VĚTY

Přidržíme se symboliky užívané v [4]. Funkcí budeme rozumět reálnou funkci reálného argumentu; za funkční hodnoty připustíme též $\pm\infty$. Integrál budeme pojímat ve smyslu Lebesgueově. Půjde nám hlavně o konvergentní Lebesgueovy integrály. Mimo tyto absolutně konvergentní integrály budeme potřebovat též integrály nevlastní (neabsolutně konvergentní), tj. jinými slovy budeme potřebovat též tzv. zobecněné integrály. O těchto zobecněných integrálech viz např. [4]. Písmeno A bude v dalším značit vždy spojitou proměnnou, nabývající jen konečných kladných hodnot.

Budeme se zabývat dvěma případy. Řekneme, že pro funkci f nastává případ I, jestliže $f \in \mathbf{L}(-\infty, +\infty)$. Řekneme, že pro funkci f nastává případ II, jestliže $f \in \mathbf{L}(-b', b')$ pro každé konečné $b' > 0$; mimoto $\lim_{t \to \pm\infty} f(t) = 0$ a existuje konečné $b > 0$ tak, že f má variaci konečnou jak v intervalu $\langle b, +\infty)$ tak i v intervalu $(-\infty, -b\rangle$ (viz [4], str. 525).

Dokážeme především následující

Lemma. *Budiž* $0 < b < +\infty$, $\gamma \in \mathbf{E}_1$. *V intervalu* $\langle b, +\infty)$ *měǰž* f *variaci konečnou, dále nechť* $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$. *Nechť* $g \in \mathbf{L}(\alpha, \beta)$ *v oboru* $T(|\alpha| < +\infty, \alpha \leqq \beta < +\infty)$ *a nechť existuje konečné* $S > 0$ *tak, že* $|\int_\alpha^\beta g(t)\,\mathrm{d}t| \leqq S$ *v oboru* T. *Potom zobecněný integrál* $\int_b^{+\infty} f(t)\, g\{A(t-\gamma)\}\,\mathrm{d}t$ *konverguje (dokonce stejnoměrně vzhledem k* $A \geqq A_0 > 0$ *a* $\gamma \in \mathbf{E}_1$, *kde* A_0 *je libovolné, pevně zvolené číslo).*

Důkaz. Vzhledem k tomu, že f má variaci konečnou v intervalu $\langle b, +\infty)$ a že dále $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$, můžeme rozepsat $f = \psi_1 - \psi_2$, kde ψ_1, ψ_2 jsou funkce nezáporné a nerostoucí v intervalu $\langle b, +\infty)$ a $\lim_{t \to +\infty} \psi_i(t) = 0$ $(i = 1, 2)$. Budiž $b \leqq \lambda < \mu < +\infty$. Pro $i = 1, 2$ existuje pak číslo $\xi_i \in \langle\lambda, \mu\rangle$ tak,[1]) že

$$\int_\lambda^\mu \psi_i(t)\, g\{A(t-\gamma)\}\,\mathrm{d}t = \psi_i(\lambda) \int_\lambda^\xi g\{A(t-\gamma)\}\,\mathrm{d}t\,,$$

tj.

$$\left|\int_\lambda^\mu \psi_i(t)\, g\{A(t-\gamma)\}\,\mathrm{d}t\right| \leqq \psi_i(\lambda)\frac{S}{A} \leqq \psi_i(\lambda)\frac{S}{A_0}\,. \tag{1}$$

Budiž dáno číslo $\varepsilon > 0$. Jelikož $\lim_{\lambda \to +\infty} \psi_i(\lambda) = 0$ $(i = 1, 2)$, existuje číslo $B \in \langle b, +\infty)$ tak, že $\psi_i(\lambda) \leqq \varepsilon A_0/S$ pro všechna $\lambda \geqq B$ $(i = 1, 2)$. A tedy ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $B \in \langle b, +\infty)$ tak, že pro $i = 1, 2$ platí:

$$(B \leqq \lambda \leqq \mu < +\infty,\ A \geqq A_0 > 0,\ \gamma \in \mathbf{E}_1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left|\int_\lambda^\mu \psi_i(t)\, g\{A(t-\gamma)\}\,\mathrm{d}t\right| \leqq \varepsilon\,.$$

[1]) [4], str. 200.

Odtud vyplývá, že zobecněný integrál $\int_b^{+\infty} \psi_i(t)\, g\{A(t - \gamma)\}\, dt$ konverguje ($i = 1, 2$) dokonce stejnoměrně vzhledem k $A \geqq A_0 > 0$ a $\gamma \in \mathbf{E}_1$. Konverguje pak také zobecněný integrál $\int_b^{+\infty} f(t)\, g\{A(t - \gamma)\}\, dt$ dokonce stejnoměrně vzhledem k $A \geqq A_0 > 0$ a $\gamma \in \mathbf{E}_1$.

Platí nyní

Věta. *Pro funkci f nechť nastává některý z případů* I, II. *Budiž $\gamma \in \mathbf{E}_1$ a budiž g funkce omezená v $\mathbf{E}_1$. Nechť existuje konečné $S > 0$ tak, že $|\int_\alpha^\beta g(t)\, dt| \leqq S$ v oboru* $(|\alpha| < +\infty,\ \alpha \leqq \beta < +\infty)$. *Potom*

$$\lim_{A \to +\infty} \int_\alpha^\beta f(t)\, g\{A(t - \gamma)\}\, dt = 0 \tag{2}$$

v oboru $U(|\alpha| \leqq +\infty,\ \alpha \leqq \beta \leqq +\infty)$ (*v případech* $-\infty = \alpha < \beta < +\infty$, $-\infty < \alpha < \beta = +\infty$, $-\infty = \alpha < \beta = +\infty$ *se jedná popřípadě o konvergentní zobecněný integrál*); *konvergence je stejnoměrná vzhledem k* $(\alpha, \beta) \in U$ *a* $\gamma \in \mathbf{E}_1$.

Důkaz. Věta platí, jestliže pro funkci f nastává případ I.[2])

Pro funkci f nechť tedy nastává případ II. Omezíme se zatím na obor $U_+(0 \leqq \alpha \leqq \leqq \beta \leqq +\infty)$ a dokážeme první část věty. Je-li $\alpha = \beta$, je tvrzení triviální (klademe $\int_{+\infty}^{+\infty} = 0$). Nechť tedy $\alpha < \beta < +\infty$. Potom $f \in \mathbf{L}(\alpha, \beta)$ a tvrzení je správné.[2]) Tedy v tomto případě (2) platí v oboru $(0 \leqq \alpha < \beta < +\infty)$.

Zbývá ještě případ $\beta = +\infty$, $\alpha \in \langle 0, +\infty)$. Položme $\varphi(t, A) = f(t)\, g\{A(t - \gamma)\}$. Pro každé $b' \in (\alpha, +\infty)$ je potom[2])

$$\lim_{A \to +\infty} \int_\alpha^{b'} \varphi(t, A)\, dt = 0\,.$$

Dále je

$$\lim_{b' \to +\infty} \int_\alpha^{b'} \varphi(t, A)\, dt = \int_\alpha^{+\infty} \varphi(t, A)\, dt$$

dokonce stejnoměrně vzhledem k $A \geqq A_0 > 0$ (stačí se omezit na případ $\alpha \geqq b$, načež užijeme předchozího lemmatu). A tedy

$$\lim_{A \to +\infty} \int_\alpha^{+\infty} \varphi(t, A)\, dt = \lim_{A \to +\infty} \int_\alpha^{+\infty} f(t)\, g\{A(t - \gamma)\}\, dt = 0\,.$$ [3])

Tím je tvrzení dokázáno.

Dokážeme teď druhou část věty (opět se omezíme na obor U_+). Víme (viz (1), kde místo λ, μ klademe α, β), že pro $b \leqq \alpha < \beta < +\infty$ je

$$\left| \int_\alpha^\beta f(t)\, g\{A(t - \gamma)\}\, dt \right| \leqq \frac{S}{A_0} \{\psi_1(\alpha) + \psi_2(\alpha)\}$$

stejnoměrně vzhledem k $A \geqq A_0 > 0$ a $\gamma \in \mathbf{E}_1$. Budiž dáno číslo $\varepsilon > 0$. Existuje pak

[2]) [4], věta 181; stačí sledovat důkaz této věty, kde místo $\cos \mu x$ se uvažuje funkce $g\{A(t - \gamma)\}$.

