Václav Doležal

O Fourierově transformaci v teorii lineárních soustav

Aplikace matematiky, Vol. 6 (1961), No. 3, 184–213

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102753`

O FOURIEROVĚ TRANSFORMACI V TEORII LINEÁRNÍCH SOUSTAV

VÁCLAV DOLEŽAL

(Došlo dne 5. května 1960.)

Článek je věnován řešení otázek dynamiky lineárních fysikálních soustav pomocí Fourierovy transformace distribucí. Po úvodním zavedení transformace a odvození jejich základních vlastností je vyšetřen problém dělení obrazu mnohočlenem. Tyto výsledky jsou pak aplikovány k řešení soustav integrodiferenciálních rovnic, na jejichž pravých stranách jsou distribuce; zároveň je diskutován fysikální význam těchto výsledků. Článek je doplněn řešením několika konkrétních příkladů.

Tato práce je věnována otázkám použití Fourierovy transformace k řešení problémů dynamiky lineárních fysikálních soustav. V aplikacích se často používá následujícího pravidla: Fourierův obraz (spektrum) odezvy soustavy je roven součinu přenosové funkce a Fourierova obrazu popudu. Je však známo, že možnost použití tohoto pravidla je omezena tím předpokladem, že je vůbec možno Fourierův obraz daného popudu vypočítat, tj., že příslušný Fourierův integrál konverguje. Toto omezení „růstu popudu", tj. jeho chování pro $|t| \to \infty$, je dosti silné, neboť např. konstanta už nemá obraz. Bylo by možno namítnout, že z tohoto hlediska je lepší používat Laplaceovy transformace; avšak tam dovedeme zpracovat jen ty případy, kdy popud je pro $t < 0$ roven nule. („Dvoustranná" Laplaceova transformace nám také nepomůže, protože tam je třeba, aby originál buď pro $t \to -\infty$ nebo pro $t \to \infty$ ubýval dosti rychle.) Odtud vyplývá, že známe-li přenosovou funkci soustavy a je-li popud tvaru třeba t^2, neumíme odezvu klasickými prostředky stanovit.

V tomto článku ukážeme, že vhodným zobecněním Fourierovy transformace, kdy obraz bude distribucí, lze uvedené nedostatky klasického aparátu odstranit.

K sestrojení teorie Fourierovy transformace budeme potřebovat základní fakta teorie distribucí asi v tom rozsahu, jak jsou uvedena v [1] na str. 407–414. Tam se operovalo výhradně s reálnými čísly; to však pro naše účely nestačí a proto tamnější pojmy rozšíříme do komplexní oblasti.

Buď $\boldsymbol{K}$ systém všech funkcí $\phi(t)$ (nyní obecně komplexních!), které jsou definovány na $(-\infty, \infty)$ a mají tyto vlastnosti:

1. $\phi(t)$ má derivace všech řádů,

2. každá funkce $\phi(t)$ je rovna nule vně některého konečného intervalu (který obecně závisí na $\phi(t)$).

Rčení „posloupnost $\phi_k(t) \to 0$ v prostoru $\boldsymbol{K}$" bude značit totéž, co v [1].

Funkcionál f, definovaný na $\boldsymbol{K}$, nazveme distribucí na $\boldsymbol{K}$, splňuje-li tyto podmínky:

1. pro každá čísla α_1, α_2 a $\phi_1(t), \phi_2(t) \in \boldsymbol{K}$ je

$$(f, \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2) = \alpha_1(f, \phi_1) + \alpha_2(f, \phi_2),$$

2. pro každou posloupnost $\phi_k(t) \to 0$ v $\boldsymbol{K}$ je $(f, \phi_k) \to 0$.

Systém všech distribucí na $\boldsymbol{K}$ označíme $\boldsymbol{K}'$.

Distribuci $f \in \boldsymbol{K}'$ nazveme regulární, existuje-li lokálně integrovatelná funkce $f(t)$ tak, že pro každou $\phi(t) \in \boldsymbol{K}$ je

(1) $$(f, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)}\, \phi(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

(Pruhem budeme označovat konjugovanou hodnotu.)

Obráceně budeme každou lokálně integrovanou funkci $f(t)$ pojímat jako distribuci podle předpisu (1).

Jsou-li $f, g \in \boldsymbol{K}'$, zavedeme součet $f + g$ rovnicí

(2) $$(f + g, \phi) = (f, \phi) + (g, \phi)\,.$$

Je-li α číslo, $f \in \boldsymbol{K}'$ definujeme násobek αf rovnicí

(3) $$(\alpha f, \phi) = (f, \bar{\alpha}\phi) = \bar{\alpha}(f, \phi)\,.$$

Je-li konečně $a(t)$ funkce, definovaná na $(-\infty, \infty)$, mající tam derivace všech řádů, definujeme součin af rovnicí

(4) $$(af, \phi) = (f, \bar{a}\phi)\,.$$

Stejným způsobem jako v [1] zavedeme pojem derivace f' a konvergence $f_n \to f$.

Čtenář se snadno přesvědčí, že všechny výsledky, uvedené v [1] pro reálný obor (zejména věta 1 a 2), platí beze změny i pro právě zavedené pojmy v komplexním oboru.

Dále budeme potřebovat ještě pojem primitivní distribuce. Buď tedy $f \in \boldsymbol{K}'$; primitivní distribucí nazveme onu distribuci $f^{(-1)} \in \boldsymbol{K}'$ pro kterou je $(f^{(-1)})' = f$. Snadno se lze přesvědčit, že

1. *$f^{(-1)}$ k $f \in \boldsymbol{K}'$ existuje,*

2. *dvě primitivní distribuce k $f \in \boldsymbol{K}'$ se liší o konstantu,*

3. *pro každou $f^{(-1)}$ lze najít číslo C a zvolit funkci $\phi_0(t) \in \boldsymbol{K}$, pro kterou je $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(\tau)\, \mathrm{d}\tau = 1$ tak, že je*

$$(f^{(-1)}, \phi) = \left(f, -\int_{-\infty}^{t} \phi(\tau)\, \mathrm{d}t + \left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau)\, \mathrm{d}t\right) . \int_{-\infty}^{t} \phi_0(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right) + C\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau)\, \mathrm{d}t\,.$$

Mimo to platí: *je-li $f \in \boldsymbol{K}'$ regulární, pak $f^{(-1)}$ je regulární a je rovna některé primitivní funkci k $f(t)$.*

Obecně označíme symbolem $f^{(-n)}$, $n > 0$ celé, distribuci, pro kterou je $(f^{(-n)})^{(n)} = f$.

Snadno pak podle předešlého nahlédneme, že *dvě n-té primitivní distribuce se navzájem liší o mnohočlen nejvýše $(n - 1)$-ho stupně.*

Konečně budeme potřebovat pojem „posuvu distribuce". Buď $f \in \mathbf{K}'$, h reálné číslo. Posunutou distribuci, označenou symbolem $P_h f$, zavedeme jako funkcionál

$$(P_h f, \phi) = (f, \phi(t + h)) . \tag{4a}$$

Je zřejmé, že $P_h f \in \mathbf{K}'$, a že *je-li f regulární, je i $P_h f$ regulární a je rovna funkci $f(t - h)$.*

Nyní se budeme zabývat vlastnostmi funkcí, které jsou Fourierovými obrazy funkcí z prostoru $\mathbf{K}$. Buď tedy $\phi(t) \in \mathbf{K}$, $s = \omega + i\tau$ a položme

$$\psi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\, e^{-ist}\, \mathrm{d}t . \tag{5}$$

Ježto $\phi(t)$ je rovna nule vně konečného intervalu, integrál (5) konverguje pro každé s a definuje v komplexní rovině nějakou funkci, která je analytická a celistvá.

Poznámka: Zde i v dalším vyhradíme písmeno ψ pro označení Fourierova obrazu funkce ϕ, nebo budeme též psát $\psi(s) = F[\phi]$.

Z vlastností funkce $\phi(t)$ vyplývá, že v integrálu rov. (5) je možno přehodit pořadí derivování podle s a integrace, takže máme pro každé přirozené q:

$$\psi^{(q)}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} (-it)^q \phi(t)\, e^{-ist}\, \mathrm{d}t , \tag{6}$$

tj. platí

$$\frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}s^q} F[\phi] = F[(-it)^q \phi(t)] . \tag{7}$$

Dále platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^{(n)}(t)\, e^{-ist}\, \mathrm{d}t = [\phi^{(n-1)}(t)\, e^{-ist}]_{-\infty}^{\infty} + is\int_{-\infty}^{\infty} \phi^{(n-1)}(t)\, e^{-ist}\, \mathrm{d}t =$$
$$= \ldots = (is)^n \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\, e^{-ist}\, \mathrm{d}t ,$$

tj.

$$F[\phi^{(n)}] = (is)^n F(\phi) , \quad n \geqq 0 . \tag{8}$$

Nyní platí

Věta 1. *Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby funkce $\psi(s)$ byla Fourierovým obrazem některé funkce $\phi(t) \in \mathbf{K}$, která je rovna nule vně $(-a, a)$, je splnění podmínek*

1. *$\psi(s)$ je celistvá analytická funkce proměnné s,*
2. *existují kladná čísla $C_0, C_1, C_2, \ldots$, tak, že pro každé $q = 0, 1, \ldots$ a každé s je*

$$|s^q \psi(s)| \leqq C_q e^{a|\tau|}. \tag{9}$$

Důkaz: Nutnost: Nechť $\phi(t) = 0$ vně $(-a, a)$. Podle (8) pak je

$$|s^q \psi(s)| = |\int_{-a}^{a} \phi^{(q)}(t) e^{-ist}\, \mathrm{d}t| \leqq \int_{-a}^{a} |\phi^{(q)}(t)|\, \mathrm{d}t \,.\, \max_{t \in \langle -a, a \rangle} |\exp(-ist)| = C_q \exp(a|\tau|) .$$

Postačitelnost: Nechť tedy $\psi(s)$ je celistvá analytická funkce, splňující podmínky (9).

Definujme pro reálná t funkci $\phi(t)$ předpisem

(10) $$\phi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega\,.$$

Zřejmě v důsledku (9) integrál (10) konverguje pro každé reálné t absolutně; ježto rovněž integrál

(11) $$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^n \psi(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

konverguje ze stejného důvodu pro každé přirozené n absolutně, platí $\phi^{(n)}(t) = I_n/2\pi$, tj. $\phi(t)$ má všechny derivace. Ukažme nyní, že $\phi(t)$ je rovná nule pro $|t| \geqq a$.

V důsledku platnosti Cauchyovy věty možno v integrálu (10) provést integraci po přímce paralelní s osou ω, takže

(12) $$\phi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega + i\tau)\, e^{it(\omega + i\tau)}\, d\omega = \frac{e^{-t\tau}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega + i\tau)\, e^{it\omega}\, d\omega\,.$$

Z podmínky (9) plyne pro $q = 0,2$ a každé s:

(13) $$|\psi(s)| \leqq e^{a|\tau|} \min\left[C_0, C_2 |s|^{-2}\right] \leqq Ce^{a|\tau|}(1 + |s|^2)^{-1} \leqq Ce^{a|\tau|}(1 + \omega^2)^{-1}\,.$$

Buď nyní t reálné, $|t| > a$; zvolme číslo $\rho > 0$ a kladme ve (12) $\tau = \rho|t|/t$. Pak podle (12) a (13) je

$$|\phi(t)| \leqq \frac{e^{-t\tau}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\omega + i\tau)|\, d\omega \leqq$$
$$\leqq \frac{e^{-t\tau}}{2\pi}\, Ce^{a|\tau|} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{1 + \omega^2} = \frac{1}{2}\, Ce^{a|\tau| - t\tau} = \frac{1}{2}\, Ce^{-\rho(|t| - a)}\,.$$

Ježto $|t| - a > 0$ a ρ je možno volit libovolně velké, máme $\phi(t) = 0$ pro $|t| > a$. Je tedy $\phi(t) \in \boldsymbol{K}$. Poněvadž konečně podle věty o Fourierově transformaci platí podle (10), že $F[\phi] = \psi(s)$, je věta dokázána.

Zaveďme nyní toto označení: Buď $\boldsymbol{Z}$ prostor všech celistvých analytických funkcí $\psi(s)$, které splňují podmínku

$$|s|^q\, |\psi(s)| \leqq C_q \exp(a\,|\tau|)\,, \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Podle věty 1 je $\boldsymbol{Z}$ tvořen obrazy všech funkcí $\phi(t) \in \boldsymbol{K}$, a Fourierova transformace zprostředkuje prosté zobrazení mezi $\boldsymbol{K}$ a $\boldsymbol{Z}$.

Všimněme si nyní blíže struktury $\boldsymbol{Z}$! Ježto platí $\phi(t) \in \boldsymbol{K} \Rightarrow (-it)^q\, \phi(t) \in \boldsymbol{K}$, máme podle (7) tvrzení:

Je-li $\psi(s) \in \boldsymbol{Z}$, *pak* $\psi^{(q)}(s) \in \boldsymbol{Z}$, $q = 1, 2, \ldots$

Podobně z (8) plyne: *je-li* $\psi(s) \in \boldsymbol{Z}$, *pak* $s^n \psi(s) \in \boldsymbol{Z}$, $n = 1, 2, \ldots$

Triviální je následující tvrzení: *jsou-li* α_1, α_2 *čísla,* $\psi_1(s)$, $\psi_2(s) \in \boldsymbol{Z}$, *pak* $\alpha_1\psi_1(s) + \alpha_2\psi_2(s) \in \boldsymbol{Z}$.

Buď dále h reálné; pro obraz posuvu máme

(14) $$F[\phi(t - h)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t - h)\, e^{-ist}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u)\, e^{-is(u+h)}\, du = e^{-ish} F[\phi(t)]\,.$$

Podobně, pro libovolné λ platí:

(15) $$F[e^{i\lambda t}\phi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\, e^{-it(s-\lambda)}\, \mathrm{d}t = \psi(s - \lambda)\,.$$

Podobně jako v prostoru $\boldsymbol{K}$, zavedeme i v $\boldsymbol{Z}$ pojem konvergence.