číslo $B \in \langle b, +\infty)$tak, že $|\psi_1(\alpha) + \psi_2(\alpha)| \leqq \varepsilon A_0/S$ pro všechna $\alpha \geqq B$. A tedy ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $B \in \langle b, +\infty)$ tak, že

$$(3) \qquad (B \leqq \alpha \leqq \beta < +\infty,\ A \geqq A_0 > 0,\ \gamma \in \mathbf{E}_1) \Rightarrow \Rightarrow \left|\int_\alpha^\beta f(t)\, g\{A(t-\gamma)\}\, dt\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dále je[2])

$$\lim_{A \to +\infty} \int_\alpha^\beta f(t)\, g\{A(t-\gamma)\}\, dt = 0,$$

kde konvergence je stejnoměrná vzhledem k $(\alpha, \beta) \in M(0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq B)$ a $\gamma \in \mathbf{E}_1$. To tedy znamená, že existuje číslo $A_1 > 0$ tak, že pro všechna $A \geqq A_1$ je

$$(4) \qquad \left|\int_\alpha^\beta f(t)\, g\{A(t-\gamma)\}\, dt\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2},$$

kde $(\alpha, \beta) \in M$, $\gamma \in \mathbf{E}_1$.

Označme $N(B \leqq \alpha \leqq \beta < +\infty)$, $P(0 \leqq \alpha \leqq \beta < +\infty)$. Je-li nyní $(\alpha, \beta) \in P$, $\gamma \in \mathbf{E}_1$, pak nastane některý z těchto případů:

1) $(\alpha, \beta) \in M$, načež pro všechna $A \geqq A_1 > 0$ platí (4).

2) $(\alpha, \beta) \in N$, načež pro všechna $A \geqq A_0 > 0$ platí (3).

3) $(\alpha, \beta) \in P - (M \cup N)$, tj. $(\alpha, B) \in M$, $(B, \beta) \in N$. Jelikož je $\int_\alpha^\beta f(t)\, g\{A(t-\gamma)\}\,.\, dt = \int_\alpha^B + \int_B^\beta$, plyne ze vztahů (3), (4), že

$$(5) \qquad \left|\int_\alpha^\beta f(t)\, g\{A(t-\gamma)\}\, dt\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

pro všechna $A \geqq \operatorname{Max}(A_0, A_1)$.

Tím je tedy zjištěno (viz (3), (4), (5)), že ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $A_2 > 0$ tak, že pro všechna $A \geqq A_2$ je

$$(6) \qquad \left|\int_\alpha^\beta f(t)\, g\{A(t-\gamma)\}\, dt\right| \leqq \varepsilon,$$

kde $(\alpha, \beta) \in P$, $\gamma \in \mathbf{E}_1$. To tedy znamená, že konvergence ve (2) je stejnoměrná vzhledem k $(\alpha, \beta) \in P$ a $\gamma \in \mathbf{E}_1$.

Jelikož platí (6) pro všechna $A \geqq A_2 > 0$, a to nezávisle na $(\alpha, \beta) \in P$ a $\gamma \in \mathbf{E}_1$, musí též

$$\left|\lim_{\beta \to +\infty} \int_\alpha^\beta f(t)\, g\{A(t-\gamma)\}\, dt\right| = \left|\int_\alpha^{+\infty} f(t)\, g\{A(t-\gamma)\}\, dt\right| \leqq \varepsilon$$

pro všechna $A \geqq A_2 > 0$, a to nezávisle na $\alpha \in \langle 0, +\infty)$ a $\gamma \in \mathbf{E}_1$. Tím je tedy dokázáno, že konvergence ve (2) je stejnoměrná vzhledem k $(\alpha, \beta) \in U_+$ a $\gamma \in \mathbf{E}_1$.

[3]) [4], věta 113, kde klademe $F \sim 0$ v intervalu $\langle \alpha, +\infty)$.

Je nyní patrno, že charakter požadavků, kladených na funkci f, je vzhledem k počátku $t = 0$ souměrný. V důsledku toho platí (2) také v oboru $U_-(-\infty \leqq \alpha \leqq \beta \leqq \leqq 0)$, přičemž konvergence je stejnoměrná vzhledem k $(\alpha, \beta) \in U_-$ a $\gamma \in \mathbf{E}_1$.

Závěr důkazu věty je nyní již snadný. Je-li $(\alpha, \beta) \in U$ a $\gamma \in \mathbf{E}_1$, pak nastane některý z těchto případů:

1) $(\alpha, \beta) \in U_-$, načež (2) platí; konvergence je přitom stejnoměrná vzhledem k $(\alpha, \beta) \in U_-$ a $\gamma \in \mathbf{E}_1$.

2) $(\alpha, \beta) \in U_+$, načež (2) platí; konvergence je přitom stejnoměrná vzhledem k $(\alpha, \beta) \in U_+$ a $\gamma \in \mathbf{E}_1$.

3) $(\alpha, \beta) \in U - (U_+ \cup U_-)$, tj. $(\alpha, 0) \in U_-$, $(0, \beta) \in U_+$. Jelikož $\int_\alpha^\beta f(t)\, g\{A(t - \gamma)\}\, \mathrm{d}t = \int_\alpha^0 + \int_0^\beta$, plyne odtud, že (2) platí; konvergence je přitom stejnoměrná vzhledem k $(\alpha, \beta) \in U - (U_+ \cup U_-)$ a $\gamma \in \mathbf{E}_1$.

Skutečně tedy platí (2) v oboru $U = U_+ \cup U_- \cup (U - (U_+ \cup U_-))$, přičemž konvergence je stejnoměrná vzhledem k $(\alpha, \beta) \in U$ a $\gamma \in \mathbf{E}_1$ (sjednocení konečného počtu oborů a v každém z nich je konvergence stejnoměrná). Tím je věta zcela dokázána.

3. INTEGRÁLY $F_A(t)$, $F(t)$

Pro funkci f nechť nastává některý z případů I, II. O funkci g budeme předpokládat, že je 1) spojitá, omezená a lichá v $\mathbf{E}_1$ a že 2) derivace g' existuje v $\mathbf{E}_1$ a je tam spojitá a omezená. Řekneme potom, že pro funkci g nastává případ P_{12}. Existuje-li dále konečné číslo $S > 0$ tak, že $|\int_\alpha^\beta g(t)\, \mathrm{d}t| \leqq S$ v oboru $(|\alpha| < +\infty, \alpha \leqq \beta < +\infty)$, pak řekneme, že pro funkci g nastává případ P_{123}.

Je $\lim\limits_{t \to 0} g(t)/t = \lim\limits_{t \to 0} g'(t) = g'(0)$. Bod $t = 0$ není tedy „nepříjemným" bodem funkce $g(t)/t$. V intervalu $\langle 0,1 \rangle$ je $g(t)/t$ omezená. Je g omezená v intervalu $(1, +\infty)$ a tedy tím spíše funkce $g(t)/t$. A tedy existuje konečné $C > 0$ tak, že $|g(t)/t| \leqq C$ v intervalu $\langle 0, +\infty)$, tj. $|g(t)| \leqq C|t|$ (dokonce pro všechna t).

Ze vztahu $|\int_\alpha^\beta g(t)\, \mathrm{d}t| \leqq S$ plyne dále,[4]) že zobecněný integrál $\int_0^{+\infty} [g(t)/t]\, \mathrm{d}t$ konverguje; hodnotu tohoto integrálu budeme značit R.

Budiž $t \in \mathbf{E}_1$. Půjde nám o integrál

$$F_A(t) = K \int_0^A \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, g'\{\omega(\tau - t)\}\, \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}\omega\,, \tag{1}$$

kde $K \neq 0$ je nějaké konečné číslo. Pro funkci f nechť nastává případ I, pro funkci g případ P_{12}. Vnitřní integrál v (1) je zřejmě konvergentní Lebesgueův integrál, který podle věty 107 z [4] je spojitou (a konečnou) funkcí ω v intervalu $\langle 0, A \rangle$. Je potom také vnější integrál v (1) konvergentní Lebesgueův. Dále je

$$\iint\limits_{\substack{\omega \in \langle 0, A \rangle \\ \tau \in \mathbf{E}_1}} |f(\tau)\, g'\{\omega(\tau - t)\}|\, \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}\omega \leqq mA \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\tau)|\, \mathrm{d}\tau < +\infty\,,$$

[4]) [4], věta 112.

kde m značí supremum funkce $|g'|$ v $\mathbf{E}_1$. Lze tedy užít Fubiniovy věty:

$$F_A(t) = K\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^A f(\tau)\, g'\{\omega(\tau - t)\}\,\mathrm{d}\omega\right)\mathrm{d}\tau =$$
$$= K\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,\frac{g\{A(\tau - t)\}}{\tau - t}\,\mathrm{d}\tau = K\int_{-\infty}^{+\infty} f(t + \tau)\,\frac{g(A\tau)}{\tau}\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Pro funkci f nechť nastává případ II, pro funkci g případ P_{12}. Je $|\int_\alpha^\beta g'(t)\,\mathrm{d}t| = |g(\beta) - g(\alpha)| \leqq 2n$ v oboru $(|\alpha| < +\infty, \alpha \leqq \beta < +\infty)$, kde n značí supremum funkce $|g|$ v $\mathbf{E}_1$. Konverguje pak zobecněný integrál $\int_b^{+\infty} f(\tau)\, g'\{\omega(\tau - t)\}\,\mathrm{d}\tau$ (viz lemma z odst. 2); zřejmě konverguje též zobecněný integrál $\int_{-\infty}^{-b}$ a rovněž tak (Lebesgueův) integrál $\int_{-b}^{b}$. Tedy vnitřní integrál v (1) je konvergentní zobecněný integrál.

Pro funkci f nechť nastává případ II, pro funkci g případ P_{123}. Je-li $0 < a < A$, je funkce $H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, g'\{\omega(\tau - t)\}\,\mathrm{d}\tau$ spojitá (a tedy omezená) v intervalu $\langle 0, A\rangle$. Integrál $F_{A,a}(t) = K\int_a^A H(\omega)\,\mathrm{d}\omega = K\int_a^A \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, g'\{\omega(\tau - t)\}\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}\omega$ je tudíž konvergentní Lebesgueův integrál. Lze nyní dokázat,[5]) že existuje konečná limita $\lim\limits_{a \to 0+} F_{A,a}(t)$. To tedy znamená, že také vnější integrál v (1) je popřípadě konvergentní zobecněný integrál.

Nastává-li tedy pro funkci f případ I (II) a pro funkci g případ P_{12} (P_{123}), pak integrál (1) je vždy konvergentní (buď jako Lebesgueův nebo jako zobecněný integrál). Jeho hodnota je pokaždé

$$F_A(t) = K\int_{-\infty}^{+\infty} f(t + \tau)\,\frac{g(A\tau)}{\tau}\,\mathrm{d}\tau.^{5)} \tag{2}$$

Tento integrál je popřípadě také zobecněný integrál.

Můžeme nyní (2) rozepsat ve tvaru $F_A(t) = \int_{-\infty}^{0} + \int_0^{+\infty}$. Podle věty o substituci pro Lebesgueův resp. konvergentní zobecněný integrál je $\int_{-\infty}^{0} = \int_0^{+\infty} [f(t - \tau)\,.\, g(A\tau)/\tau]\,\mathrm{d}\tau$. A tedy

$$F_A(t) = K\int_0^{+\infty} \{f(t + \tau) + f(t - \tau)\}\frac{g(A\tau)}{\tau}\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{3}$$

Poznámka 1. Pro funkci f nechť nastává případ I (II), pro funkci g případ P_{12} (P_{123}). V obou případech je $F_A(t)$ spojitou funkcí t v $\mathbf{E}_1$. V prvním případě plyne to snadno z věty 107 (viz [4]); v druhém případě je třeba užít ještě věty 114. Zvolíme pevné $t = t_0$, dále pak určíme číslo $b > 0$ tak, aby $t_0 < b$ a aby v intervalu $\langle b, +\infty)$ platilo $f = \psi_1 - \psi_2$ (viz lemma a příslušný důkaz v odst. 2). Snadno se dokáže, že pro $i = 1, 2$ je zobecněný integrál $\int_b^{+\infty} \psi_i(\tau)\,[g\{A(\tau - t)\}/(\tau - t)]\,\mathrm{d}\tau$ spojitou funkcí v bodě t_0, načež pak integrál $\int_b^{+\infty} f(\tau)\,[g\{A(\tau - t)\}/(\tau - t)]\,\mathrm{d}\tau$ (viz (2), kde v integrandu místo τ klademe $\tau - t$) je spojitou funkcí v bodě t_0. Totéž platí pro integrály $\int_{-\infty}^{-b}$, $\int_{-b}^{b}$. Tím je pak dokázáno, že $F_A(t)$ je spojitou funkcí v bodě t_0. Jelikož t_0 může být libovolný bod z $\mathbf{E}_1$, plyne odtud, že $F_A(t)$ je spojitou funkcí v $\mathbf{E}_1$.

---

[5]) [4], stačí sledovat str. 526—530, kde místo sinu a kosinu klademe g a g'.

Poznámka 2. Pro funkci f nechť nastává případ II, pro funkci g nechť platí předpoklady lemmatu z odst. 2. V intervalech $\langle b, +\infty)$ a $(-\infty, -b\rangle$ má tedy f variaci konečnou $(0 < b < +\infty)$. Budiž $t \in \mathbf{E}_1$. Funkce $f(t + \tau)$ argumentu τ má potom variaci konečnou v intervalu $\langle b - t, +\infty)$, funkce $f(t - \tau)$ téhož argumentu má variaci konečnou v intervalu $\langle b + t, +\infty)$. Zvolíme-li konečné $b^* \geqq \operatorname{Max}(|b - t|, |b + t|)$ (tedy $0 < b^* < +\infty$), bude mít funkce $h(\tau) = f(t + \tau) + f(t - \tau)$ konečnou variaci v intervalu $\langle b^*, +\infty)$. Také je $\lim_{\tau \to +\infty} h(\tau) = 0$. A tedy konverguje zobecněný integrál $\int_{b^*}^{+\infty} h(\tau)\, g(A\tau)\, \mathrm{d}\tau$ (viz lemma z odst. 2 pro $\gamma = 0$). Budiž $0 < \delta < +\infty$. Zřejmě konverguje též zobecněný integrál $\int_{\delta}^{+\infty} h(\tau)\, g(A\tau)\, \mathrm{d}\tau$.

Platí nyní

Věta 1. *Pro funkci f nechť nastává některý z případů* I, II, *pro funkci g případ* P_{123}. *Budiž $0 < \delta < +\infty$, označme*

$$F_A(t, \delta) = K \int_0^{\delta} \{f(t + \tau) + f(t - \tau)\} \frac{g(A\tau)}{\tau}\, \mathrm{d}\tau$$

(totéž K jako ve výrazu (1)*). Potom*

$$\lim_{A \to +\infty} (F_A(t) - F_A(t, \delta)) = 0\,; \tag{4}$$

konvergence je stejnoměrná vzhledem k $t \in \mathbf{E}_1$.