Buď $\psi_n(s) \in \boldsymbol{Z}$, $n = 1, 2, \ldots$ Řekněme, že $\psi_n(s) \to 0$ v $\boldsymbol{Z}$, jestliže

1. existují pevná kladná čísla a, C_0, C_1, C_2, ..., tak, že je

(16) $$|s^q \psi_n(s)| \leqq C_q \exp(a\,|\tau|)$$

pro každé s a každé $q = 0, 1, \ldots, n = 1, 2, \ldots$,

2. posloupnost $\psi_n(\omega) \to 0$ stejnoměrně na každém konečném intervalu osy ω. Pak platí

Věta 2. *Buďte $\psi_n(s) \in \boldsymbol{Z}$, $n = 1, 2. \ldots$ a buďte $\phi_n(t) \in \boldsymbol{K}$ příslušné vzory (tj. $F[\phi_n] = \psi_n$). Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby bylo $\psi_n(s) \to 0$ v $\boldsymbol{Z}$, je $\phi_n(t) \to 0$ v $\boldsymbol{K}$. Nadto platí: je-li $\psi_n(s) \to 0$ v $\boldsymbol{Z}$, pak pro každé celé $q \geqq 0$ je*

a) $\psi_n^{(q)}(s) \to 0$ *v* $\boldsymbol{Z}$,

b) $\psi_n^{(q)}(s) \to 0$ *stejnoměrně na každé ohraničené množině roviny s.*

Dokažme nejdříve nutnost. Nechť tedy $\psi_n(s) \to 0$ v $\boldsymbol{Z}$. Podle věty 1 a předpokladu (16) plyne, že každá funkce $\phi_n(t)$ je rovna nule vně intervalu $(-a, a)$. Podle (10) platí pro každé $k \geqq 0$

(17) $$\phi_n^{(k)}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^k \psi_n(\omega)\, e^{i\omega t}\, \mathrm{d}\omega\,.$$

Je tedy pro každé t

$$|\phi_n^{(k)}(t)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^k\, |\psi_n(\omega)|\, \mathrm{d}\omega = I_n\,.$$

V důsledku stejnoměrné konvergence funkcí $\psi_n(\omega)$ na každém konečném intervalu osy ω a okolnosti, že všechny funkce $|\psi_n(\omega)|$ klesají k nule s rostoucím $|\omega|$ rychleji než libovolná mocnina $|\omega|^{-q}$, $q > 0$, je $I_n \to 0$. Je tedy $\phi_n(t) \to 0$ v $\boldsymbol{K}$.

Nechť nyní naopak je $\phi_n(t) \to 0$ v $\boldsymbol{K}$, a všechny $\phi_n(t)$ jsou rovny nule vně $(-a, a)$. Zvolme pevně celé $q \geqq 0$. Podle rov. (6) platí

(18) $$\psi_n^{(q)}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} (-it)^q \phi_n(t)\, e^{-ist}\, \mathrm{d}t\,.$$

Označme $(-it)^q \phi_n(t) = v_{nq}(t)$. Očividně každá $v_{nq}(t) = 0$ vně $(-a, a)$ a je $v_{nq}(t) \to 0$ v $\boldsymbol{K}$. Z (18) plyne podle (8) pro každé celé $k \geqq 0$, že

$$(is)^k \psi_n^{(q)}(s) = \int_{-a}^{a} v_{nq}^{(k)}(t) \exp(-ist)\, \mathrm{d}t\,,$$

takže platí

(19) $$|s^k \psi_n^{(q)}(s)| \leqq 2a \max_{t \in \langle -a, a\rangle} |v_{nq}^{(k)}(t)| \,.\, \max_{t \in \langle -a, a\rangle} |\exp(-ist)|\,.$$

Ježto $v_{nq}(t) \to 0$ v $\boldsymbol{K}$, existuje pro každé k konstanta $C_k^{(q)}$ tak, že $\max\limits_{t \in \langle -a, a\rangle} |v_{nq}^{(k)}(t)| \leqq C_k^{(q)}$ pro všechna $\boldsymbol{n}$. Je tedy

$$|s^k \psi_n^{(q)}(s)| \leqq 2aC_k^{(q)} \exp(a\,|\tau|)\,.$$

Buď nyní $s = \omega + i\tau$, $|s| \leqq M$. Podle (18) pak je

$$|\psi_n^{(q)}(s)| \leqq \int_{-a}^{a} |t|^q \, |\phi_n(t)| \, e^{t\tau} \, \mathrm{d}t \leqq \int_{-a}^{a} a^q e^{aM} | \, \phi_n(t)| \, \mathrm{d}t \to 0 \quad \text{pro} \quad n \to \infty \, .$$

Je tedy $\psi_n^{(q)}(s) \to 0$ stejnoměrně na kruhu $|s| \leqq M$, a tedy tím spíše na každém konečném intervalu osy ω, čímž je pro $q = 0$ prvé tvrzení věty dokázáno. Současně jsou dokázána i tvrzení a), b).

Učiňme na tomto místě jednu poznámku, kterou budeme později potřebovat. Je-li $\psi(s) \in \boldsymbol{Z}$, h číslo, potom (v obvyklém smyslu konvergence) platí Taylorův rozvoj

$$\psi(s + h) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi^{(k)}(s) \frac{h^k}{k!} \, . \tag{20}$$

Ukažme, že (20) *platí i ve smyslu konvergence v* $\boldsymbol{Z}$, *tj. že*

$$\psi(s + h) - \sum_{k=0}^{n} \psi^{(k)}(s) \frac{h^k}{k!} \to 0 \ v \ \boldsymbol{Z} \, . \tag{21}$$

Vskutku, platí $\exp(-iht) = \sum_{k=0}^{\infty} (-it)^k h^k / k!$ pro každé reálné t, stejnoměrně na každém konečném intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$. Zároveň platí $(\exp(-iht))^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} ((-it)^k)^{(n)} h^k / k!$ stejnoměrně na $\langle t_1, t_2 \rangle$. Pro libovolnou $\phi(t) \in \boldsymbol{K}$ tedy je

$$(\exp(-iht)) \, . \, \phi(t) - \sum_{k=0}^{n} (-it)^k \, \phi(t) \, h^k / k! \to 0 \ \text{v} \ \boldsymbol{K} \, . \tag{22}$$

Položíme-li $\psi(s) = F[\phi]$, plyne z (22) podle věty 2 pomocí rovnic (15) a (7)

$$\psi(s + h) - \sum_{k=0}^{n} \psi^{(k)}(s) \, h^k / k! \to 0 \ \text{v} \ \boldsymbol{Z}, \text{ c. b. d.}$$

Dokažme nyní jedno lemma, které budeme později potřebovat.

Lemma 1. *Buď $n \geqq 1$ celé číslo; pak existují funkce*
$\psi_0(s), \psi_1(s), \ldots, \psi_{n-1}(s) \in \boldsymbol{Z}$ *tak, že je* $\psi_i^{(k)}(0) = 0$ *pro* $k \neq i$, $\psi_i^{(i)}(0) = 1$; $i, k = 0, 1, \ldots, n - 1$.

(Takovou soustavu $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ pro dané n budeme též nazývat *„normální soustavou"*.)

D ů k a z: Zvolme funkce $\tilde{v}_i(t) \in \boldsymbol{K}$, $i = 0, 1, \ldots, n - 1$ tak, že je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}_i(t) \, \mathrm{d}t = (-1)^i / i!, \ (0! = 1), \text{ a položme } v_i(t) = \tilde{v}_i^{(i)}(t) \, .$$

Lehko se přesvědčíme, že pak platí

$$m_{ki} = \int_{-\infty}^{\infty} t^k v_i(t) \, \mathrm{d}t = 0 \quad \text{pro} \quad 0 \leqq k < i \, , \tag{23}$$
$$= 1 \quad \text{pro} \quad k = i \, .$$

Vskutku, máme

$$m_{ki} = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \tilde{v}_i^{(i)}(t)\,\mathrm{d}t = \left[t^k \tilde{v}_i^{(i-1)}(t)\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} k t^{k-1} \tilde{v}_i^{(i-1)}(t)\,\mathrm{d}t = \ldots =$$
$$= (-1)^k k! \int_{-\infty}^{\infty} v_i^{(i-k)}(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

což dokazuje tvrzení.

Utvořme nyní čtverečné matice M, A n-tého řádu předpisy

$$M = \begin{bmatrix} m_{00}, & m_{01}, & \ldots, m_{0,n-1} \\ m_{10}, & m_{11}, & \ldots, m_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n-1,0}, & m_{n-1,1}, & \ldots, m_{n-1,n-1} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \alpha_{00}, & \alpha_{10}, & \ldots, \alpha_{n-1,0} \\ \alpha_{01}, & \alpha_{11}, & \ldots, \alpha_{n-1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{0,n-1}, & \alpha_{1,n-1}, & \ldots, \alpha_{n-1,n-1} \end{bmatrix}.$$

Ježto prvky hlavní diagonály matice M jsou rovny jedné a prvky nad hlavní diagonálou jsou nuly, je det $M = 1$ a tudíž existuje jediná matice A, splňující rovnici $MA = I$ (I je jednotková matice).

Sestrojme nyní funkce

$$\phi_i(t) = \alpha_{i0} v_0(t) + \alpha_{i1} v_1(t) + \ldots + \alpha_{i,n-1} v_{n-1}(t)\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Očividně $\phi_i(t) \in \boldsymbol{K}$ a platí

$$I_{ki} = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \phi_i(t)\,\mathrm{d}t = m_{k0}\alpha_{i0} + m_{k1}\alpha_{i1} + \ldots + m_{k,n-1}\alpha_{i,n-1}\,.$$

Je tedy $I_{ki} = 0$ pro $i \neq k = 0, 1, \ldots, n-1$; $I_{ii} = 1$.

Položme konečně

$$\psi_k(s) = i^k \int_{-\infty}^{\infty} \phi_k(t)\, e^{-ist}\,\mathrm{d}t\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,. \tag{24}$$

Podle (7) pak platí

$$\psi_k^{(r)}(s) = (-i)^{r-k} \int_{-\infty}^{\infty} t^r \phi_k(t) \exp(-ist)\,\mathrm{d}t\,,$$

takže

$$\psi_k^{(r)}(0) = (-i)^{r-k} \int_{-\infty}^{\infty} t^r \phi_k(t)\,\mathrm{d}t = (-i)^{r-k} I_{rk}\,.$$

Tvoří tedy funkce $\psi_0(s)$, $\psi_1(s)$, …, $\psi_{n-1}(s)$ podle (24) hledanou soustavu, čímž je lemma dokázáno.

Přistupme nyní k zavedení distribucí na prostoru $\boldsymbol{Z}$. Řekneme, že funkcionál g, definovaný na $\boldsymbol{Z}$ je distribucí na $\boldsymbol{Z}$, jestliže

1. pro každá čísla α_1, α_2 a funkce $\psi_1(s)$, $\psi_2(s) \in \boldsymbol{Z}$ je
$$(g, \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2) = \alpha_1(g, \psi_1) + \alpha_2(g, \psi_2)$$
(linearita funkcionálu),

2. pro každou posloupnost $\psi_n(s) \to 0$ v $\boldsymbol{Z}$ je
$(g, \psi_n) \to 0$ (spojitost funkcionálu).

Systém všech distribucí na $\boldsymbol{Z}$ označíme $\boldsymbol{Z}'$.

Distribuce $g, h \in \boldsymbol{Z}'$ budeme pokládat za sobě rovné, jestliže $(g, \psi) = (h, \psi)$ pro každou $\psi(s) \in \boldsymbol{Z}$.

Analogicky tomu, jak se to činí u $\boldsymbol{K}'$, zavedeme i pro $\boldsymbol{Z}'$ pojem součtu a násobku: Je-li $g, h \in \boldsymbol{Z}'$, α číslo, buď

$$(g + h, \psi) = (g, \psi) + (h, \psi), \quad (\alpha g, \psi) = (g, \bar{\alpha}\psi). \tag{25}$$

Očividně platí $g + h, \alpha g \in \boldsymbol{Z}'$.

Je jistě zřejmé, že pro zavedení násobení distribuce ze $\boldsymbol{Z}'$ funkcí nebude stačit požadovat pouze existenci všech derivací funkce, jako tomu bylo v $\boldsymbol{K}'$. Proto definujme následující pojem:

Funkci $v(s)$ nazveme multiplikátorem v prostoru $\boldsymbol{Z}$, jestliže

1. je celistvou analytickou funkcí,
2. existují čísla $C, b, q \geqq 0$ tak, že pro všechna s je

$$|v(s)| \leqq C(1 + |s|)^q \exp(b\,|\tau|). \tag{26}$$

Snadno nahlédneme, že platí následující tvrzení:

Je-li $v(s)$ multiplikátor, pak pro libovolnou $\psi(s) \in \boldsymbol{Z}$ je $v(s)\,\psi(s) \in \boldsymbol{Z}$, a pro každou posloupnost $\psi_n(s) \to 0$ v $\boldsymbol{Z}$ je $v(s)\,\psi_n(s) \to 0$ v $\boldsymbol{Z}$.

Důkaz: Zřejmě $v(s)\,\psi(s)$ je pro libovolnou $\psi(s) \in \boldsymbol{Z}$ analytická. Pro libovolné celé $k \geqq 0$ dále platí

$$|s^k v(s)\,\psi(s)| \leqq |s|^k\,|v(s)\,\psi(s)|\,.\,(q!\sum_{i=0}^{q}|s|^i)(1 + |s|)^{-q} \leqq \tag{27}$$

$$\leqq q!\,Ce^{b|\tau|}\sum_{i=0}^{q}|s|^{i+k}\,|\psi(s)| \leqq q!\,Ce^{b|\tau|}\sum_{i=0}^{q}C_{i+k}e^{a|\tau|} = M_k e^{(a+b)|\tau|},$$

kde jsme položili $M_k = q!\,C\sum_{i=0}^{q}C_{i+k}$. Je tedy $v(s)\,\psi(s) \in \boldsymbol{Z}$.

Jestliže dále je $\psi_n(s) \to 0$ v $\boldsymbol{Z}$, stejně jako prve vyplyne, že pro každé n platí pro $s^k v(s)\,\psi_n(s)$ odhad (27). Že konečně $v(\omega)\,\psi_n(\omega) \to 0$ stejnoměrně na každém konečném intervalu osy ω, je zřejmé.

Zaveďme nyní následující označení: Buď $h(s)$ funkce, která je analytická v oblasti G. Buď $\bar{G}$ oblast, sestávající ze všech bodů, které jsou konjugované k bodům oblasti G. Sdruženou funkci $h^*(s)$ k $h(s)$ definujme na $\bar{G}$ předpisem $h^*(s) = \overline{h(\bar{s})}$, $s \in \bar{G}$. Očividně $(h^*(s))^* = h(s)$. Dále je beze všeho zřejmé, že $h^*(s)$ je analytická v oblasti $\bar{G}$.