Důkaz. Položme $h(\tau) = f(t + \tau) + f(t - \tau)$. Je potom (viz (3))

$$F_A(t) - F_A(t, \delta) = K \int_{\delta}^{+\infty} h(\tau) \frac{g(A\tau)}{\tau}\, \mathrm{d}\tau\,,$$

kde integrál $\int_{\delta}^{+\infty} h(\tau)\, g(A\tau)\, \mathrm{d}\tau$ je popřípadě konvergentní zobecněný integrál (viz poznámka 2). Funkce $1/\tau$ je v intervalu $\langle \delta, +\infty)$ konečná, nezáporná a nerostoucí. A tedy existuje číslo $\xi \in \langle \delta, +\infty\rangle$ tak (viz poznámka 3), že

$$F_A(t) - F_A(t, \delta) = \frac{K}{\delta} \int_{\delta}^{\xi} h(\tau)\, g(A\tau)\, \mathrm{d}\tau\,.$$

Je $(t + \tau = \omega)$

$$\int_{\delta}^{\xi} f(t + \tau)\, g(A\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_{t+\delta}^{t+\xi} f(\omega)\, g\{A(\omega - t)\}\, \mathrm{d}\omega\,.$$

A tedy podle věty z odst. 2

$$\lim_{A \to +\infty} \int_{\delta}^{\xi} f(t + \tau)\, g(A\tau)\, \mathrm{d}\tau = \lim_{A \to +\infty} \int_{t+\delta}^{t+\xi} f(\omega)\, g\{A(\omega - t)\}\, \mathrm{d}\omega = 0\,,$$

kde konvergence je stejnoměrná vzhledem k $t \in \mathbf{E}_1$. Analogicky $(t - \tau = \omega)$

$$\int_{\delta}^{\xi} f(t - \tau)\, g(A\tau)\, \mathrm{d}\tau = -\int_{t-\delta}^{t-\xi} f(\omega)\, g\{A(t - \omega)\}\, \mathrm{d}\omega =$$

$$= \int_{t-\delta}^{t-\xi} f(\omega)\, g\{A(\omega - t)\}\, \mathrm{d}\omega\,.$$

A tedy opět

$$\lim_{A\to+\infty}\int_\delta^\xi f(t-\tau)\,g(A\tau)\,\mathrm{d}\tau = \lim_{A\to+\infty}\int_{t-\delta}^{t-\xi} f(\omega)\,g\{A(\omega-t)\}\,\mathrm{d}\omega = 0\,,$$

kde konvergence je stejnoměrná vzhledem k $t\in\mathbf{E}_1$. Odtud již vyplývá, že platí (4), kde konvergence je stejnoměrná vzhledem k $t\in\mathbf{E}_1$.

Poznámka 3. Snadno lze dokázat, že platí: Budiž $a\in\mathbf{E}_1$, funkce φ budiž konečná, nezáporná a nerostoucí v intervalu $\langle a, +\infty)$. Budiž $f\in\mathbf{L}(a, b')$ pro každé $b'\in(a,+\infty)$ a nechť zobecněný integrál $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ konverguje. Potom existuje číslo $\xi\in\langle a, +\infty\rangle$ tak, že $\int_a^{+\infty} f(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(a)\int_a^\xi f(t)\,\mathrm{d}t$.

Budiž $t\in\mathbf{E}_1$. Půjde nám nyní o integrál (totéž K jako v (1))

$$F(t) = K\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,g'\{\omega(\tau-t)\}\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}\omega\,. \tag{5}$$

Budeme předpokládat, že pro funkci f nastává případ I (II) a pro funkci g případ P_{12} (P_{123}). Zřejmě je integrál (5) konvergentní (buď jako Lebesgueův nebo jako zobecněný integrál) tehdy a jen tehdy, jestliže existuje konečná limita $\lim\limits_{A\to+\infty} F_A(t)$, načež $F(t) = \lim\limits_{A\to+\infty} F_A(t)$.

Platí

Věta 2.[6]) *Pro funkci f nechť nastává některý z případů* I, II, *pro funkci g případ* P_{123} ($R \neq 0$). *Funkce f mějž dále variaci konečnou v intervalu $\langle a, b\rangle$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. Potom platí:*

1) *V každém bodě $t\in(a, b)$ je integrál* (5) *pro* $K = 1/2R$ *konvergentní a jeho hodnota je* $\{f(t+) + f(t-)\}/2$.

2) *Je-li kromě toho f spojitá v $\langle a, b\rangle$, je $\lim\limits_{A\to+\infty} F_A(t) = F(t)$ dokonce stejnoměrně v každém intervalu $\langle a+\lambda, b-\lambda\rangle$, kde $0 < \lambda < (b-a)/2$.*

Důkaz. Budiž $0 < \delta < +\infty$. Podle věty 1 (pro $K = 1/2R$)

$$F_A(t) = \frac{1}{2R}\int_0^\delta \{f(t+\tau) + f(t-\tau)\}\,\frac{g(A\tau)}{\tau}\,\mathrm{d}\tau + \mu_A(t,\delta)\,,$$

kde $\lim\limits_{A\to+\infty}\mu_A(t,\delta) = 0$ stejnoměrně vzhledem k $t\in\mathbf{E}_1$. Je $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^\delta [g(A\tau)/\tau]\,\mathrm{d}\tau = R$ a tedy ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $A_0 > 0$ tak, že pro všechna $A \geqq A_0$

$$\left|\frac{1}{R}\int_0^\delta \frac{g(A\tau)}{\tau}\,\mathrm{d}\tau - 1\right| \leqq \varepsilon\,.$$

[6]) Věta 2 je přímá analogie známého kritéria Dirichletova-Jordanova (viz [4], věta 185).

Výraz $\{f(t+) + f(t-)\}/2$ je omezenou funkcí $t \in (a, b)$ (předpokládá se, že f má variaci konečnou v $\langle a, b\rangle$). Tedy $|\{f(t+) + f(t-)\}/2| \leqq N$ pro $t \in (a, b)$. A tedy

$$\left|\frac{1}{2R}\int_0^\delta \{f(t+) + f(t-)\} \frac{g(A\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau - \frac{f(t+) + f(t-)}{2}\right| \leqq \varepsilon N$$

pro všechna $A \geqq A_0$ a libovolné $t \in (a, b)$. To tedy znamená, že

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2R}\int_0^\delta \{f(t+) + f(t-)\} \frac{g(A\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau + \eta_A(t, \delta),$$

kde $\lim_{A \to +\infty} \eta_A(t, \delta) = 0$ stejnoměrně vzhledem k $t \in (a, b)$. Položíme-li nyní

$$\Delta_A(t) = F_A(t) - \frac{f(t+) + f(t-)}{2},$$

bude

$$\Delta_A(t) = \frac{1}{2R}\int_0^\delta \{(f(t + \tau) - f(t+)) + (f(t - \tau) - f(t-))\} \frac{g(A\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau + \varrho_A(t, \delta),$$

kde

$$\lim_{A \to +\infty} \varrho_A(t, \delta) = \lim_{A \to +\infty} (\mu_A(t, \delta) - \eta_A(t, \delta)) = 0$$

stejnoměrně vzhledem k $t \in (a, b)$. Nutno teď dokázat:

1) Pro každé $t \in (a, b)$ je $\lim_{A \to +\infty} \Delta_A(t) = 0$.

2) Je-li f spojitá v $\langle a, b\rangle$, je pro každé $\lambda \in (0, (b - a)/2)$ $\lim_{A \to +\infty} \Delta_A(t) = 0$ dokonce stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle a + \lambda, b - \lambda\rangle$.

1) Má f variaci konečnou v $\langle a, b\rangle$, tedy $f = \psi_1 - \psi_2$, kde ψ_1, ψ_2 jsou funkce omezené a nerostoucí v $\langle a, b\rangle$. Z rovnice $f(t + h) = \psi_1(t + h) - \psi_2(t + h)$ plyne pro $h \to 0+$ resp. $h \to 0-$:

$$\begin{aligned} f(t+) &= \psi_1(t+) - \psi_2(t+) \quad \text{pro} \quad a \leqq t < b, \\ f(t-) &= \psi_1(t-) - \psi_2(t-) \quad \text{pro} \quad a < t \leqq b. \end{aligned}$$

Je-li teď $t \in (a, b)$ a je-li δ zvoleno tak, že $a < t - \delta < t + \delta < b$, lze integrál ve výrazu $\Delta_A(t)$ rozepsat ve čtyři integrály: $i = 1, 2$,

$$I_i = \frac{1}{2R}\int_0^\delta \{\psi_i(t + \tau) - \psi_i(t+)\} \frac{g(A\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau,$$

$$I_{i+2} = \frac{1}{2R}\int_0^\delta \{\psi_i(t - \tau) - \psi_i(t-)\} \frac{g(A\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau.$$

Existuje nyní číslo $\xi \in \langle -\delta, 0\rangle$ (a tedy číslo $-\xi \in \langle 0, \delta\rangle$) tak,[1]) že

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2R}\{\psi_1(t + \delta) - \psi_1(t+)\}\int_{-\delta}^{\xi} \frac{g(A\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau = \\ &= \frac{1}{2R}\{\psi_1(t + \delta) - \psi_1(t+)\}\int_{-\xi}^{\delta} \frac{g(A\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

A tedy[7])

$$|I_1| = \frac{1}{2|R|} |\psi_1(t + \delta) - \psi_1(t+)| \left| \int_{-\xi}^{\delta} \frac{g(A\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau \right| \leqq$$
$$\leqq \frac{S + C}{2|R|} |\psi_1(t + \delta) - \psi_1(t+)| .$$

Podobně v dalších případech: $|I_2| \leqq (S + C) |\psi_2(t + \delta) - \psi_2(t+)|/2|R|$, $|I_{i+2}| \leqq \leqq (S + C) |\psi_i(t - \delta) - \psi_i(t-)|/2|R|$, $i = 1, 2$.