Snadno nahlédneme, že platí následující tvrzení: *je-li $v(s)$ multiplikátor, pak $v^*(s)$ je rovněž multiplikátorem.* Vskutku, ježto $v(s)$ je analytická v celé rovině, platí totéž pro $v^*(s)$. Klademe-li pak ve (26) $\bar{s}$ místo s, nerovnost se neporuší, takže pro $v^*(s)$ platí stejný odhad, c. b. d.

Poznamenejme, že speciálně každý mnohočlen $P(s) = a_n s^n + \ldots + a_0$ je multiplikátorem, a je $P^*(s) = \bar{a}_n s^n + \bar{a}_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \bar{a}_0$. Zřejmé je též tvrzení: *jsou-li $v(s)$, $\mu(s)$ multiplikátory, pak $v(s)\,\mu(s)$ je rovněž multiplikátor.*

Nyní můžeme již zavést součin distribuce ze $\boldsymbol{Z}'$ a funkce. Buď $g \in \boldsymbol{Z}'$, $\nu(s)$ multiplikátor v $\boldsymbol{Z}$; součinem νg nazveme funkcionál

$$(\nu g, \psi) = (g, \nu^* \psi) . \tag{28}$$

Z toho, co jsme dokázali, vyplývá, že je $\nu g \in \boldsymbol{Z}'$.
Dále platí

Věta 3. *Buď* $f, g \in \boldsymbol{Z}'$; $\nu(s), \mu(s)$ *multiplikátory: pak platí*

$$\nu(f + g) = \nu f + \nu g \; ; \qquad \nu(\mu g) = (\nu\mu) \, g \, .$$

Důkaz je zřejmý, stačí si pouze uvědomit, že je

$$\mu^*(s) \, \nu^*(s) = \overline{\mu(\bar{s})} \, . \, \overline{\nu(\bar{s})} = \overline{\mu(\bar{s}) \, \nu(\bar{s})} = (\mu(s) \, \nu(s))^* \, .$$

Některé funkcionály ze $\boldsymbol{Z}'$ je možno definovat integrálem; je-li C křivka v rovině s, jejíž každá v konečnu ležící část je rektifikovatelná, $h(s)$ funkce definovaná na C, přičemž existuje $r \geqq 0$ tak, že pro každé $b \geqq 0$ je

$$\int_C |h(s)| \, (1 + |s|)^{-r} \exp\left(b \, |\tau|\right) \, |\mathrm{d}s| < \infty \, ,$$

potom zřejmě předpisem

$$(h, \psi) = \int_C h(s) \, \psi(s) \, \mathrm{d}s \tag{29}$$

je definována distribuce na $\boldsymbol{Z}$. My si zde všimneme dvou nejdůležitějších případů, a to regulárních a analytických distribucí.

Buď $g(\omega)$ funkce, definovaná na $(-\infty, \infty)$; $g(\omega)$ nazveme „pomalu rostoucí", existuje-li celé číslo $r \geqq 0$ tak, že $g(\omega) \, (1 + |\omega|)^{-r}$ je absolutně integrovatelná na $(-\infty, \infty)$. Zřejmě potom funkcionál g, definovaný předpisem

$$(g, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(\omega)} \, \psi(\omega) \, \mathrm{d}\omega \tag{30}$$

je $g \in \boldsymbol{Z}'$. Ty distribuce ze $\boldsymbol{Z}'$, ke kterým existuje taková pomalu rostoucí funkce $g(\omega)$ tak, že platí (30), nazveme regulárními. Lze dokázat, že *ke každé regulární distribuci je příslušná funkce* $g(\omega)$ *určena jednoznačně až na množinu míry nula.* (Srv. [2]). Naopak každou pomalu rostoucí funkci budeme pojímat jako distribuci na $\boldsymbol{Z}$ podle rov. (30). Analogicky jako v $\boldsymbol{K}'$, budeme regulární distribuce zapisovat symbolem $g = g(\omega)$.

Buď nyní $g(s)$ funkce, která splňuje podmínky:

1. $g(s)$ je analytická v pásu $-\infty \leqq \tau_1 < \tau < \tau_2 \leqq \infty$,

2. existuje pevné číslo $r \geqq 0$ a ke každé dvojici $\xi_1 < \xi_2$; $\xi_1, \xi_2 \in (\tau_1, \tau_2)$ existuje číslo C tak, že je

$$|g(s)| \leqq C(1 + |s|)^r \quad \text{pro} \quad \xi_1 \leqq \operatorname{Im} s \leqq \xi_2 \, .$$

Utvořme na $\boldsymbol{Z}$ funkcionál g předpisem

$$(g, \psi) = \int_{-\infty + ia}^{\infty + ia} g^*(s) \, \psi(s) \, \mathrm{d}s \, , \quad -\tau_2 < a < -\tau_1 \, , \tag{31}$$

kde integrace se béře po přímce $\tau = a$. Očividně $g \in \boldsymbol{Z}'$ a v důsledku Cauchyovy věty funkcionál g nezávisí na a (pokud ovšem splňuje nerovnost $-\tau_2 < a < -\tau_1$). Takové distribuce g, které připouštějí vyjádření (31), nazveme analytickými.[1])

Pro jednoduchost zápisu zavedeme následující licenci: analytickou distribuci g, vyjádřenou rov. (31), budeme prostě zapisovat symbolem $g = g(s)$, $[-\tau_2 < a < -\tau_1]$. Tak tedy například symbol $(s^2+1)^{-1}$, $[a > 1]$ značí distribuci $\int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} . (s^2+1)^{-1}\psi(s)\,ds$, $a > 1$.

Z vyslovené definice je zřejmé, že každá analytická distribuce, pro kterou $\tau_1 < 0 < \tau_2$, je současně regulární distribucí.

Distributivní konstantou C, analogicky jako v $\boldsymbol{K}'$, rozumíme funkcionál

$$(C, \psi) = C\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega)\,d\omega\,.$$

Čtenář se snadno přesvědčí, že pro námi zavedené násobení distribucí ze $\boldsymbol{Z}'$ multiplikátorem platí následující tvrzení: *Je-li g regulární, odpovídající funkci $g(\omega)$, $v(s)$ multiplikátor, pak vg je regulární a odpovídá funkci $v(\omega)\,g(\omega)$.*

Obdobně platí: *je-li analytická distribuce $g = g(s)$, $[-\tau_2 < a < -\tau_1]$, pak $vg = v(s)\,g(s)$, $[-\tau_2 < a < -\tau_1]$.*

V $\boldsymbol{Z}'$ existují distribuce, které nejsou regulární; takovou je Diracova distribuce δ_ξ, kde ξ je (komplexní) číslo, která je definována předpisem

$$(\delta_\xi, \psi) = \psi(\bar{\xi})\,. \tag{32}$$

(Z věty 2 plyne, že δ_ξ skutečně patří do $\boldsymbol{Z}'$.)

Pro δ_ξ platí tvrzení:

Je-li $v(s)$ multiplikátor, pak

$$v\delta_\xi = v(\xi)\,\delta_\xi\,. \tag{33}$$

Vskutku, podle (32) a definice násobení máme

$$(v\delta_\xi, \psi) = (\delta_\xi, v^*\psi) = v^*(\bar{\xi})\,\psi(\bar{\xi}) = \overline{v(\xi)}\,\psi(\bar{\xi}) = (\delta_\xi, \overline{v(\xi)}\,\psi) = (v(\xi)\,\delta_\xi, \psi). \text{ c. b. d.}$$

Obdobně jako v $\boldsymbol{K}'$ tak i pro $\boldsymbol{Z}'$ zavedeme derivaci. Buď $g \in \boldsymbol{Z}'$; derivací g' nazveme funkcionál podle předpisu

$$(g', \psi) = (g, -\psi')\,. \tag{34}$$

Lehko vidíme, že funkcionál (g', ψ) je lineární, a z věty 2 vyplývá, že je i spojitý, takže $g' \in \boldsymbol{Z}'$. Odtud plyne

Věta 4. *Každá distribuce $g \in \boldsymbol{Z}'$ má derivace všech řádů a je*

$$(g^{(n)}, \psi) = (g, (-1)^n\,\psi^{(n)})\,. \tag{35}$$

Speciálně tedy platí

$$(\delta_\xi^{(n)}, \psi) = (-1)^n\,\psi^{(n)}(\bar{\xi})\,. \tag{36}$$

---

[1]) „Analytická distribuce" je zde pojata úžeji než ve [2].

Snadno lze dokázat následující tvrzení:

Buď $g(\omega)$ absolutně spojitá, jejíž derivace $g'(\omega)$ je pomalu rostoucí; potom distribuce g' je regulární a odpovídá funkci $g'(\omega)$.

Dále budeme ještě potřebovat pojem posuvu distribuce. Buď h číslo, $g \in \boldsymbol{Z}'$; posuvem $P_h g$ označíme funkcionál na $\boldsymbol{Z}$ podle předpisu

$$(P_h g, \psi) = (g, \psi(s + \bar{h})) . \tag{37}$$

Snadno nahlédneme, že $P_h g \in \boldsymbol{Z}'$. Vskutku, předně podle (15) je $\psi(s + \bar{h}) \in \boldsymbol{Z}$. Je-li dále $\psi_n(s) \to 0$ v $\boldsymbol{Z}$, je podle věty 2 $\phi_n(t) \to 0$ v $\boldsymbol{K}$, takže též $\exp(-i\bar{h}t) . \phi_n(t) \to 0$ v $\boldsymbol{K}$, a tedy podle (15) je $F[\exp(-i\bar{h}t) . \phi_n(t)] = \psi_n(s + \bar{h}) \to 0$ v $\boldsymbol{Z}$. Je tedy funkcionál $P_h g$ spojitý, a ježto zřejmě je lineární, je $P_h g \in \boldsymbol{Z}'$, c. b. d.

Všimněme si na tomto místě, co značí posuv analytické distribuce. Buď tedy $g = g(s)$, $[-\tau_2 < a < -\tau_1]$; pak máme

$$(P_h g, \psi) = (g, \psi(s + \bar{h})) = \int_{-\infty + ia}^{\infty + ia} g^*(s)\, \psi(s + \bar{h})\, \mathrm{d}s\,, \quad -\tau_2 < a < -\tau_1\,.$$

Zavedeme-li sem novou proměnnou $z = s + \bar{h}$, platí

$$(P_h g, \psi) = \int_{-\infty + ia + \bar{h}}^{\infty + ia + \bar{h}} \overline{g(\bar{z} - h)}\, \psi(z)\, \mathrm{d}z = \int_{\dots}^{\dots} g^*(z - h)\, \psi(z)\, \mathrm{d}z\,,$$

takže je

$$P_h g(s) = g(s - h)\,, \quad [-\tau_2 - \operatorname{Im} h < a < -\tau_1 - \operatorname{Im} h]\,. \tag{38}$$

Snadno dále nahlédneme správnost tvrzení:

Buďte $g \in \boldsymbol{Z}'$, α, h čísla: pak platí

(39) 1. $P_h(\alpha g) = \alpha(P_h g)$,
2. $P_h \delta_0^{(n)} = \delta_h^{(n)}$.

Vskutku, pro 1. máme $(P_h(\alpha g), \psi) = (\alpha g, \psi(s + \bar{h})) = (g, \bar{\alpha}\psi(s + \bar{h})) = (P_h g, \bar{\alpha}\psi) = (\alpha(P_h g), \psi)$. Tvrzení 2. je zřejmé.

Konvergenci v systému $\boldsymbol{Z}'$ zavedeme následovně: buďte $g, g_n \in \boldsymbol{Z}'$; $n = 1, 2, \dots$; řekneme, že $g_n \to g$, jestliže pro libovolnou $\psi(s) \in \boldsymbol{Z}$ je $(g_n, \psi) \to (g, \psi)$.

Je zřejmé, že *konvergentní posloupnost distribucí ze $\boldsymbol{Z}'$ má právě jednu limitu.* Přímo z definice vyplývá

Věta 5. *Buďte $g, g_n, h, h_n \in \boldsymbol{Z}'$; $n = 1, 2, \dots, v(s)$ multiplikátor; je-li $g_n \to g$, $h_n \to h$, pak*

$$g_n + h_n \to g + h\,; \quad v g_n \to v g\,; \quad g_n' \to g'\,. \tag{40}$$

Buďte dále $h_n, h \in \boldsymbol{Z}'$; $n = 1, 2, \dots$; jestliže $\sum_{n=1}^{k} h_n \to h$, zapíšeme to symbolem $h = \sum_{n=1}^{\infty} h_n$.

Distribuce ze $\boldsymbol{Z}'$, na rozdíl od distribucí z $\boldsymbol{K}'$, mají vlastnosti analytických funkcí, tj. mají „Taylorův rozvoj“. Platí totiž následující

Věta 6. *Je-li $g \in \boldsymbol{Z}'$, h číslo, pak platí*

(41) $$P_{-h}g = \sum_{k=0}^{\infty} g^{(k)}h^k/k!\,.$$

Důkaz: Zvolme $\psi(s) \in \boldsymbol{Z}$ a pro $n > 0$ klaďme $g_n = \sum_{k=0}^{n} g^{(k)}h^k/k!$ Pak platí $(g_n, \psi) = \sum_{k=0}^{n}(g^{(k)}h^k/k!, \psi) = \sum_{k=0}^{n}(g, (-1)^k\bar{h}^k\psi^{(k)}/k!) = (g, \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\bar{h}^k\psi^{(k)}/k!)$. Podle definice (37) je $(P_{-h}g, \psi) = (g, \psi(s - \bar{h}))$. Utvoříme-li distribuce $f_n = P_{-h}g - g_n$, máme

$$(f_n, \psi) = (g, \psi(s - \bar{h}) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\bar{h}^k\psi^{(k)}(s)/k!)\,.$$

Ježto však podle (21) je

$$\psi(s - \bar{h}) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\bar{h}^k\psi^{(k)}(s)/k! \to 0 \text{ v } \boldsymbol{Z}\,,$$

vyplývá ze spojitosti funkcionálu g, že $(f_n, \psi) \to 0$, tj. $g_n \to P_{-h}g$, c. b. d.

Nyní máme již všechno připraveno k tomu, abychom mohli zavést Fourierovu transformaci.

Buď $f \in \boldsymbol{K}'$; funkcionál $\tilde{f}$, definovaný na $\boldsymbol{Z}$ rovnicí

(42) $$(\tilde{f}, \psi) = 2\pi(f, \phi)\,, \quad \psi = F[\phi]\,,$$

nazveme Fourierovým obrazem distribuce f. Budeme jej též značit $F[f]$.

Očividně $\tilde{f} \in \boldsymbol{Z}'$; vskutku, $(\tilde{f}, \psi)$ je zřejmě lineární, a je-li $\psi_n(s) \to 0$ v $\boldsymbol{Z}$, pak podle věty 2 je $\phi_n(t) \to 0$ v $\boldsymbol{K}$, takže $(\tilde{f}, \psi_n) \to 0$, c. b. d.

Nyní platí

Věta 7. *Buď $f(t)$ absolutně integrovatelná funkce v $(-\infty, \infty)$ a buď $g(\omega)$ její (obyčejný) Fourierův obraz, tj.*

(43) $$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t\,, \quad \omega \in (-\infty, \infty)\,.$$

Potom obraz $\tilde{f}$ distribuce f podle (42) je regulární distribuce na $\boldsymbol{Z}$ a je $\tilde{f} = g(\omega)$.

Důkaz: Podle definice funkcionálu (f, ϕ) a Fubiniovy věty platí pro libovolnou $\phi(t) \in \boldsymbol{K}$:

$$(f, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)}\, \phi(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega)\, e^{i\omega t}\, \mathrm{d}\omega\right\} \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega) \overline{\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t\right\}} \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega)\, \overline{g(\omega)}\, \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}(g, \psi)\,,$$

takže $(g, \psi) = 2\pi(f, \phi) = (\tilde{f}, \psi)$, c. b. d.

Z definice (42) vyplývá, že *každá $f \in \boldsymbol{K}'$ má obraz*. Naopak plyne z věty 2 (prosté zobrazení $\boldsymbol{K}$ na $\boldsymbol{Z}$), že *každá $g \in \boldsymbol{Z}'$ je obrazem některé $f \in \boldsymbol{K}'$*. Rovnice (42) zprostředkuje tedy mezi systémy $\boldsymbol{K}'$ a $\boldsymbol{Z}'$ prosté zobrazení. Distribuce z $\boldsymbol{K}'$ budeme též nazývat „vzory" a v důsledku unicity budeme užívat označení $f = F^{-1}[\tilde{f}]$.

Přímo z definice obrazu plyne

Věta 8. *Buď f, $g \in \boldsymbol{K}'$, α číslo; pak platí*

$$F[f + g] = F[f] + F[g]\,; \quad F[\alpha f] = \alpha F[f]\,. \tag{44}$$

Prvá rovnost je triviální; dokažme proto jen druhou! Máme

$(F[\alpha f], \psi) = 2\pi(\alpha f, \phi) = 2\pi(f, \bar{\alpha}\phi) = (F[f], F[\bar{\alpha}\phi]) = (F[f], \bar{\alpha}\psi) = (\alpha F[f], \psi)$,

c. b. d.

Dále platí

Věta 9. *Buď $f \in \boldsymbol{K}'$, n celé $\geqq 0$; pak*

$$F[f^{(n)}] = (is)^n F[f]\,. \tag{45}$$

Důkaz: Podle definice a (8) je

$$(F[f^{(n)}], \psi) = 2\pi(f^{(n)}, \phi) = 2\pi(f, (-1)^n\phi^{(n)}) = (F[f], F[(-1)^n\phi^{(n)}]) =$$
$$= (F[f], (-1)^n(is)^n F[\phi]) = ((-1)^n(is)^n F[f], \psi) = ((is)^n F[f], \psi), \text{ c. b. d.}$$

Je-li tedy $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, platí podle (45) a (44) vzorec

$$F[P(D) f] = P(is)\, F[f]\,,$$

kde D značí operátor derivování.

Duální je následující

Věta 10. *Buď $f \in \boldsymbol{K}'$, n celé $\geqq 0$; pak platí*

$$(F[f])^{(n)} = F[(-it)^n f]\,. \tag{46}$$

Důkaz: Dle definice, (7) a (35) máme

$$(F[(-it)^n f], \psi) = 2\pi((-it)^n f, \phi) = 2\pi(f, (it)^n\phi) = (F[f], F[(it)^n\phi]) =$$
$$= (F[f], (-1)^n\psi^{(n)}) = ((F[f])^{(n)}, \psi), \text{ c. b. d.}$$

Pro posuv obrazu platí

Věta 11. *Buď $f \in \boldsymbol{K}'$, λ číslo; pak platí*

$$F[e^{i\lambda t} f] = P_\lambda F[f]\,. \tag{47}$$

Důkaz: Podle definice, rov. (15) a (37) máme

$$(F[e^{i\lambda t} f], \psi) = 2\pi(e^{i\lambda t} f, \phi) = 2\pi(f, e^{-i\bar{\lambda}t}\phi) = (F[f], F[e^{-i\bar{\lambda}t}\phi]) = (F[f],$$
$$\psi(s + \bar{\lambda})) = (P_\lambda F[f], \psi), \text{ c. b. d.}$$

Duálním tvrzením k větě 11 je následující

Věta 12. *Buď $f \in \boldsymbol{K}'$, h reálné číslo; pak platí*

$$F[P_h f] = \exp(-ihs)\,.\,F[f]\,. \tag{48}$$

Důkaz: Podle (4a) a (14) platí

$$(F[P_h f], \psi) = 2\pi(P_h f, \phi) = 2\pi(f, \phi(t + h)) = (F[f], F[\phi(t + h)]) =$$
$$= (F[f], e^{ish}\psi) = (e^{-ish}F[f], \psi), \text{ c. b. d.}$$

Věty 8 – 12 ukazují, že pro zavedenou Fourierovu transformaci distribucí platí formálně stejné vzorce, jako pro klasickou transformaci.

Triviální avšak důležitá je následující

Věta 13. *Buďte $f, f_n \in \mathbf{K}'$, $n = 1, 2, \ldots$; nutnou a postačující podmínkou pro to, aby bylo $f_n \to f$, je $F[f_n] \to F[f]$.*

Důkaz: Buď tedy $f_n \to f$. Zvolme $\psi(s) \in \mathbf{Z}$ a buď $\phi(t) \in \mathbf{K}$, pro kterou je $F[\phi] = \psi$. Podle definice je $(f_n, \phi) \to (f, \phi)$, takže $2\pi(f_n, \phi) \to 2\pi(f, \phi)$, tj. $(F[f_n], \psi) \to (F[f], \psi)$. Důkaz obráceného tvrzení je stejný.

Věnujme nyní pozornost několika speciálním případům. Snadno se přesvědčíme, že platí: *je-li h reálné číslo, pak platí*

$$F[\delta_h] = \exp(-ihs), \quad [-\infty < a < \infty]. \tag{49}$$

Vskutku, podle definice je

$$(F[\delta_h], \psi) = 2\pi(\delta_h, \phi) = 2\pi\phi(h) = 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega)\, e^{i\omega h}\, d\omega\,.$$

Avšak integrál vpravo je roven integrálu

$$\int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} \psi(s)\, e^{ish}\, ds = \int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} (e^{-ish})^* \, \psi(s)\, ds$$

pro libovolné reálné a, takže podle naší symboliky (49) platí.

Podle věty 9 tedy platí obecně pro h reálné, n celé $\geqq 0$:

$$F[\delta_h^{(n)}] = (is)^n \exp(-ihs), \quad [-\infty < a < \infty]. \tag{50}$$

Snadno se dále přesvědčíme, že platí vzorec

$$F[1] = 2\pi\delta_0\,. \tag{51}$$

Máme totiž $(F[1], \psi) = 2\pi(1, \phi) = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\, dt = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \exp(it \,.\, 0)\, dt = 2\pi\psi(0)$, c. b. d.

Stanovme nyní $F[t^n]$, $n \geqq 0$ celé. Podle věty 10 a rov. (51) platí $F[(-it)^n \,.\, 1] = (2\pi\delta_0)^{(n)}$; avšak $F[(-it)^n \,.\, 1] = F[(-i)^n t^n] = (-i)^n F[t^n]$, takže

$$F[t^n] = 2\pi i^n \delta_0^{(n)}\,. \tag{52}$$

Pomocí věty 11 odtud snadno plyne pro $n \geqq 0$ celé vzorec

$$F[t^n \exp(i\lambda t)] = 2\pi i^n \delta_\lambda^{(n)}\,. \tag{53}$$

Speciálně pro $n = 0$, $i\lambda = a$ máme

$$F[\exp(at)] = 2\pi\delta_{-ia}\,. \tag{54}$$

Odtud plynou vzorce

$$F[\cos \lambda t] = \pi(\delta_\lambda + \delta_{-\lambda})\,; \quad F[\sin \lambda t] = -i\pi(\delta_\lambda - \delta_{-\lambda})\,. \tag{55}$$

Užitečná je následující

Věta 14. *Buď $f(t)$ integrovatelná funkce, která má periodu 2π. Je-li $C_n = \pi^{-1}$ . . $\int_0^{2\pi} f(t) \exp(-int)\,dt$, $n = 0, \pm 1 \pm 2, \ldots$ (Fourierovy koeficienty), pak platí*

$$F[f] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta_n \,. \tag{56}$$

Důkaz: Snadno lze dokázat (srv. [2], str. 46), že Fourierova řada pro $f(t)$ konverguje v distributivním smyslu k f, tj. že

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(int) \,. \tag{57}$$

Pomocí věty 13 a vzorce (54) pak okamžitě z (57) plyne (56).

Obdobná je

Věta 15. *Buď $f(t)$ celistvá analytická funkce proměnné t, tj. $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, kde řada konverguje pro každé t; pak platí*

$$F[f] = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} a_k i^k \delta_0^{(k)} \,. \tag{58}$$

Důkaz: Za uvedených předpokladů konverguje řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ stejnoměrně na každém konečném intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$, a tedy konverguje i v distributivním smyslu. Podle věty 13 a vzorce (53) dostaneme ihned (58).

Příklad: Pro Besselovu funkci $J_0(t)$ platí pro každé t řada $J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ . . $(t/2)^{2k}/(k!)^2$. Platí tedy $F[J_0(t)] = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k}(k!)^{-2} \delta_0^{(2k)}$. Snadno se přesvědčíme, že $F[J_0(t)]$ je regulární distribuce $g(\omega)$, kde

$$\begin{aligned} g(\omega) &= 2(1 - \omega^2)^{-1/2} \quad &&\text{pro} \quad |\omega| < 1 \,, \\ &= 0 &&\text{pro} \quad |\omega| \geqq 1 \,. \end{aligned}$$

Vskutku, předně podle (36) je $(F[J_0(t)], \psi) = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k}(k!)^{-2} \psi^{(2k)}(0)$. Na druhé straně máme

$$(g, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(\omega)} \psi(\omega)\,d\omega = 2 \int_{-1}^{1} \psi(\omega)(1 - \omega^2)^{-1/2}\,d\omega = 2 \int_{-1}^{1} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \psi^{(i)}(0) \omega^i / i!\right) . \\ . (1 - \omega^2)^{-1/2}\,d\omega \,.$$

Zřejmě v posledním integrálu možno přehodit pořadí integrace a sumace, takže platí

$$(g, \psi) = 2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi^{(i)}(0) \,.\, (i!)^{-1} \int_{-1}^{1} \omega^i (1 - \omega^2)^{-1/2}\,d\omega = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k}(k!)^{-2} \psi^{(2k)}(0) \,.$$

Je tedy $F[J_0(t)] = g(\omega)$, c. b. d.

Stanovme nyní $F[H_T]$, kde $H_T(t) = 1$ pro $t > T$, $H_T(t) = 0$ pro $t \leqq T$. K tomuto cíli uvažme funkci $f_\varepsilon(t) = H_0(t) \exp(-\varepsilon t)$, $\varepsilon > 0$. Jejím (obyčejným) Fourierovým obrazem je $\int_0^\infty \exp(-\varepsilon t - i\omega t)\,\mathrm{d}t = (\varepsilon + i\omega)^{-1}$, takže podle věty 7 platí

$$(F[f_\varepsilon], \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon - i\omega)^{-1} \psi(\omega)\,\mathrm{d}\omega\,.$$

Z Cauchyovy věty vyplývá, že zároveň platí

$$(F[f_\varepsilon], \psi) = \int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} (\varepsilon - is)^{-1} \psi(s)\,\mathrm{d}s\,, \quad a > -\varepsilon\,. \tag{59}$$

Jinak můžeme uvažovaný funkcionál vyjádřit takto: z residuové věty plyne pro $a < -\varepsilon$:

$$\int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} (\varepsilon - is)^{-1} \psi(s)\,\mathrm{d}s - \int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon - i\omega)^{-1} \psi(\omega)\,\mathrm{d}\omega =$$
$$= 2\pi i \operatorname*{Res}_{s=-i\varepsilon} [(\varepsilon - is)^{-1}\, \psi(s)] = -2\pi\psi(-i\varepsilon)\,,$$

takže

$$(F[f_\varepsilon], \psi) = 2\pi\psi(-i\varepsilon) + \int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} (\varepsilon - is)^{-1} \psi(s)\,\mathrm{d}s\,, \quad a < -\varepsilon\,. \tag{60}$$

Ježto však $f_\varepsilon(t) \to H_0(t)$ stejnoměrně na každém konečném intervalu pro $\varepsilon \to 0$, je v distributivním smyslu $f_\varepsilon \to H_0$, takže podle věty 13 platí $(F[f_\varepsilon], \psi) \to (F[H_0], \psi)$ pro každou $\psi(s) \in \mathbf{Z}$. Avšak zřejmě $\int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} (\varepsilon - is)^{-1} \psi(s)\,\mathrm{d}s \to \int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} (-is)^{-1}\,.\,\psi(s)\,\mathrm{d}s$ pro $\varepsilon \to 0$ jak pro $a > 0$, tak pro $a < 0$, a současně je $\psi(-i\varepsilon) \to \psi(0)$; můžeme tedy podle naší symboliky na základě (59) a (60) psát:

$$F[H_0] = (is)^{-1},\ [a > 0]\,;\ F[H_0] = 2\pi\delta_0 + (is)^{-1}\,,\quad [a < 0]\,. \tag{61}$$

Odtud pomocí věty 12 máme ihned hledané vzorce

$$F[H_T] = (is)^{-1} \exp(-isT),\ [a > 0];$$
$$F[H_T] = 2\pi\delta_0 + (is)^{-1} \exp(-isT)\,,\quad [a < 0]\,. \tag{62}$$

(neboť je $\exp(-isT)\,.\,\delta_0 = \exp(-iT\,.\,0)\,.\,\delta_0$).