Budiž nyní $t \in (a, b)$ pevně zvolené. Budiž dáno číslo $\varepsilon > 0$. Určíme číslo δ tak, aby $a < t - \delta < t + \delta < b$ a aby také výrazy $(S + C) |\psi_i(t \pm \delta) - \psi_i(t\pm)|/2|R|$ byly nejvýše rovny číslu $\varepsilon/5$, $i = 1, 2$. Bude pak absolutní hodnota integrálu ve výrazu $\Delta_A(t)$ nejvýše $4\varepsilon/5$. Při tomto δ zvolíme dále číslo $A_0 > 0$ tak, aby pro všechna $A \geqq A_0$ bylo $|\varrho_A(t, \delta)| \leqq \varepsilon/5$. Bude pak $|\Delta_A(t)| \leqq \varepsilon$ pro všechna $A \geqq A_0$, čímž je tvrzení dokázáno.

2) Budiž nyní f spojitá v $\langle a, b\rangle$, takže též ψ_1, ψ_2 jsou spojité v $\langle a, b\rangle$. Nechť $a < < a + \lambda < b - \lambda < b$ a nechť je dáno číslo $\varepsilon > 0$. Číslo $\delta > 0$ zvolme především menší než λ, načež pro $t \in \langle a + \lambda, b - \lambda\rangle$ bude $t \pm \delta \in \langle a, b\rangle$, a současně takové, aby $|\psi_i(t \pm \delta) - \psi_i(t\pm)| \leqq 2|R|\varepsilon/5(S + C)$, $i = 1, 2$ (ψ_1, ψ_2 jsou stejnoměrně spojité v $\langle a, b\rangle$). Při této volbě čísla δ je pak $|I_i|$ nejvýše $\varepsilon/5$ ($i = 1, 2, 3, 4$), takže absolutní hodnota integrálu ve výrazu $\Delta_A(t)$ je nejvýše $4\varepsilon/5$, a to nezávisle na čísle A a na $t \in \langle a + \lambda, b - \lambda\rangle$. Při tomto δ lze dále zvolit číslo $A_0 > 0$ tak, aby pro všechna $A \geqq A_0$ a všechna $t \in (a, b)$ platilo $|\varrho_A(t, \delta)| \leqq \varepsilon/5$. Pak ovšem $|\Delta_A(t)| \leqq \varepsilon$ pro všechna $A \geqq A_0$ a každé $t \in \langle a + \lambda, b - \lambda\rangle$. Tím je dokázáno tvrzení 2) a tím také celá věta.

4. GIBBSŮV ZJEV U INTEGRÁLU $F(t)$

Budiž $c \in \mathbf{E}_1$, $0 < \vartheta < +\infty$. Nechť $h(t) = -\frac{1}{2}$ pro $c - \vartheta < t < c$, $h(t) = \frac{1}{2}$ pro $c < t < c + \vartheta$ a nechť $h(t) = 0$ ve všech ostatních bodech množiny $\mathbf{E}_1$. Pro funkci g nechť nastává případ P_{123}. Položme $\Phi(t) = K\int_0^t [g(\tau)/\tau] \,\mathrm{d}\tau$ (totéž K jako ve výrazu (1) z odst. 3, kde klademe $f = h$). Položíme-li nyní ve větě 1 z odst. 3 $\delta = \vartheta/2$, $t = c + \xi$, $|\xi| \leqq \vartheta/2$, přesvědčíme se, že $F_A(c + \xi, \vartheta/2) = \Phi(A\xi)$, načež podle tvrzení této věty $\lim_{A\to+\infty} (F_A(c + \xi) - \Phi(A\xi)) = 0$, kde konvergence je stejnoměrná vzhledem ke $\xi \in \in \langle -\vartheta/2, \vartheta/2\rangle$.

Pro funkci g nechť nastává případ P_{123} ($R \neq 0$). Řekneme, že funkce g má v bodě $t = s > 0$ vlastnost $\mathrm{G}(s, r, R)$, jestliže platí toto: Funkce $\Phi(t) = (\int_0^t [g(\tau)/\tau] \,\mathrm{d}\tau)/2R$ (tedy $K = 1/2R$) má v bodě $t = s$ hodnotu $r \neq \frac{1}{2}$. Číslo $|r - \frac{1}{2}|$ udává potom „převýšení“ $\Phi(t)$ v bodě $t = s$ vzhledem k hodnotě $\frac{1}{2}$. V případě funkce $\Phi(A\xi)$ projevuje se „převýšení“ v bodech $\xi = \pm s/A$ (při znaménku minus vzhledem k hodnotě $-\frac{1}{2}$), které je rovněž $|r - \frac{1}{2}|$ ($\Phi(A\xi)$ je totiž lichá funkce argumentu ξ).

[7]) Snadno lze dokázat, že $\left|\int_\alpha^\beta [g(At)/t] \,\mathrm{d}t\right| \leqq S + C$ např. v oboru ($0 \leqq \alpha \leqq \beta < +\infty$).

K danému ϑ lze nyní najít číslo $A_0 > 0$ tak, že pro všechna $A \geqq A_0$ je $\xi = \pm s/A \in \langle -\vartheta/2, \vartheta/2 \rangle$. Bylo dokázáno, že $\lim_{A \to +\infty} (F_A(c + \xi) - \Phi(A\xi)) = 0$ stejnoměrně vzhledem ke $\xi \in \langle -\vartheta/2, \vartheta/2 \rangle$. To tedy znamená, že ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje jisté číslo $A_1 \geqq A_0$ tak, že pro všechna $A \geqq A_1$ a libovolné $\xi \in \langle -\vartheta/2, \vartheta/2 \rangle$ je $|F_A(c + \xi) - \Phi(A\xi)| \leqq \varepsilon$. A tudíž hodnota $F_A(c + \xi)$ pro $\xi = \pm s/A$ je tedy – až na jistou chybu $\Delta(A)$, kde $|\Delta(A)| \leqq \varepsilon$ – pro všechna $A \geqq A_1$ rovna $\pm r$ (zde i v dalším odpovídají si vždy horní a dolní znaménka).