Pomocí vzorce (61) a vět 10, 11 mohli bychom nyní vypočíst obrazy funkcí $H_0(t)\,.\,\exp(\alpha t)$, $H_0(t)\, t^n$, $H_0(t) \cos \alpha t$ atd. Ježto však by zde šlo pouze o elementární úpravy již odvozených vzorců, všimneme si raději celé věci obecně. Existuje totiž úzká souvislost mezi Fourierovým a Laplaceovým obrazem „laplaceovských distribucí“ (ty jsou rovny nule na $(-\infty, 0)$). (Srv. [1], str. 415.) Platí totiž

Věta 16. *Buď $f \in \mathbf{K}'$ laplaceovská distribuce a nechť Laplaceův obraz $\mathscr{L}(f) = G(p)$ je definován v polorovině* $\operatorname{Re} p > \xi$. *Pak platí*

$$F[f] = G(is)\,,\quad [a > \xi]\,. \tag{63}$$

Důkaz: Nechť tedy $f = H^{(k)}$, $H(t) = 0$ pro $t < 0$ a je spojitá v $(-\infty, \infty)$, přičemž $|H(t)| < M \exp(\xi t)$. (Srv. [1]!) Podle definice Laplaceova obrazu je $\mathscr{L}(f) = G(p) = p^k K(p)$, kde

$$K(p) = \int_0^\infty \exp(-pt)\, H(t)\,\mathrm{d}t\,,\ \operatorname{Re} p > \xi\,.$$

Zvolme některé p_0 reálné, $p_0 > \xi$; potom funkce $h(t) = H(t) \exp(-p_0 t)$ má obyčejný Fourierův obraz

$$r(\omega) = \int_0^\infty H(t) \exp[-(p_0 + i\omega)\, t]\,\mathrm{d}t = K(p_0 + i\omega)\,.$$

Podle věty 7 však platí pro $F[h]$:

$$(F[h], \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{r(\omega)}\psi(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{K(p_0 + i\omega)}\, \psi(\omega)\, d\omega\,.$$

Funkce $K(p)$ je regulární v polorovině $\operatorname{Re} p > \xi$; to značí, že funkce $K(p_0 + is)$ proměnné s je regulární v polorovině $\operatorname{Im} s < p_0 - \xi$, a tedy funkce $K^*(p_0 + is) = \overline{K(p_0 + i\bar{s})}$ je regulární v polorovině $\operatorname{Im} s > \xi - p_0$; očividně tato polorovina obsahuje osu ω. V důsledku Cauchyovy věty tedy platí pro každé $a > \xi - p_0$:

(64) $$(F[h], \psi) = \int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} K^*(p_0 + is)\, \psi(s)\, ds\,.$$

Ježto $H(t) = h(t) \exp(p_0 t)$, je podle věty 11 $F[H] = F[h \exp(p_0 t)] = P_{-ip_0}F[h]$, a dále podle definice posuvu

$$(P_{-ip_0}F[h], \psi) = (F[h],\ \psi(s - \overline{ip_0})) = (F[h],\ \psi(s + ip_0))\,.$$

Podle (64) tedy je

$$(F[H], \psi) = \int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} \overline{K(p_0 + i\bar{s})}\, \psi(s + ip_0)\, ds\,, \quad a > \xi - p_0\,.$$

Položíme-li sem $z = s + ip_0$, takže je $\bar{s} = \bar{z} + ip_0$, obdržíme konečně $(F[H], \psi) = \int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} \overline{K(i\bar{z})}\, \psi(z)\, dz$, $b = a + p_0 > \xi$. V naší symbolice tedy platí $F[H] = K(is)$, $[a > \xi]$. Podle věty 9 konečně je

$$F[f] = F[H^{(k)}] = (is)^k F[H] = (is)^k K(is) = G(is), \quad [a > \xi]\,, \quad \text{c. b. d.}$$

Uveďme si několik příkladů! Jak známo, platí

$$\mathscr{L}(H_0 t^\nu) = p^{-\nu-1}\Gamma(\nu + 1), \quad \operatorname{Re} \nu > -1\,, \quad \operatorname{Re} p > 0\,;$$

$$\mathscr{L}(H_0 \cos \lambda t) = p/(p^2 + \lambda^2)\,, \quad \operatorname{Re} p > 0\,; \quad \mathscr{L}(H_0 \exp(\alpha t)) = (p - \alpha)^{-1}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha\,;$$

odtud plyne

(65) $$F[H_0 t^\nu] = (is)^{-\nu-1}\Gamma(\nu + 1)\,, \quad [a > 0]\,.$$
$$F[H_0 \cos \lambda t] = is/(\lambda^2 - s^2)\,, \quad [a > 0]\,.$$
$$F[H_0 \exp(\alpha t)] = (is - \alpha)^{-1}\,, \quad [a > \operatorname{Re} \alpha]\,.$$

Přistupme nyní k řešení důležitého problému – dělení distribucí ze $\mathbf{Z}'$. Ke zkoumání této otázky využijeme s výhodou isomorfismu mezi prostory $\mathbf{K}'$ a $\mathbf{Z}'$.

Předně platí

Věta 17. *Buď $f \in \mathbf{K}'$, α číslo, $r > 0$ celé a nechť $\tilde{f} = F[f]$; potom vzor x každého řešení $\tilde{x}$ rovnice*

(66) $$(s - \alpha)^r \tilde{x} = \tilde{f}$$

má tvar

(67) $$x = i^r e^{i\alpha t}(e^{-i\alpha t} f)^{(-r)} + e^{i\alpha t} \sum_{k=0}^{r-1} C_k t^k\,,$$

tj. ke každému řešení $\tilde{x}$ rov. (66) lze najít čísla $C_0, C_1, \ldots, C_{r-1}$ a sestrojit r-tou primitivní distribuci k $\exp(-i\alpha t) \,.\, f$ tak, že je $F[x] = \tilde{x}$.

Důkaz: Je-li $g \in \boldsymbol{K}'$, pak je známo, že všechna řešení rovnice $u^{(r)} = g$ mají tvar (srv. [2])

(68) $$u = g^{(-r)} + \sum_{k=0}^{r-1} C_k t^k .$$

Odtud plyne, že všechna řešení rovnice $\exp(i\alpha t)\left[\exp(-i\alpha t) . x\right]^{(r)} = i^r f$ mají tvar (67). Poslední rovnici však lze psát jako

(69) $$\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} x^{(r-k)}(-i\alpha)^k = i^r f .$$

Je-li x nějaké řešení (69) a položíme-li $\tilde{x} = F[x]$, je rov. (69) podle věty 9 ekvivalentní rovnici

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (is)^{r-k}(-i\alpha)^k \tilde{x} = i^r \tilde{f} ,$$

tj. rovnici $(s-\alpha)^r \tilde{x} = \tilde{f}$. Ježto Fourierova transformace zprostředkuje prosté zobrazení $\boldsymbol{K}'$ na $\boldsymbol{Z}'$, je věta dokázána.

Pro úplnost uveďme nyní větu, která poskytuje řešení (66) explicitně a blíže si všímá některých jeho vlastností. (Zřejmě věta 17 poskytuje řešení (66) jen nepřímo, pomocí jeho vzoru.)

Věta 18. *Buď $\tilde{f} \in \boldsymbol{Z}'$, α číslo, $r > 0$ celé a nechť $\psi_0(s), \psi_1(s), \ldots, \psi_{r-1}(s) \in \boldsymbol{Z}$ tvoří normální soustavu (srv. lemma 1!). Buď funkcionál $\tilde{x}$ definován na $\boldsymbol{Z}$ rovnicí*

(70) $$(\tilde{x}, \psi) = (\tilde{f}, \rho(s)) ,$$

kde

(71) $$\rho(s) = (s-\bar{\alpha})^{-r} \{\psi(s) - \psi(\bar{\alpha})\,\psi_0(s-\bar{\alpha}) - \psi'(\bar{\alpha})\,\psi_1(s-\bar{\alpha}) - \ldots - \\ - \psi^{(r-1)}(\bar{\alpha})\,\psi_{r-1}(s-\bar{\alpha})\} .$$

Buďte dále $C_0, C_1, \ldots, C_{r-1}$ čísla a nechť $\tilde{y} = \sum_{k=0}^{r-1} C_k \delta_\alpha^{(k)}$; pak platí

1. $x \in \boldsymbol{Z}'$,
2. *je-li*

(72) $$x = \tilde{x} + \tilde{y} ,$$

pak x vyhovuje rovnici

(73) $$(s-\alpha)^r x = \tilde{f} ,$$

3. *každá distribuce $x \in \boldsymbol{Z}'$, vyhovující rov. (73) má tvar (72).*

Důkaz: Předně se lze snadno přesvědčit, že $\tilde{x} \in \boldsymbol{Z}'$; nejprve se dokáže, že $\rho(s) \in \boldsymbol{Z}$ pro každou $\psi(s) \in \boldsymbol{Z}$; dále je zřejmé, že funkcionál $(\tilde{x}, \psi)$ je při pevné normální soustavě $\psi_0(s), \psi_1(s), \ldots, \psi_{r-1}(s)$ lineární, a bez obtíží lze nahlédnout, že je též spojitý, tj. že $(\tilde{x}, \psi_n) \to 0$ pro každou posloupnost $\psi_n \to 0$ v $\boldsymbol{Z}$. (Od detailního provedení zde upouštíme; důkaz je celkem zřejmý na základě definice normální soustavy, a proto jeho provedení doporučujeme čtenáři jako užitečné cvičení.)

Ukažme nyní, že je $(s - \alpha)^r \tilde{x} = \tilde{f}$; máme

$$((s - \alpha)^r \tilde{x}, \psi) = (\tilde{x}, (s - \bar{\alpha})^r \psi) = (\tilde{f}, \chi),$$

kde podle (71) je

$$\chi(s) = (s - \alpha)^{-r} \{(s - \bar{\alpha})^r \psi(s)\} = \psi(s),$$

neboť funkce $(s - \alpha)^r \psi(s)$ má v bodě $s = \alpha$ r-násobnou nulu, takže je $[((s - \bar{\alpha})^r \,.\, \psi(s))^{(k)}]_{s=\bar{\alpha}} = 0$ pro $k = 0, 1, \ldots, r - 1$. Je tedy $((s - \alpha)^r \tilde{x}, \psi) = (\tilde{f}, \psi)$, a tedy $\tilde{x}$ je řešením (73).

Snadno dále nahlédneme, že pro $\tilde{y}$ platí $(s - \alpha)^r \tilde{y} = 0$. Vskutku, pro $k = 0, 1, \ldots, \ldots, r - 1$ máme

$$((s - \alpha)^r C_k \delta_\alpha^{(k)}, \psi) = (\delta_\alpha^{(k)}, \bar{C}_k (s - \bar{\alpha})^r \psi(s)) = (-1)^k \{[\bar{C}_k (s - \bar{\alpha})^r \psi(s)]^{(k)}\}_{s=\bar{\alpha}} = 0.$$

Splňuje tedy distribuce $x = \tilde{x} + \tilde{y}$ rov. (73) a tvrzení 2. věty je dokázáno.

Dokažme konečně tvrzení 3. Nechť tedy $x \in \boldsymbol{Z}'$ splňuje rov. (73). Pomocí normální soustavy $\psi_0(s), \psi_1(s), \ldots, \psi_{r-1}(s)$ sestrojme podle (70) distribuci $\tilde{x} \in \boldsymbol{Z}'$. Potom $\tilde{u} = x - \tilde{x}$ splňuje rovnici

$$(s - \alpha)^r \tilde{u} = 0. \tag{74}$$

Podle věty 17 pak vzor $\tilde{u}$ každého řešení $\tilde{u}$ rov. (74) má tvar

$$u = \exp(i\alpha t) \,.\, \sum_{k=0}^{r-1} C_k t^k. \tag{75}$$

Podle vzorce (53) však je $\tilde{u} = F[u] = 2\pi \sum_{k=0}^{r-1} i^k C_k \delta_\alpha^{(k)}$, takže $x = \tilde{x} + \tilde{u}$ má skutečně tvar (72), čímž je věta dokázána.

Všimněme si na tomto místě ještě speciálního případu, kdy $\tilde{f}$ je analytická distribuce. Zde platí

Věta 19. *Buď* $\tilde{f} = f(s)$, $[-\tau_2 < a < -\tau_1]$, α *číslo*, $\operatorname{Im} \alpha \notin (\tau_1, \tau_2)$, $r > 0$ *celé*[2]); *potom každé řešení rovnice* $(s - \alpha)^r x = \tilde{f}$ *má tvar*

$$x = \sum_{k=0}^{r-1} C_k \delta_\alpha^{(k)} + f(s) \,.\, (s - \alpha)^{-r}, \quad [-\tau_2 < a < -\tau_1]. \tag{76}$$

Pro naše účely je velmi důležitá následující věta.

Věta 20. *Buď* $\tilde{f} \in \boldsymbol{Z}'$; $P(s), Q(s) \not\equiv 0$ *mnohočleny; buď dále*

$$P(s)/Q(s) = H(s) + \sum_{i,k} \lambda_{ik}/(s - \alpha_i)^k, \tag{77}$$

kde $H(s)$ *je mnohočlen, a nechť* $g_{ik} \in \boldsymbol{Z}'$ *je řešením rovnice* $(s - \alpha_i)^k g_{ik} = \tilde{f}$. *Pak platí:*

1. *Je-li*

$$\tilde{x} = H(s) \tilde{f} + \sum_{i,k} \lambda_{ik} g_{ik}, \tag{78}$$

---

[2]) Předpoklad $\operatorname{Im} \alpha \notin (\tau_1, \tau_2)$ není podstatný; je-li totiž $\operatorname{Im} \alpha \in (\tau_1, \tau_2)$, pak očividně je $\tilde{f} = f(s)$, $[-\tau_2 < a < -\operatorname{Im} \alpha]$ nebo $[-\operatorname{Im} \alpha < a < -\tau_1]$, čímž je tento případ uveden na předpoklady věty.

pak $\tilde{x}$ je řešením rovnice

$$Q(s)\,\tilde{x} = P(s)\tilde{f}\,. \tag{79}$$

2. *Každé řešení rovnice* (79) *má tvar* (78).

Důkaz: Sestrojme $\tilde{x}$ podle (78). Z (77) plyne, že platí identita

$$P(s) = H(s)\,Q(s) + \sum_{i,k} \lambda_{ik} Q(s)/(s - \alpha_i)^k\,. \tag{80}$$

Pro $\tilde{x}$ potom platí (užíváme komutativnosti multiplikátorů)

$$Q(s)\,\tilde{x} = Q(s)\,H(s)\tilde{f} + \sum_{i,k} \lambda_{ik} Q(s)\,g_{ik} = Q(s)\,H(s)\tilde{f} + \sum_{i,k} \lambda_{ik}[Q(s)\,(s - \alpha_i)^{-k}]\,.$$
$$.\,(s - \alpha_i)^k g_{ik} = Q(s)\,H(s)\tilde{f} + \sum_{i,k} \lambda_{ik} Q(s)\,(s - \alpha_i)^{-k}\tilde{f} = P(s)\tilde{f}, \text{ c. b. d.}$$

Dokažme nyní tvrzení 2.! Nechť tedy x je řešením (79); sestrojme některé řešení $\tilde{x}$ podle rov. (78). Potom zřejmě $\tilde{y} = x - \tilde{x}$ vyhovuje rovnici $Q(s)\,\tilde{y} = 0$. Podle věty 9 je tato rovnice ekvivalentní rovnici $Q(-\,iD)\,y = 0$ v prostoru $\mathbf{K}'$ (D značí operátor derivování a $\tilde{y} = F[y]$) jejímž charakteristickým mnohočlenem je $Q(-\,i\xi)$. Kořeny ξ mnohočlenu $Q(-\,i\xi)$ očividně jsou $i\alpha_i$. Dále je známo, (srv. [2]), že všechna řešení rovnice $Q(-\,iD)\,y = 0$ lze zapsat ve tvaru

$$y = \sum_{i,k} C_{ik} t^k \exp{(i\alpha_i t)}\,. \tag{81}$$

Podle vzorce (53) tedy je $\tilde{y} = 2\pi \sum_{i,k} i^k C_{ik} \delta^{(k)}_{\alpha_i}$. Je tedy $x = \tilde{x} + \tilde{y}$; přihlédneme-li k bodu 2. věty 18 a k rov. (78), ihned vidíme, že x má skutečně tvar (78), čímž je věta dokázána.

Dále platí

Věta 21. *Buďte $\tilde{f}_n \in \mathbf{Z}'$, $n = 0, 1, \ldots$; $P(s)$, $Q(s) \not\equiv 0$ mnohočleny. Je-li $\tilde{f}_n \to \tilde{f}_0$, pak pro každé n lze najít takové řešení $\tilde{x}_n$ rovnice*

$$Q(s)\,\tilde{x}_n = P(s)\tilde{f}_n\,, \tag{82}$$

že je $\tilde{x}_n \to \tilde{x}_0$.

Důkaz: Podle věty 20 je každé řešení rovnice (82) dáno výrazem $\tilde{x}_n = H(s)\tilde{f}_n + \sum_{i,k} \lambda_{ik} g^{(n)}_{ik}$, kde $g^{(n)}_{ik}$ je řešení rovnice $(s - \alpha_i)^k g^{(n)}_{ik} = \tilde{f}_n$. Pro každou dvojici i, k zvolme normální soustavu $\psi_0(s)$, $\psi_1(s)$, $\ldots$, $\psi_{k-1}(s)$ pevnou pro všechna n a sestrojme $g^{(n)}_{ik}$ podle rov. (70) věty 18. Přímo z (70) vyplývá, že je $g^{(n)}_{ik} \to g^{(0)}_{ik}$. Ježto $H(s)$ je multiplikátor, platí zároveň $H\tilde{f}_n \to H\tilde{f}_0$, čímž je věta dokázána.

Později bude užitečná následující věta

Věta 22. *Buď $\tilde{f} \in \mathbf{Z}'$; $P(s)$, $Q(s) \not\equiv 0$ mnohočleny; pak platí;*

a) *Je-li y řešení rovnice*

$$Q(s)\,y = \tilde{f}\,, \tag{83}$$

potom $x = P(s)\,y$ *je řešením rovnice*

$$Q(s)\,x = P(s)\tilde{f}\,. \tag{84}$$

b) *Jsou-li nadto mnohočleny* $P(s)$, $Q(s)$ *nesoudělné, potom každé řešení* x *rov.* (84) *má tvar* $x = P(s)\,y$, *kde* y *je řešení* (83).

Poznamenejme, že pro platnost tvrzení b) je předpoklad nesoudělnosti podstatný. Vskutku, buď např. $P(s) = Q(s) = s^2$, $f = f(s)$, $[a > 0]$; potom rovnice $s^2y = f$ má řešení $y = C_0\delta_0 + C_1\delta_0' + s^{-2}f(s)$, $[a > 0]$. Zde je $x = P(s)\,y = f(s)$, a to skutečně je řešením rovnice $s^2x = s^2f$. Naproti tomu však obecné řešení poslední rovnice je $x = C_0'\delta_0 + C_1'\delta_0' + f(s)$, $[a > 0]$.

K důkazu věty budeme potřebovat následující lemma:

Lemma 2. *Buď* $P(s) \not\equiv 0$ *mnohočlen, který nemá kořen* α, *a nechť* $g = \sum_{i=0}^{k} C_i\delta_\alpha^{(i)}$. *Potom existují čísla* $B_0, B_1, \ldots, B_k$ *tak, že je*

$$P(s)\sum_{i=0}^{k} B_i\delta_\alpha^{(i)} = g\,. \tag{85}$$

Důkaz: Je-li $P(s) \equiv konst.$, je vše jasné. Nechť tedy $P(s) \not\equiv$ konst. Všimněme si, že platí $(s - \beta)\,\delta_\alpha^{(n)} = (\alpha - \beta)\,\delta_\alpha^{(n)} - n\delta_\alpha^{(n-1)}$, $n \geqq 1$. Platí tedy

$$(s - \beta)\sum_{m=0}^{k} A_m\delta_\alpha^{(m)} = A_k(\alpha - \beta)\,\delta_\alpha^{(k)} + \sum_{m=0}^{k-1}(A_m(\alpha - \beta) - A_{m+1}\,(m + 1))\,\delta_\alpha^{(m)}\,. \tag{86}$$

Buď nyní $P(s) = \prod_{i=1}^{r}(s - \beta_i)$; $\beta_i \neq \alpha$; $i = 1, 2, \ldots, r$. Z rovnice (86) plyne, že existují (dokonce jednoznačně) čísla $A_0^{(1)}, \ldots, A_k^{(1)}$ tak, že je $(s - \beta_1)\sum_{m=0}^{k} A_m^{(1)}\delta_\alpha^{(m)} = g$. Analogicky plyne, že existují soustavy čísel $A_0^{(p)}, A_1^{(p)}, \ldots, A_k^{(p)}$; $p = 2, 3, \ldots, r$ tak, že je

$$(s - \beta_i)\sum_{m=0}^{k} A_m^{(i)}\delta_\alpha^{(m)} = \sum_{m=0}^{k} A_m^{(i-1)}\delta_\alpha^{(m)}\,. \tag{87}$$

Klademe-li konečně $A_i^{(r)} = B_i$; $i = 0, 1, \ldots, k$, plyne ze soustavy (87) rovnice (85) a lemma je dokázáno.

Dokažme nyní větu 22! Tvrzení a) je triviální; je-li $Qy = \tilde{f}$, pak $P(Qy) = Q(Py) = Pf\tilde{}$, c. b. d. b): buď tedy x nějaké řešení rovnice $Qx = P\tilde{f}$; zvolme nějaké řešení $\tilde{y}$ rovnice $Q\tilde{y} = \tilde{f}$ a položme $\tilde{x} = P\tilde{y}$. Podle a) platí $Q\tilde{x} = P\tilde{f}$, takže je $Q(x - \tilde{x}) = 0$. Podle věty 20 tedy platí

$$x - \tilde{x} = \sum_{i,k} C_{ik}\delta_{\alpha_i}^{(k)}\,, \tag{88}$$

kde α_i jsou kořeny $Q(s)$. Ježto $P(s)$ je nesoudělný s $Q(s)$, existují podle lemmatu 2 čísla B_{ik} tak, že je

$$\sum_{i,k} C_{ik}\delta_{\alpha_i}^{(k)} = P(s)\sum_{i,k} B_{ik}\delta_{\alpha_i}^{(k)}\,.$$

Z (88) tedy plyne $x = P(s)(\tilde{y} + \sum_{i,k} B_{ik}\delta_{\alpha_i}^{(k)})$. Ježto však $\tilde{y} + \sum_{i,k} B_{ik}\delta_{\alpha_i}^{(k)}$ je řešením rovnice $Qy = \tilde{f}$, je věta dokázána.

Větu 22 doplníme ještě následujícím jednoduchým tvrzením:

Věta 22a. *Buď $\tilde{f} \in \boldsymbol{Z}'$; $M(s)$, $N(s)$, $R(s)$ mnohočleny, z nichž $M(s)$, $N(s)$ jsou nesoudělné. Pak platí:*

a) *Je-li x řešení rovnice*

$$N(s)\, R(s)\, x = \tilde{f}, \tag{89}$$

potom $y = M(s)\, R(s)\, x$ je řešením rovnice

$$N(s)\, y = M(s)\tilde{f}. \tag{90}$$

b) *Je-li y řešením* (90), *pak existuje řešení x rov.* (89) *tak, že je $y = M(s)\, R(s)\, x$.*

D ů k a z: a) je triviální, dokažme proto jen b). Nechť tedy y je řešením (90); ježto $M(s)$, $N(s)$ jsou nesoudělné, existuje podle tvrzení b) věty 22 řešení z rovnice $Nz = \tilde{f}$ tak, že je $y = Mz$. Sestrojme pro toto z některé řešení x rovnice $Rx = z$; potom je $NRx = Nz = \tilde{f}$, tj. x je řešením (89). Pro x však je $MRx = M(Rx) = Mz = y$, c. b. d.

Poznamenejme, jaký je význam vět 22, 22a. Jak uvidíme později, budeme pro řešení konkrétních úloh potřebovat sestrojit funkcionál $\tilde{y} = P(s)\,\tilde{x}$, kde $\tilde{x}$ je řešení rovnice $Q(s)\,\tilde{x} = \tilde{f}$. Je zřejmé, že pohodlnější je stanovit $\tilde{y}$ přímo podle věty 20, než konstruovat $\tilde{x}$ a pak je násobit $P(s)$. Právě k tomuto účelu byly věty 22, 22a dokázány.

Věty 17, 18, 20, 22a jsou prostředky, které nám umožňují řešit (prozatím) diferenciální rovnice. Uveďme si příklad na jejich užití! Buď tedy $f \in \boldsymbol{K}'$ a máme stanovit všechna $x \in \boldsymbol{K}'$, která splňují následující rovnici (takové rovnice se vyskytují v teorii automat. regulace)

$$x''' + 4x'' + 6x' + 4x = f^{(4)} + 5f''' + 14f'' + 20f' + 12f. \tag{91}$$

Označíme-li $\tilde{x} = F[x]$, $\tilde{f} = F[f]$, pak podle věty 9 je (91) ekvivalentní rovnici

$$((is)^3 + 4(is)^2 + 6is + 4)\,\tilde{x} = ((is)^4 + 5(is)^3 + 14(is)^2 + 20is + 12)\,\tilde{f}. \tag{92}$$

Abychom nalezli všechny $\tilde{x} \in \boldsymbol{Z}'$, splňující (92), užijeme věty 20. Rozkladem plyne

$$\begin{aligned}[(is)^4 + \ldots + 12]/[(is)^3 + \ldots + 4] = is + 1 + 2(is + 2)^{-1} +\\ + (is + 1 + i)^{-1} + (is + 1 - i)^{-1}.\end{aligned} \tag{93}$$

Ve smyslu rov. (71) věty 20 nutno nyní sestrojit řešení $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \tilde{g}_3$, rovnic $(s - 2i)\,\tilde{g}_1 = \tilde{f}$, $(s \mp 1 - i)\,\tilde{g}_{2,3} = \tilde{f}$; ježto samy funkcionály $\tilde{g}_i$ nás tolik nezajímají jako příslušné vzory g_i, použijeme ihned věty 17. Tak pro g_1 máme podle (67):

$$g_1 = ie^{-2t}(e^{2t}f)^{(-1)} + C_1 e^{-2t}.$$

Obdobné výrazy dostaneme pro $g_{2,3}$, takže hledané vzory x k $\tilde{x}$ podle (93) jsou

$$\begin{aligned}x = f' + f + 2e^{-2t}(e^{2t}f)^{(-1)} + C_1 e^{-2t} + e^{(-1-i)t}(e^{(1+i)t}f)^{(-1)} + C_2 e^{(-i-1)t} +\\ + e^{(-1+i)t}(e^{(1-i)t}f)^{(-1)} + C_3 e^{(-1+i)t}.\end{aligned}$$

Snadnou úpravou odtud konečně plyne

$$x = f' + f + 2e^{-2t}(e^{2t}f)^{(-1)} + A_1 e^{-2t} + e^{-t}\{\cos t \,.\, (e^t \cos t \,.\, f)^{(-1)} + \\ + \sin t \,.\, (e^t \sin t \,.\, f)^{(-1)} + A_2 \cos t + A_3 \sin t\} \,.$$

Přistupme nyní k použití dosažených výsledků v teorii lineárních soustav se soustředěnými prvky. Jak známo, dynamika každé takové soustavy (uvažujeme-li časový interval $(-\infty, \infty)$,) je popsána následujícím systémem rovnic

$$\text{(94)} \qquad \sum_{k=1}^{r} (\alpha_{ik} x_k + \beta_{ik} x'_k + \gamma_{ik} \textstyle\int_{-\infty}^{t} x_k \,\mathrm{d}\tau) = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, r \,.$$

kde α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik} jsou čísla, f_i představují vnější síly a x_i odezvy soustavy.