Funkce h má v intervalu $c - \vartheta/2 \leqq t \leqq c + \vartheta/2$ variaci konečnou, takže podle věty 2 z odst. 3 integrál $F(t)$ funkce h je konvergentní v tomto intervalu a má hodnotu $\operatorname{sgn}(t - c)/2$ (oproti větě 2 z odst. 3 můžeme z pochopitelných důvodů místo otevřeného intervalu $c - \vartheta/2 < t < c + \vartheta/2$ uvažovat uzavřený interval). Je funkce $h(t) = h(c + \xi)$ nespojitá v bodě $\xi = 0$ intervalu $-\vartheta/2 \leqq \xi \leqq \vartheta/2$, takže $\lim_{A \to +\infty} F_A(c + \xi) = \operatorname{sgn} \xi/2$ nemůže platit stejnoměrně v žádném okolí bodu $\xi = 0$ (funkce $F_A(c + \xi)$ jsou spojité v intervalu $-\vartheta/2 \leqq \xi \leqq \vartheta/2$ pro každé A, viz poznámka 1 z odst. 3), tj. $F_A(c + \xi)$ se i při velkém A v některém bodě (resp. bodech) tohoto intervalu bude „značně“ lišit od hodnoty $\operatorname{sgn} \xi/2$. A zde se již začíná projevovat *Gibbsův zjev* u integrálu $F(t)$ funkce h. Body $\xi \neq 0$, v nichž i při velkém A se projevuje „značná“ odchylka hodnoty $F_A(c + \xi)$ od hodnoty $\operatorname{sgn} \xi/2$, jsme zjistili. Jsou to body $\xi = \pm s/A$. Příslušné „převýšení“ je přibližně $|r - \frac{1}{2}|$. Výsledky, ke kterým jsme prozatím dospěli, můžeme nyní z důvodů větší přehlednosti zformulovati tímto způsobem:

Závěr 1. *Budiž $c \in \mathbf{E}_1$, $0 < \vartheta < +\infty$. Nechť $h(t) = -\frac{1}{2}$ pro $c - \vartheta < t < c$, $h(t) = \frac{1}{2}$ pro $c < t < c + \vartheta$ a nechť $h(t) = 0$ ve všech ostatních bodech množiny $\mathbf{E}_1$. Pro funkci g nechť nastává případ P_{123} $(R \neq 0)$, dále nechť g má vlastnost $\mathrm{G}(s, r, R)$ v bodě $t = s > 0$. Budiž dáno číslo $\varepsilon > 0$. Existuje pak jisté kladné číslo A_1 – závislé na několika parametrech – tak, že „převýšení“ $|F_A(c \pm s/A) \mp \frac{1}{2}|$ křivky h křivkou F_A v bodech $t = c \pm s/A$ je až na jistou chybu $\Delta(A)$, kde $|\Delta(A)| \leqq \varepsilon$, pro všechna $A \geqq A_1$ rovno $100|r - \frac{1}{2}|\,\%$ z absolutní hodnoty skoku funkce h v bodě nespojitosti $t = c$.*

Poznámka 1. Nechť jsou splněny předpoklady závěru 1. Snadno se přesvědčíme (omezujeme se na hodnoty $\xi \in \langle -\vartheta/2, \vartheta/2 \rangle$), že

$$F_A(c + \xi) - \Phi(A\xi) = -\frac{1}{2}\,\Phi(A(\vartheta + \xi)) + \frac{1}{2}\,\Phi(A(\vartheta - \xi)) = -\frac{1}{4R}\int_{\vartheta - \xi}^{\vartheta + \xi} \frac{g(A\tau)}{\tau}\,\mathrm{d}\tau\,.$$

A tedy[1])

$$|F_A(c + \xi) - \Phi(A\xi)| = \frac{1}{4|R|}\left|\int_{\vartheta - |\xi|}^{\vartheta + |\xi|} \frac{g(A\tau)}{\tau}\,\mathrm{d}\tau\right| \leqq \frac{S}{4A|R|(\vartheta - |\xi|)} \leqq \frac{S}{2A|R|\vartheta}\,.$$

Platí tedy $S/2A|R|\vartheta \leqq \varepsilon$ pro všechna $A \geqq S/2\varepsilon|R|\vartheta$. V závěru 1 můžeme tedy položit $A_1 = \operatorname{Max}(2s/\vartheta, S/2\varepsilon|R|\vartheta)$.

Předcházející úvahy lze zobecnit. Budiž opět $c \in \mathbf{E}_1$. Předpokládejme, že pro funkci f platí $f(c+) - f(c-) = d$, $0 < |d| < +\infty$, tj. že f má v bodě $t = c$ nespojitost

1. druhu. Ve všech ostatních bodech jistého intervalu $\langle c - w, c + w\rangle$ $(0 < w < +\infty)$ budiž f spojitá a nechť tam má variaci konečnou. Funkce h nechť splňuje předpoklady uvedené na začátku tohoto odstavce; číslo ϑ zvolme tak, aby $0 < \vartheta < 2w$. Předpokládejme ještě, že pro funkci f nastává některý z případů I, II.

Položme $f(t) - d\,h(t) = k(t)$ (ve všech bodech, kde levá strana má smysl). Je $\lim_{t\to c+} k(t) = f(c+) - d/2 = (f(c-) + d) - d/2 = f(c-) + d/2$, $\lim_{t\to c-} k(t) = f(c-) + d/2$, tedy existuje konečná limita funkce k v bodě $t = c$. Položíme-li $k(c) = \lim_{t\to c} k(t)$, bude k spojitá v celém intervalu $\langle c - w, c + w\rangle$. Zřejmě má k variaci konečnou v intervalu $\langle c - w, c + w\rangle$. Dále nastává-li pro funkci f některý z případů I, II, nastává týž případ také pro funkci k, tedy pro funkci k nastává některý z případů I, II.

Uvažujme interval $\langle c - w + \lambda, c + w - \lambda\rangle$, kde $\lambda = w - \vartheta/2$ (tedy $0 < \lambda < w$). Pro funkci g nechť nastává případ P_{123} $(R \neq 0)$, dále nechť g má vlastnost $G(s, r, R)$ v bodě $t = s > 0$. Lze najít číslo $A_0 > 0$ tak, že pro všechna $A \geqq A_0$ je $\xi = \pm s/A \in \langle -\vartheta/2, \vartheta/2\rangle$. Víme, že $\lim_{A\to+\infty} (F_A^{dh}(t) - d\,\Phi(A(t - c)) = 0$ stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle c - w + \lambda, c + w - \lambda\rangle$ (znakem F_A^{dh} rozumíme nyní, že v integrálu F_A – viz vzorec (1) v odst. 3 – klademe $f = dh$; podobně v ostatních případech). To tedy znamená, že ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje jisté číslo $A_1 \geqq A_0$ tak, že pro všechna $A \geqq A_1$ a libovolné $t \in \langle c - w + \lambda, c + w - \lambda\rangle$ je $|F_A^{dh}(t) - d\,\Phi(A(t - c))| \leqq \varepsilon/2$. A tudíž hodnota $F_A^{dh}(t)$ pro $t = c \pm s/A$ je tedy – až na jistou chybu $\Delta_1(A)$, kde $|\Delta_1(A)| \leqq \varepsilon/2$ – pro všechna $A \geqq A_1$ rovna $\pm dr$.

Podle věty 2 z odst. 3 je $\lim_{A\to+\infty} F_A^k(t) = k(t)$, kde konvergence je stejnoměrná vzhledem k $t \in \langle c - w + \lambda, c + w - \lambda\rangle$. To znamená, že existuje jisté číslo $A_2 \geqq A_1$ tak, že pro všechna $A \geqq A_2$ a libovolné $t \in \langle c - w + \lambda, c + w - \lambda\rangle$ je $|F_A^k(t) - k(t)| \leqq \leqq \varepsilon/2$. V intervalu $\langle c - w + \lambda, c + w - \lambda\rangle$ lze tedy křivku $F_A^k(t)$ – až na jistou chybu $\Delta_2(A)$, kde $|\Delta_2(A)| \leqq \varepsilon/2$ – nahradit křivkou $k(t)$, a to pro všechna $A \geqq A_2$. A tedy hodnotu $F_A(c \pm s/A) = F_A^{dh}(c \pm s/A) + F_A^k(c \pm s/A)$, kde $A \geqq A_2$, lze potom nahradit hodnotou $\pm dr + k(c \pm s/A)$. Chyba $\Delta(A)$, které se přitom dopustíme, bude v absolutní hodnotě nejvýše rovna číslu ε. Pro všechna $A \geqq A_2$ bude pak

$$(1)\qquad F_A\left(c \pm \frac{s}{A}\right) - f\left(c \pm \frac{s}{A}\right) =$$
$$= \pm dr + k\left(c \pm \frac{s}{A}\right) + \Delta(A) - f\left(c \pm \frac{s}{A}\right) =$$
$$= \pm dr - dh\left(c \pm \frac{s}{A}\right) + \Delta(A) = \pm d\left(r - \frac{1}{2}\right) + \Delta(A),$$

kde $|\Delta(A)| \leqq \varepsilon$. Omezíme-li se teď na hodnoty $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 = |d|\,|r - \frac{1}{2}|$, bude $\operatorname{sgn}(F_A(c \pm s/A) - f(c \pm s/A)) = \operatorname{sgn}(\pm d(r - \frac{1}{2}))$, tj. $|F_A(c \pm s/A) - f(c\pm s/A)| =$