V klasickém případě, kdy f_i jsou funkce, definované na $(-\infty, \infty)$, rozumíme řešením (94) onu soustavu funkcí $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_r(t)$, z nichž každá má v $(-\infty, \infty)$ spojitou první derivaci, konvergují integrály $\int_{-\infty}^{t} x_k(\tau) \,\mathrm{d}t$ pro každé t a rovnice (94) jsou splněny v každém bodě t. Je zřejmé, že k existenci klasického řešení systému (94) musí funkce $f_i(t)$ splňovat dosti silné podmínky co do hladkosti i růstu pro $t \to -\infty$. Proto pojem řešení zobecníme.

Buďte $f_i \in \boldsymbol{K}'$, $i = 1, 2, \ldots, r$; řekneme, že soustava $x_i \in \boldsymbol{K}'$ tvoří (distributivní) řešení systému (94), existují-li $y_k \in \boldsymbol{K}'$, $k = 1, 2, \ldots, r$ tak, že je splněn systém

$$\text{(95)} \qquad \sum_{k=1}^{r} (\alpha_{ik} x_k + \gamma_{ik} y_k + \beta_{ik} x'_k) = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, r \,,$$
$$x_i - y'_i = 0 \,, \quad i = 1, 2,, \ldots, r \,.$$

Učiňme na tomto místě jednoduchou, ale prakticky důležitou poznámku. Předpokládejme, že v soustavě (94) je $\gamma_{ir} = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, r$ a sestrojme soustavu

$$\text{(96)} \qquad \sum_{k=1}^{r} (\alpha_{ik} x_k + \beta_{ik} x'_k) + \sum_{k=1}^{r-1} \gamma_{ik} y_k = f_i; \quad i = 1, 2, \ldots, r \,,$$
$$x_i - y'_i = 0 \,; \quad i = 1, 2, \ldots, r - 1 \,.$$

Snadno nahlédneme, že platí následující tvrzení: *splňuje-li soustava* $x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_r \in \boldsymbol{K}'$ *systém* (95), *potom soustava* $x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}$ *splňuje* (96); *jestliže naopak soustava* $x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_{r-1} \in \boldsymbol{K}'$ *splňuje* (96), *pak lze najít* $y_r \in \boldsymbol{K}'$ *tak, že soustava* $x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_r$ *splňuje* (95). Vskutku, první část tvrzení je zřejmá; vyhovuje-li naopak soustava $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_{r-1} \in \boldsymbol{K}'$ systému (96), potom stačí položit $y_r = x_r^{(-1)}$, a soustava $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r$ očividně vyhovuje (95), c. b. d.

Tento fakt značí, že když některé neznámé $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_m}$ se v (94) nevyskytují v integrálu, pak pro stanovení řešení stačí v (95) vypustit ony rovnice $x_i - y'_i = 0$, pro které $i = k_1, k_2, \ldots, k_m$. Systém (95) má pak jen $2r - m$ rovnic.

Je beze všeho zřejmé, že námi definované distributivní řešení (94) je zobecněním klasického. Má-li totiž (94) klasické řešení, pak toto je zároveň distributivním řešením.

Soustavu (95) (resp. zjednodušenou soustavu) můžeme zapsat ve vektorovém tvaru

$$(97) \qquad Mx + Nx' = f,$$

kde M, N jsou číselné matice, x, f vektory. Budeme proto nadále uvažovat jen soustavu (97).

Poznamenejme, že jednoduchý tvar soustavy (97) není na újmu obecnosti celé věci. Máme-li totiž obecněji vektorovou rovnici

$$(*) \qquad \sum_{i=0}^{p} M_i x^{(i)} = f,$$

definujeme její řešení x jako řešení x_0 soustavy vektorových rovnic

$$(\substack{*\\*}) \qquad M_p x'_{p-1} + \sum_{i=0}^{p-1} M_i x_i = f; \quad x_i = x'_{i-1}; \quad i = 1, 2, \ldots, p-1,$$

kterou dostaneme z (*) známou substitucí $x_i = x^{(i)}$, $i = 0, 1, \ldots, p-1$. Zřejmě však $(\substack{*\\*})$ lze psát ve tvaru (97).

Zaveďme ještě některá označení. Buď $\boldsymbol{K}'_n$ systém všech n-dimensionálních vektorů, které mají za prvky distribuce z $\boldsymbol{K}'$. Buď dále $U(s) = M + isN$, a buď $Y(s)$ matice adjungovaná k $U(s)$, (prvek y_{ik}, stojící v i-tém řádku a k-tém sloupci matice $Y(s)$ je roven $(-1)^{i+k}A_{ki}$, kde A_{ki} je subdeterminant matice $U(s)$, příslušný prvku u_{ki}), tj. platí $U(s)\,Y(s) = d(s)\,I$, kde I je jednotková matice a $d(s) = \det U(s)$.

K důkazu hlavní věty o řešení (97) budeme potřebovat následující dvě lemmata.

Lemma 3. *Buďte C_{ik} čísla, α_i navzájem různá čísla; je-li v $\boldsymbol{Z}'$ splněna rovnice*

$$(98) \qquad \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{n_i} C_{ik} \delta_{\alpha_i}^{(k)} = 0,$$

pak $C_{ik} = 0$ pro všechna i, k.

Důkaz: Zvolme index j, $1 \leqq j \leqq m$ a sestrojme mnohočlen

$$(99) \qquad P_j^{(1)}(s) = (s - \alpha_j)^{n_j} \prod_{\substack{i=1\\i \neq j}}^{m} (s - \alpha_i)^{n_i+1}.$$

Zřejmě potom platí $P_j^{(1)} \delta_{\alpha_i}^{(k)} = 0$ pro $i \neq j$, $k \leqq n_i$, neboť všechny derivace $P_j^{(1)}$ až do řádu n_i včetně zmizí v bodě $s = \alpha_i$. Podobně je $P_j^{(1)} \delta_{\alpha_j}^{(k)} = 0$ pro $k < n_j$, a $P_j^{(1)} \delta_{\alpha_j}^{(n_j)} = A_j^{(1)} \delta_{\alpha_j}$, kde $A_j^{(1)} = (-1)^{n_j} n_j! \prod_{\substack{i=1\\i \neq j}}^{m} (\alpha_j - \alpha_i)^{n_i+1} \neq 0$. Násobíme-li tedy rov. (98) $P_j^{(1)}$, dostaneme ihned $C_{jn_j} = 0$. Jestliže dále sestrojíme mnohočlen $P_j^{(2)}(s) = (s - \alpha_j)^{n_j-1} \prod_{\substack{i=1\\i \neq j}}^{m} (s - \alpha_i)^{n_i+1}$, a opakujeme celý proces, dostaneme $C_{j,n_j-1} = 0$ atd., čímž je lemma dokázáno.

Lemma 4. *Buď $U(s)$ čtverečná matice n-tého řádu, jejíž prvky jsou celistvé analytické funkce, a buď $d(s) = \det U(s)$; je-li α právě k-násobným kořenem $d(s)$, $0 \leqq k \leqq n$, pak hodnost matice $U(\alpha)$ není menší než $n - k$.*

Důkaz: Přímo z definice determinantu vyplývá, že platí

$$d'(s) = \sum_{i,k} (-1)^{i+k} u'_{ik}(s)\, A_{ik}(s)\,, \tag{100}$$

kde jsme označili $U(s) = [u_{ik}(s)]$ a $A_{ik}(s)$ subdeterminant matice $U(s)$, příslušný prvku $u_{ik}(s)$. Buď r přirozené číslo, $1 \leqq r < n$, a označme $(i)_r$ r-tici, sestavenou z čísel $1, 2, \ldots, n$; symbolem $A_{(i)_r(k)_r}$ označme determinant, vzniklý z $U(s)$ vynecháním řádků o indexech $(i)_r$ a sloupců o indexech $(k)_r$. (Je tedy $A_{(i)_r(k)_r}$ řádu $n - r$.)

Derivací rov. (100) plyne

$$d''(s) = \sum_{i,k} (-1)^{i+k} u''_{ik}(s)\, A_{(i)_1(k)_1} + \sum_{i,k} (-1)^{i+k} u'_{ik}(s)\, A'_{(i)_1(k)_1}\,. \tag{101}$$

Vyjádříme-li nyní derivaci $A'_{(i)_1(k)_1}$ znovu pomocí (100), vidíme, že $d''(s)$ je lineární kombinací subdeterminantů $A_{(i)_1(k)_1}$ a $A_{(i)_2(k)_2}$. Odtud vyplývá, že obecně platí pro $1 \leqq r \leqq n$:

$$d^{(r)}(s) = \sum_{(1)} S_{(i)_1(k)_1} A_{(i)_1(k)_1} + \sum_{(2)} S_{(i)_2(k)_2} A_{(i)_2(k)_2} + \ldots + \sum_{(r)} S_{(i)_r(k)_r} A_{(i)_r(k)_r}\,, \tag{102}$$

kde $S_{(i)_m(k)_m}$ značí součet součinů derivací těch prvků $u_{ik}(s)$, které se nevyskytují v $A_{(i)_m(k)_m}$, a kde v každé sumě $\sum\limits_{(m)}$ se sčítá přes všechny subdeterminanty $A_{(i)_m(k)_m}$.

Buď nyní α právě r-násobným kořenem $d(s)$, takže $d^{(r)}(\alpha) \neq 0$, a předpokládejme, že $U(\alpha)$ má hodnost menší než $n - r$. To značí, že všechny subdeterminanty $A_{(i)_m(k)_m}$ pro $m = 1, 2, \ldots, r$ jsou rovny nule, takže podle (102) je $d^{(r)}(\alpha) = 0$, což je spor.

Nyní můžeme již vyslovit větu:

Věta 23. *Buď $f \in \mathbf{K}'_r$ a nechť matice M, N rovnice (97) splňují podmínku $d(s) \neq 0$; označme $\tilde{f} = F[f]$ a buď $\tilde{g}$ vektor, splňující rovnici $d(s)\, \tilde{g} = \tilde{f}$. Potom platí:*

a) *Každý vektor $\tilde{x}$, definovaný rovnicí*

$$\tilde{x} = Y(s)\, \tilde{g} \tag{103}$$

je obrazem řešení x rov. (97).

b) *Má-li $d(s)$ vesměs jednoduché kořeny, pak obraz $\tilde{x}$ každého řešení x rov. (97) má tvar (103).*

Důkaz: Ježto Fourierova transformace zprostředkuje prosté zobrazení systému $\mathbf{K}'$ na $\mathbf{Z}'$, je rov. (97) ekvivalentní následující rovnici

$$U(s)\, \tilde{x} = \tilde{f}\,. \tag{104}$$

Ukažme nejdříve, že vektor $\tilde{x}$ podle (103) splňuje (104). K tomu cíli si všimněme, že prvky $U(s)$ i $Y(s)$ jsou mnohočleny a tedy multiplikátory, takže pro ně platí komutativní a distributivní zákon. Máme

$$U(s)\, \tilde{x} = U(s)\, (Y(s)\, \tilde{g}) = (U(s)\, Y(s))\, \tilde{g} = I\, d(s)\, \tilde{g} = I\tilde{f} = \tilde{f}$$

a tedy $x = F^{-1}[\tilde{x}]$ je řešením (97).

Dokažme nyní b)! Nechť tedy $\tilde{x}$ je řešením (97) a sestrojme některé řešení $\tilde{x}_0 = Y(s)\,\tilde{g}$. Potom je

$$U(s)\,(\tilde{x} - \tilde{x}_0) = 0\,. \tag{105}$$

Z této rovnice plyne násobením zleva maticí $Y(s)$:

$$Y(s)\,U(s)\,(\tilde{x} - \tilde{x}_0) = d(s)\,I(\tilde{x} - \tilde{x}_0) = d(s)\,(\tilde{x} - \tilde{x}_0) = 0\,.$$

Podle věty 20 a předpokladu pak platí

$$\tilde{x} - \tilde{x}_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i \delta_{\alpha_i}\,, \tag{106}$$

kde c_i jsou číselné vektory. Přitom podle (105) zároveň platí $U(s) \sum_{i=1}^{m} c_i \delta_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{m} U(\alpha_i)\,.\,c_i \delta_{\alpha_i} = 0$, takže podle lemmatu 3 je $U(\alpha_i)\,c_i = 0$; $i = 1, 2, \ldots, m$.

Zvolme nyní některý index i, $1 \leqq i \leqq m$ a ukažme, že potom existuje vektor h_i splňující rovnici

$$Y(\alpha_i)\,h_i = c_i\,. \tag{107}$$

Vskutku, ježto matice $U(\alpha_i)$ je singulární a α_i je jednoduchým kořenem $d(s)$, vyplývá z lemmatu 4, že hodnost $U(\alpha_i)$ je $n - 1$. Odtud vyplývá (srv. [3], str. 108), že hodnost $Y(\alpha_i)$ je rovna jedné. Má tedy $Y(\alpha_i)$ aspoň jeden prvek $y_{jk} \neq 0$. Označme y_k k-tý sloupec $Y(\alpha_i)$. (Je tedy y_k nenulový vektor.) Ježto $U(\alpha_i)$ má hodnost $n - 1$, je dimense systému všech řešení q rovnice $U(\alpha_i)\,q = 0$ rovna jedné, tj. všechna řešení jsou násobkem nějakého vektoru q_0. Ježto je $U(\alpha_i)\,Y(\alpha_i) = 0$, můžeme položit $q_0 = y_k$, a tedy platí $c_i = \beta y_k$, kde β je číslo.

Poněvadž dále $Y(\alpha_i)$ má hodnost 1, jsou všechny její sloupce násobky vektoru y_k, takže $Y(\alpha_i) = y_k b'$, kde b je číselný vektor, jehož k-tý prvek je 1, takže $b \neq 0$. (Čárka značí transponování.) Zřejmě lze nyní zvolit vektor h_i tak, že číslo $b' h_i = \beta$. Potom ale je $Y(\alpha_i)\,h_i = y_k b' h_i = \beta y_k = c_i$, a naše tvrzení je dokázáno.

Sestrojíme-li takto pro každý index i vektor h_i a položíme-li $g^* = \sum_{i=1}^{m} h_i \delta_{\alpha_i}$, potom zřejmě g^* splňuje rovnici $d(s)\,g^* = 0$ a dále je $Y(s)\,g^* = \sum_{i=1}^{m} Y(\alpha_i)\,h_i \delta_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{m} c_i \delta_{\alpha_i} = \tilde{x} - \tilde{x}_0$ podle (106). Máme tedy konečně $\tilde{x} = \tilde{x}_0 + Y(s)\,g^* = Y(s)\,(\tilde{g} + g^*)$, a ježto $\tilde{g} + g^*$ splňuje rovnici $d(s)\,(\tilde{g} + g^*) = 0$, je tvrzení b) věty dokázáno.

Z věty 23, 21 a 13 plyne okamžitě platnost následující věty:

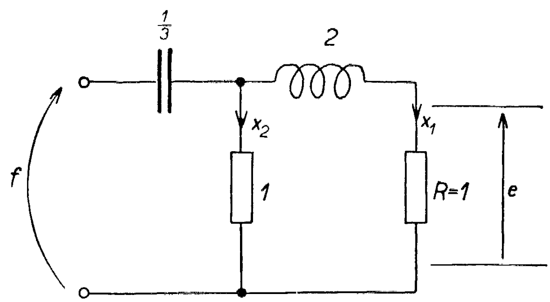
Věta 24. *Buďte M, N číselné matice, pro které $d(s) \not\equiv 0$ a buďte $f_i \in \mathbf{K}'_n$, $i = 0, 1, 2, \ldots$; je-li $f_i \to f_0$, potom pro každé i lze vybrat takové řešení x_i rovnice $M x_i + N x'_i = f_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, že platí $x_i \to x_0$.*

Tato věta ukazuje, že řešení (97) závisí spojitě na pravé straně, a tedy zejména to, že každé (distributivní) řešení (97) je limitou klasických řešení téže rovnice.

Z toho, co jsme až dosud uvedli o systémech rovnic, popisujících dynamiku fysikálních soustav, vyplývají následující závěry. Jak známo, prvky matice $d^{-1}(s)\,Y(s)$

nazývají se „přenosovými funkcemi" dané soustavy; jsou známy metody jejich stanovení přímo ze struktury a hodnot prvků soustavy, aniž by bylo nutno sestavovat systém rovnic (94). Z konstrukce řešení podle rov. (103) věty 23 vyplývá, že pro odezvu soustavy platí následující tvrzení: *Je-li $P(\omega)/Q(\omega)$, kde $P(\omega)$, $Q(\omega)$ jsou polynomy, přenosová funkce soustavy, potom pro obraz $\tilde{x}$ odezvy x platí $\tilde{x} = P(s)\,\tilde{g}$, kde $\tilde{g}$ je řešením rovnice $Q(s)\,\tilde{g} = \tilde{f}$, přičemž $\tilde{f}$ je obrazem popudu f.*

Poněvadž pro obraz $\tilde{x}$ odezvy platí $\tilde{x} = P(s)\,\tilde{g}$, vyplývá z vět 22, 22a, že $\tilde{x}$ můžeme jednodušeji stanovit z rovnice $\tilde{Q}(s)\,\tilde{x} = \tilde{P}(s)\tilde{f}$, kde je $P(s) = \tilde{P}(s)\,R(s)$, $Q(s) = \tilde{Q}(s)\,R(s)$, (tj. $\tilde{P}(s)$, $\tilde{Q}(s)$ jsou čitatelem resp. jmenovatelem „vykrácené" přenosové funkce.)



Obr. 1.

Všimněme si ještě těchto věcí. Právě vysloveným tvrzením rozšířili jsme podstatně platnost známého pravidla, o kterém jsme hovořili už v úvodu článku, a není tedy již nutné omezovat se pouze na popudy, které rychle ubývají pro $|t| \to \infty$. Mimo to dostaneme tímto způsobem též vlastní kmity soustavy, tj. všechny odezvy, které mohou na daném výstupu soustavy při daném popudu existovat. Fysikální význam těchto skutečností spočívá v tom, že je-li dán pouze popud, není tím ještě děj v soustavě určen jednoznačně. Teprve předepsáním stavu soustavy pro $t \to -\infty$ nebo nějakým dalším údajem je odezva určena jednoznačně. Nejobvyklejší případ, kdy se uvažuje pouze časová poloosa $\langle 0, \infty)$ a kdy se předpokládá, že fysikální soustava byla v klidu pro $t < 0$, (srv. [1]), dostaneme specialisací zde uvažovaného obecného případu. Zde popud f je distribuce, rovná nule na $(-\infty, 0)$; definujeme-li odezvu jako vzor x toho řešení $\tilde{x}$ rovnice $\tilde{Q}(s)\tilde{x} = \tilde{P}(s)\tilde{f}$, který je roven nule na $(-\infty, 0)$, pak snadno zjistíme, že x je určeno jednoznačně. Vskutku, z definice primitivní distribuce vyplývá, že existuje právě jedna primitivní distribuce $(\exp(-i\alpha t)\,.\,f)^{(-r)}$, která je rovna nule na $(-\infty, 0)$. Z věty 17 a 20 pak plyne už okamžitě naše tvrzení.

Uveďme nakonec dva jednoduché příklady na užití vyložených výsledků!

P ř í k l a d 1. Naším úkolem je stanovit napětí e na odporu R čtyřpólu z obr. 1, působí-li na jeho vstupu napětí $f \in \boldsymbol{K}'$.

Označíme-li x_1, x_2 proudy podle obrázku, bude hledané napětí $e = 1 \, . \, x_1$; z Kirchhoffových zákonů plynou rovnice

$$(108) \qquad \begin{aligned} x_2 + 3\textstyle\int_{-\infty}^{t} (x_1 + x_2)\, d\tau &= f\,, \\ x_1 + 2x_1' - x_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Podle definice distributivního řešení (108) budeme hledat řešení soustavy

$$(109) \qquad \begin{aligned} x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= f\,, \\ x_1 + 2x_1' - x_2 &= 0\,, \\ x_1 - x_3' &= 0 \\ x_2 - x_4' &= 0\,. \end{aligned}$$

Zde je

$$(110) \qquad U(s) = \begin{bmatrix} 0\,, & 1, & 3, & 3 \\ 1+2is, & -1, & 0, & 0 \\ 1\,, & 0, & -is, & 0 \\ 0\,, & 1, & 0, & -is \end{bmatrix}.$$

Snadným výpočtem nalezneme $d(s) = -\, is(2(is)^2 + 7is + 6)$; ježto hledáme pouze x_1, nemusíme vypočítávat celou matici $Y(s)$, ale jen její první řádek. Označíme-li $y_{1,i}$, $i = 1, \ldots, 4$ jeho prvky, obdržíme z rov. (110):

$$y_{11} = -\,(is)^2;\; y_{12} = -\,(is)^2 - 3is\,;\;\; y_{13} = y_{14} = -\,3is\,.$$

Pro hledané $\tilde{x}_1$ bude pak podle věty 23 (rov. (103)) platit

$$(111) \qquad \tilde{x}_1 = y_{11}g_1 + y_{12}g_2 + y_{13}g_3 + y_{14}g_4\,,$$

kde g_1 je řešením rovnice $d(s)\, g_1 = \tilde{f}$, g_2, g_3, g_4 řešeními rovnice $d(s)\, g = 0$. Ježto všechna $y_{1,i}$ jsou soudělná s $d(s)$, použijeme s výhodou věty 22a. Společný činitel je všude $-\, is$, takže místo abychom postupně počítali $y_{1,i}g_i$, nalezneme je jako řešení rovnice

$$\begin{aligned} (2(is)^2 + 7is + 6)(y_{1,i}g_i) &= isf \quad \text{pro} \quad i = 1 \\ &= 0 \quad\;\; \text{pro} \quad i = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Dále postupujeme podle věty 20. Platí

$$is/(2(is)^2 + 7is + 6) = -\, 3/2(is + \tfrac{3}{2}) + 2/(is + 2)\,,$$

takže podle věty 17 je

$$F^{-1}[y_{11}g_1] = C_1 e^{-3/2t} + C_2 e^{-2t} - \tfrac{3}{2} e^{-3/2t}(e^{3/2t}f)^{(-1)} + 2e^{-2t}(e^{2t}f)^{(-1)}\,.$$

Ježto dále řešení rovnice $(2(is)^2 + 7is + 6)\, h = 0$ jsou (věta 20, 18) $h = C_3\delta_{3/2i} + C_4\delta_{2i}$, jsou vzory k $y_{1,i}g_i$, $i = 2, 3, 4$ tvaru $F^{-1}[y_{1i}g_i] = C_3 \exp(-\,\tfrac{3}{2}t) + C_4 \exp(-\, 2t)$. Dosazením do (111) máme konečně

$$x_1 = A_1 e^{-3/2t} + A_2 e^{-2t} - \tfrac{3}{2} e^{-3/2t}(e^{3/2t}f)^{(-1)} + 2e^{-2t}(e^{2t}f)^{(-1)}\,.$$

Příklad 2. Přenosová funkce $A(\omega)$ nějaké soustavy je

$$(112) \quad A(\omega) = (2(i\omega)^3 + 7(i\omega)^2 + 8i\omega + 7)(i\omega + 1)^{-2}((i\omega)^2 + 2i\omega + 5)^{-1}\,,$$

a soustava je buzena popudem $f = t^2 + 1$; máme stanovit příslušnou odezvu. Ježto čitatel a jmenovatel $A(\omega)$ jsou nesoudělné, bude obraz $\tilde{x}$ odezvy x řešením rovnice

$$(113) \qquad (is + 1)^2(-s^2 + 2is + 5)\,\tilde{x} = (-2is^3 - 7s^2 + 8is + 7)\,\tilde{f}\,.$$

Řešení $\tilde{x}$ stanovíme podle věty 20. Rozkladem plyne

$$A(s) = (is + 1)^{-2} + (is + 1 + 2i)^{-1} + (is + 1 - 2i)^{-1}\,.$$

Odtud máme ihned použitím věty 17:

$$(114) \qquad x = e^{-t}(C_1 + C_2 t) + C_3 e^{\lambda_1 t} + C_4 e^{\lambda_2 t} + e^{-t}(e^t f)^{(-2)} + \\ + e^{\lambda_1 t}(e^{-\lambda_1 t} f)^{(-1)} + e^{\lambda_2 t}(e^{-\lambda_2 t} f)^{(-1)}\,,$$

kde jsme položili $\lambda_{1,2} = -1 \mp 2i$. Ježto f je regulární distribuce, stanovíme primitivní distribuce $(e^t f)^{(-2)}$, atd. integrací. Snadným výpočtem obdržíme

$$(e^{-\lambda t} f)^{(-1)} = -e^{-\lambda t}\{(1 + t^2)/\lambda + 2t/\lambda^2 + 2/\lambda^3\}\,,$$
$$(e^t f)^{(-2)} = e^t(t^2 - 4t + 7)\,;$$

dosadíme-li tyto výrazy a za λ_1, λ_2 do (114), dostaneme snadnou úpravou konečně $x = e^{-t}(A_1 + A_2 t) + e^{-t}(A_3 \cos 2t + A_4 \sin 2t) + \frac{1}{125}(175t^2 - 440t + 881)\,.$

Literatura

[1] *Doležal V.:* O použití distribucí v teorii lineárních dynamických soustav, Aplikace matematiky, 1959, č. 6.

[2] *Гельфанд И. М.-Шилов Г. Е.:* Обобщенные функции и действия над ними, Гос. Изд. Физ.-Мат. лит., Москва 1958.

[3] *Bydžovský B.:* Základy teorie determinantů, NJČMF, Praha 1930.

Резюме

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУРЬЕ В ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

ВАЦЛАВ ДОЛЕЖАЛ (Václav Doležal)

Статья посвящена приложениям преобразования Фурье обобщенных функций к решению задач из динамики линейных физических систем. После вспомогательных рассуждений в введении (где строится система Z', изоморфная системе обобщеных функций K') определено преобразование Фурье; затем выводятся его основные свойства, как теоремы о производной, о сдвижении оригинала, которые с формальной стороны совпадают с теоремами о классическом преобразовании Фурье. Одновременно показано, что введенное преобразование Фурье является обобщением классического. Далее решается за-

дача деления образа на многочлен. Полученные результаты применяются при решении систем интегро-дифференциальных уравнений (которые в общем случае нельзя свести к каноническому виду), правые части которых представляют собой обобщенные функции. Дается характеристика системы решений такой системы уравнений и доказывается теорема о непрерывной зависимости решения от правых частей. На основании этого далее показано, каким образом можно установить отклики линейной физической системы в случае, когда возбуждения действуют вдоль всей оси времени $(-\infty, \infty)$; решается также задача определения отклика при помощи передаточной функции.

В заключение иллюстрируется применение изложенной теории на нескольких конкретных примерах.

Zusammenfassung

ÜBER DIE FOURIERSCHE TRANSFORMATION IN DER THEORIE LINEARER SYSTEME

Václav Doležal

Der vorliegende Artikel ist der Anwendung der Fourierschen Transformation von Distributionen zur Lösung von Fragen der Dynamik linearer physikalischer Systeme gewidmet. Nach den einführenden Gedankengängen (es wird das System Z' gebildet, welches mit dem System von Distributionen K' isomorph ist) wird die Fouriersche Transformation definiert; es werden ihre grundlegenden Eigenschaften abgeleitet, wie z. Bspl. die Sätze über die Ableitung des Originals und über die Originalverschiebung, wobei diese Sätze, formal angesehen, den Sätzen der klassischen Fourierschen Transformation äquivalent sind. Es wird gleichzeitig gezeigt, dass die eingeführte Fouriersche Transformation eine Verallgemeinerung der klassischen Fourier-Transformation darstellt. Danach wird das Problem der Teilung (Division) einer Transformierten durch ein Polynom gelöst.

Die in dieser Arbeit erreichten Ergebnisse werden dann zur Lösung von Integro-Differentialgleichungssystemen angewendet (welche sich allgemein nicht auf kanonische Form bringen lassen), wobei auf der rechten Seite der Gleichungen Distributionen stehen. Es wird das Lösungssystem eines solchen Gleichungssystems charakterisiert und der Satz über die stetige Abhängigkeit der Lösungen von den rechten Seiten der Gleichungen bewiesen. Auf Grund dessen wird gezeigt, wie man Reaktionen eines linearen physikalischen Systems im Falle, dass die Störungen auf der ganzen Zeit-Achse $(-\infty; \infty)$ wirken, ermitteln kann; gleichzeitig wird die Bestimmung der Reaktion mittels der Übertragungsfunktion gelöst.

Zum Schluss dieses Artikels wird die angeführte Theorie durch die Lösung einiger konkreter Beispiele erläutert.