$= |d|\,|r - \frac{1}{2}| + \delta$, kde δ je popřípadě až na znaménko rovno $\Delta(A)$. Získané výsledky můžeme nyní z důvodů větší přehlednosti zformulovati tímto způsobem:

Závěr 2. *Budiž $c \in \mathbf{E}_1$. Funkce f budiž nespojitá v bodě $t = c$, nechť $f(c+) - f(c-) = d$, $0 < |d| < +\infty$. Ve všech ostatních bodech jistého intervalu $\langle c - w, c + w\rangle$ $(0 < w < +\infty)$ budiž f spojitá a nechť tam má variaci konečnou. Předpokládejme dále, že pro funkci f nastává některý z případů* I, II. *Pro funkci g nechť nastává případ P_{123} $(R \neq 0)$, dále pak nechť g má vlastnost $G(s, r, R)$ v bodě $t = s > 0$. Budiž $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 = |d|\,|r - \frac{1}{2}|$. Existuje pak jisté kladné číslo A_2 — závislé na několika parametrech — tak, že „převýšení“*

$$\left|\frac{1}{2R}\int_0^A\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(f(\tau)\, g'\left\{\omega\left(\tau - c \mp \frac{s}{A}\right)\right\}\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}\omega - f\left(c \pm \frac{s}{A}\right)\right|$$

křivky f křivkou F_A v bodech $t = c \pm s/A$ je až na jistou chybu $\Delta(A)$, kde $|\Delta(A)| \leqq \varepsilon$, pro všechna $A \geqq A_2$ rovno $100|r - \frac{1}{2}|\,\%$ z absolutní hodnoty skoku funkce f v bodě nespojitosti $t = c$.

Poznámka 2. Tato poznámka se vztahuje k závěru 2 (rovněž pak k textu, jehož důsledkem je tento závěr). Jelikož $\vartheta/2 = w - \lambda$, můžeme položit (viz poznámka 1) $A_1 = \mathrm{Max}\,(s/(w - \lambda), S|d|/4(w - \lambda)\,\varepsilon|R|)$. Předpokládejme nyní, že jsme určitým způsobem zjistili, že pro jisté $A_2 \geqq A_1$ — kde nyní $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 = |d|\,|r - \frac{1}{2}|$ — platí tvrzení závěru 2. S tímto A_2 platí pak tvrzení závěru 2 pro všechna $A \geqq A_2$. Vodítkem, kde asi takové A_2 hledat, může být právě ono $\mathrm{Max}\,(s/(w - \lambda), S|d|/4(w - \lambda)\,.\,\varepsilon\,|R|)$.

Hlavní výsledek této práce je obsažen v závěru 2. Budiž poznamenáno, že třída funkcí g s vlastnostmi „$G(s, r, R) + P_{123}$ $(R \neq 0)$“ není prázdná. Patří tam např. funkce $\sin t$, $\sin^3 t$, $J_1(t)$ (Besselova funkce 1. druhu a 1. řádu) a další. V příslušných integrálních vyjádřeních $F(t)$ projeví se pak pokaždé *Gibbsův zjev*. V případě funkce $\sin t$ obdržíme Gibbsův zjev u Fourierova integrálu. Vzhledem k důležitosti tohoto případu pozdržíme se u něho chvíli. Užíváme týchž označení jako dříve.

Tedy v případě funkce $g(t) = \sin t$ je $R = \pi/2$, takže $\Phi(t) = (\int_0^t [\sin \tau/\tau]\,\mathrm{d}\tau)/\pi$, $\Phi'(t) = \sin t/\pi t$. Pro první $s > 0$ (je to $s = \pi$), pro něž $\Phi'(s) = 0$, je extrém (maximum) funkce Φ roven iracionálnímu číslu $r = 0{,}58a_1a_2 \ldots a_n + \Delta$ ($a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou další dekadické číslice), kde např. záporné Δ je větší než $-\,0{,}08a_1a_2 \ldots a_n$; bude pak $r > \frac{1}{2}$. Je (viz (1)) $|F_A(c \pm \pi/A) - f(c \pm \pi/A)| = |d|\,|r - \frac{1}{2}| + \delta = |d|\,|0{,}08a_1a_2 \ldots a_n + \Delta| + \delta = 0{,}08a_1a_2 \ldots a_n\,.\,|d| + \Omega(A)$, kde $\Omega(A) = |d|\Delta + \delta$. Určíme číslo $\varepsilon > 0$ tak, aby $\varepsilon/2 < \varepsilon_0 = |d|\,|r - \frac{1}{2}|$, dále pak přirozené číslo $n = n_0$ tak, aby $|d|\,|\Delta| \leqq \varepsilon/2$. Jsou-li dále splněny všechny předpoklady závěru 2, týkající se funkce f, pak platí:

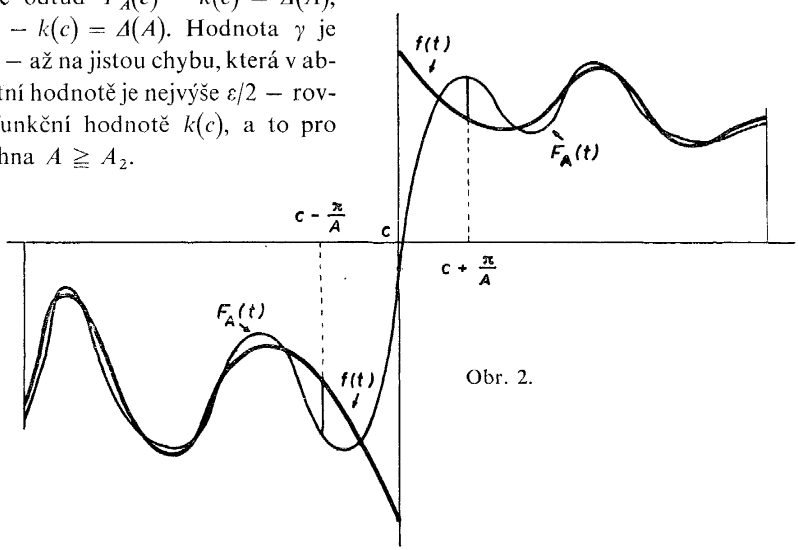
Existuje jisté kladné číslo A_2 — závislé na několika parametrech — tak, že průběh křivky

$$F_A(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^A\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(f(\tau)\cos\omega(\tau - t)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}\omega\right. \tag{2}$$

v intervalu $J = \langle c - w + \lambda, c + w - \lambda \rangle$, $0 < \lambda < w$, *posuzovaný směrem zleva doprava, je pro všechna* $A > A_2$ *takový:* $F_A(t)$ *osciluje kolem křivky* f *a v bodě* $t = c - \pi/A$ *intervalu* J^0 *(vnitřek intervalu* J*) nabývá hodnoty* β^**, která je — až na jistou chybu* $\Omega(A)$*, kde* $|\Omega(A)| \leqq \varepsilon$ *— o* $8, a_1 a_2 \ldots a_{n_0}$ % *z* $|d|$ $\left.\begin{matrix} \textit{menší} \ (d > 0) \\ \textit{větší} \ (d < 0) \end{matrix}\right\}$ *než hodnota* $f(c - \pi/A)$*, dále pak* $\left.\begin{matrix} \textit{stoupne} \\ \textit{klesne} \end{matrix}\right\}$ *od hodnoty* β^* *přes hodnotu* γ *(viz poznámka 3) v bodě* $t = c$ *až k hodnotě* β *v bodě* $t = c + \pi/A$ *intervalu* J^0*, která je — až na zmíněnou chybu — o* $8, a_1 a_2 \ldots a_{n_0}$ % *z* $|d|$ $\left.\begin{matrix} \textit{větší} \\ \textit{menší} \end{matrix}\right\}$ *než hodnota* $f(c + \pi/A)$*, načež dále osciluje kolem křivky* f*.*

Poznámka 3. Podle poznámky 1 z odst. 3 je křivka (2) spojitá v $\mathbf{E}_1$. Praví se nahoře (viz např. $d > 0$), že křivka F_A „stoupne“ od hodnoty β^* přes hodnotu γ až k hodnotě β. Tím se však nemíní, že by hodnota β^* byla lokálním minimem a hodnota β lokálním maximem funkce F_A v příslušných bodech (viz schematický obr. 2, kde $d > 0$).

Z dřívějších úvah vyplývá, že $F_A(t) - k(t) - d\,\Phi(A(t - c)) = \Delta(A)$ pro všechna $A \geqq A_2$ a libovolné $t \in \langle c - w + \lambda, c + w - \lambda \rangle$, přičemž $|\Delta(A)| \leqq \varepsilon/2$. Pro $t = c$ plyne odtud $F_A(c) - k(c) = \Delta(A)$, tj. $\gamma - k(c) = \Delta(A)$. Hodnota γ je tedy — až na jistou chybu, která v absolutní hodnotě je nejvýše $\varepsilon/2$ — rovna funkční hodnotě $k(c)$, a to pro všechna $A \geqq A_2$.



Obr. 2.

Literatura

[1] Nature, svazek 58, 59.

[2] *R. G. Cooke*: Gibbs's Phenomenon in Fourier-Bessel Series and Integrals, Proc. London Math. Soc. (2) 27 (1928).

[3] *E. A. Guillemin*: The Mathematics of Circuit Analysis.

[4] *V. Jarník*: Integrální počet II (1955).

Резюме

ОБ ОДНОМ ТИПЕ ИНТЕГРАЛА, У КОТОРОГО ПРОЯВЛЯЕТСЯ ТАК НАЗЫВАЕМОЕ „ЯВЛЕНИЕ ГИББСА“

ИОСЕФ МАТУШУ (Josef Matušů)

Все рассмотренные функции являются вещественными. По отношению к функции f рассматриваются два случая. Случай I: f — суммируемая в интервале $(-\infty, +\infty)$. Случай II: f — суммируемая в каждом интервале конечной длины $(-b', b')$, b' — положительное. Далее, $\lim_{t \to \pm\infty} f(t) = 0$, и существует конечное и положительное число b так, что f имеет ограниченное изменение как в интервале $(-\infty, -b\rangle$, так и в интервале $\langle b, +\infty)$. О функции g предполагается, что она в интервале $(-\infty, +\infty)$, во-первых, непрерывна, ограничена и нечетна и, во-вторых, что ее производная g' в этом интервале также непрерывна и ограничена. Далее предполагается, что существует конечное и положительное число S так, что $|\int_\alpha^\beta g(t)\, dt| \leqq S$ в области $(|\alpha| < +\infty, \alpha \leqq \beta < +\infty)$. Пусть $\Phi(t) = (\int_0^t [g(\tau)/\tau] \,.\, d\tau)/2R$ и пусть $R \neq 0$ обозначает величину сходящего несобственного интеграла $\int_0^{+\infty} [g(\tau)/\tau]\, d\tau$. Кроме того предполагается, что существует конечное и положительное число s так, что функция $\Phi(t)$ имеет в точке $t = s$ значение $r \neq \frac{1}{2}$. При этих условиях справедлива следующая

Теорема. *Пусть функция f (для которой имеет место один из случаев I, II) имеет разрыв в точке $t = c$, $f(c+) - f(c) = d$, $0 < |d| < +\infty$. Во всех остальных точках определенного интервала $\langle c - w, c + w\rangle$ $(0 < w < \infty)$ пусть f непрерывна и пусть имеет там ограниченное изменение. Пусть для функции g справедливы все выше приведенные предположения. Пусть $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 = |d||r - \frac{1}{2}|$. Тогда существует определенное положительное число A_2 так, что „превосходство“*

$$\left|\frac{1}{2R}\int_0^A \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, g'\left\{\omega\left(\tau - c \mp \frac{s}{A}\right)\right\} d\tau\right) d\omega - f\left(c \pm \frac{s}{A}\right)\right|$$

кривой f над другой кривой в точках $t = c \pm s/A$ равно приблизительно $100 \cdot |r - \frac{1}{2}|$ % абсолютной величины скачка функции f в точке разрыва $t = c$ (вплоть до определенной ошибки $\Delta(A)$, где $|\Delta(A)| \leqq \varepsilon$, а то для всех чисел $A \geqq A_2$).

Для положительного числа A_2, существование которого хотя доказано, но которое эффективно трудно определить, дано определенное „оптимальное положение“. Результаты теоремы и в дальнейшем применяются к случаю классического интеграла Фурье.

Zusammenfassung

ÜBER EINE ART EINES INTEGRALS MIT SOG. „GIBBSSCHER ERSCHEINUNG“

Josef Matušů

Alle betrachteten Funktionen sind reell. Bezüglich der Funktion f werden zwei Fälle unterschieden. Fall I: f ist summierbar im Intervall $(-\infty, +\infty)$. Fall II: f ist summierbar in jedem endlichen Intervall $(-b', b')$, b' positiv; ferner gilt $\lim_{t \to \pm\infty} f(t) = 0$ und es existiert eine endliche und positive Zahl b, so dass f in den beiden Intervallen $(-\infty, -b\rangle$ und $\langle b, +\infty)$ von endlicher Variation ist. Über die Funktion g wird vorausgesetzt, dass sie im Intervall $(-\infty, +\infty)$ 1) stetig, beschränkt und ungerade ist und dass 2) auch ihre Ableitung g' dort stetig und beschränkt ist; weiter wird noch vorausgesetzt, dass eine endliche und positive Zahl S existiert, so dass $|\int_\alpha^\beta g(t)\,\mathrm{d}t| \leqq S$ im Bereich $(|\alpha| < +\infty,\ \alpha \leqq \beta < +\infty)$ ist. Gesetzt wird $\Phi(t) = (\int_0^t [g(\tau)/\tau]\,\mathrm{d}\tau)/2R$; $R \neq 0$ bedeutet den Wert des konvergenten uneigentlichen Integrals $\int_0^{+\infty} [g(\tau)/\tau]\,\mathrm{d}\tau$. Es wird noch angenommen, dass eine endliche und positive Zahl s existiert, so dass die Funktion $\Phi(t)$ im Punkte $t = s$ den Wert $r \neq \frac{1}{2}$ besitzt. Unter allen diesen Voraussetzungen gilt dann folgender

Satz. *Die Funktion f (für die entweder Fall I oder Fall II in Frage kommt) sei unstetig im Punkte $t = c$, $f(c+) - f(c-) = d$, $0 < |d| < +\infty$. In allen anderen Punkten eines gewissen Intervalls $\langle c - w, c + w\rangle$ $(0 < w < +\infty)$ sei f stetig und von endlicher Variation. Bezüglich der Funktion g sollen alle angeführten Voraussetzungen erfüllt sein. Sei noch $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 = |d|\,|r - \frac{1}{2}|$. Es existiert dann eine gewisse positive Zahl A_2, so dass die „Überschwingung“*

$$\left|\frac{1}{2R}\int_0^A \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, g'\left\{\omega\left(\tau - c \mp \frac{s}{A}\right)\right\} \mathrm{d}\tau\right) \mathrm{d}\omega - f\left(c \pm \frac{s}{A}\right)\right|$$

der Kurve f durch die andere Kurve in den Punkten $t = c \pm s/A$ rund $100|r - \frac{1}{2}|$ % des Absolutwertes des Sprunges der Funktion f im Unstetigkeitspunkte $t = c$ beträgt (bis auf einen gewissen Fehler $\Delta(A)$, dessen Absolutwert höchstens gleich ε ist, und zwar für alle Zahlen $A \geqq A_2$).

Für die positive Zahl A_2, deren Existenz zwar bewiesen ist, die man aber effektiv nur sehr schwer bestimmen kann, wird eine gewisse „optimale Stelle“ angegeben. Das Ergebnis des Satzes wird weiter auf den speziellen Fall des klassischen Fourierschen Integrals übetragen.