

Aplikace matematiky

Blahoslav Košťák

Kruhová deska, zatížená ve dvou protilehlých bodech obvodu dvěma protisměrnými stejně velikými ohybovými momenty

Aplikace matematiky, Vol. 6 (1961), No. 2, 103–123

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102745>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1961

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

KRUHOVÁ DESKA, ZATÍŽENÁ VE DVOU PROTILEHLÝCH BODECH OBVODU DVĚMA PROTISMĚRNÝMI STEJNĚ VELIKÝMI OHYBOVÝMI MOMENTY

BLAHOŠLAV KOŠŤÁK

(Došlo dne 18. prosince 1959.)

V článku je odvozeno statické řešení dané kruhové desky v uzavřeném tvaru. Na výsledcích, které byly srovnány s experimentem, se ukazují důsledky Kirchhoffova zjednodušení okrajových podmínek.

1. ÚVOD

Při experimentálním vyšetřování ohybu desek na základě fotoelasticimetrie jsme si znovu uvědomili některé výhrady k běžně užívané teorii. Předpoklady zjednodušují skutečnou napjatost na okraji desky aniž by vcelku ovlivnily řešení. Toto zjednodušení je třeba mít na zřeteli při experimentech, abychom se vyvarovali nepřipustných chyb.

Na zvolené kruhové desce se zmíněné skutečnosti dobře projevují. Zvolený případ je též zvláště vhodný pro nutné srovnání experimentu s teorií. Mimo to jde o jistou analogii Hertzova problému, která dává možnost dalších srovnání.

Důvodem pro předložené teoretické řešení byla tedy především experimentální praxe, protože v konstrukcích se takto zatížená kruhová deska vyskytne jen zřídka.

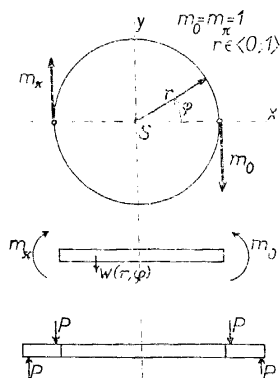
Řešení kruhových desek je do značné míry rozpracováno. Například KIROVĚR [1] uvádí obecné výsledky, které zjednodušeně v sobě zahrnují také řešení hledané. Zde podáváme řešení samostatné a přímé s výsledky v uzavřeném tvaru. Přitom upozorňujeme na zjednodušení okrajových podmínek a jeho důsledky.

2. ŘEŠENÍ

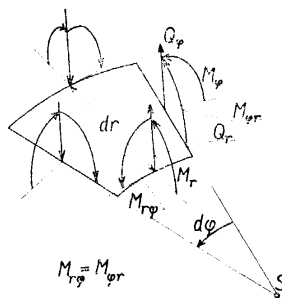
Zjišťujeme napjatost desky, jejíž znázornění je na obr. 1, s označením statických veličin podle obr. 2. Je to kruhová deska zatížená ve dvou protilehlých bodech obvodu dvěma protisměrnými stejně velkými ohybovými momenty. Pro zjednodušení předpokládáme nadále, že zatěžovací momenty jsou jednotkové, a že rovněž deska má jednotkové rozměry, obvodem je kružnice $r = 1$.

Vycházíme z platnosti běžné teorie, která vede na základní rovnici funkce průhybů $w(r, \varphi)$ střednicové plochy desky

$$(2.1) \quad \Delta^2 w = \frac{p}{D}.$$



Obr. 1. Výpočtové schéma tvaru a zatížení kruhové desky.



Obr. 2. Deskový element s kladně působícími veličinami.

Uvedme označení:

$w(r, \varphi)$ pořadnice průhybové plochy,

$p(r, \varphi)$ funkce zatížení,

$D = \frac{Eh^3}{12\lambda_1\lambda_2}$ tuhost desky,

E Youngův modul pružnosti,

μ Poissonovo číslo,

$\lambda_1 = 1 - \mu, \lambda_2 = 1 + \mu, \lambda_3 = 3 + \mu$.

Zatížení působí v obvodových bodech $(1, n\pi)$, $n = 0, 1$, proto v celé oblasti desky platí

$$(2.2) \quad \Delta^2 w = 0.$$

Najdeme-li funkci průhybů w splňující rovnici (2.2) v oblasti desky a vyhovující současně okrajovým podmínkám, vypočteme statické hodnoty z následujících vztahů (2.3) [1]. Tím bude úloha vyřešena.

$$(2.3) \quad M_r = -D \left(\lambda_1 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \Delta w \right),$$

$$M_\varphi = -D \left(\Delta w - \lambda_1 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right),$$

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} \Delta w,$$

$$Q_\varphi = -\frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Delta w,$$

$$M_{r\varphi} = -D\lambda_1 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right),$$

kde značí

$$\Delta w = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) w.$$

Momenty M a síly Q v rovnicích (2.3) jsou poměrné veličiny, tj. na jednotku délky, s významem podle obr. 2.

Hledáme řešení ve tvaru Fourierovy řady. O řešení předem víme, že vzhledem k zatížení bude souměrné podle osy $\varphi = 0$, bude tedy $w(\varphi) = w(-\varphi)$. Proto bude hledaná funkce w sudá a bude také obsahovat pouze kosinové členy. Mimo to předem víme, že bude periodická s periodou π , následkem čehož budou koeficienty lichých indexů nulové.

Tedy

$$(2.4) \quad w = \sum_{n=0,2,4,\dots}^{\infty} (a_n + b_n r^2) r^n \cos n\varphi.$$

Řešení ve tvaru (2.4) skutečně vyhovuje rovnici (2.2). Neznámé koeficienty a_n a b_n určíme z okrajových podmínek.

3. OKRAJOVÉ PODMÍNKY

Deska je po celém obvodu volná, pouze ve dvou protilehlých bodech obvodu na ni působí dva osamělé protisměrné jednotkové ohybové momenty. Vnější zatížení je tedy samo o sobě v rovnováze. Deska svou pevností tuto rovnováhu zprostředkuje.

Pro určení obecně čtyř, v našem případě dvou neznámých součinitelů řešení (2.4) potřebujeme dvě podmínky. Protože jde o volnou desku, musí být obvodové momenty $M_r = 0$ s výjimkou bodu $\varphi = 0$ resp. $\varphi = \pi$, kde $M_r = \delta_0$ resp. δ_π , přičemž δ_0 resp. δ_π jsou Diracovy distribuce působící v bodech 0 resp. π . Tak získáváme prvou podmínku.

Představme si nyní obvodové smykové momenty $M_{r\varphi}$ jako elementární silové dvojice působící podél obvodu. Na elementární plošku obvodu působí ještě elementární smyková síla Q_r . Podle Kirchhoffa můžeme oba účinky složit. Dostaneme výslednici, sílu V_r . Protože jde o volnou desku je $V_r = 0$, což je druhá podmínka.

Tedy dvě podmínky volného okraje jsou:

$$(3.1) \quad \begin{array}{l} 1) (M_r)_{r=1} = 0, \\ \quad \quad \quad \varphi \neq n\pi, n=0,1 \end{array} \quad \begin{array}{l} M_r = \delta_0 \quad \text{pro} \quad \varphi = 0, \\ M_r = \delta_\pi \quad \text{pro} \quad \varphi = \pi; \end{array}$$

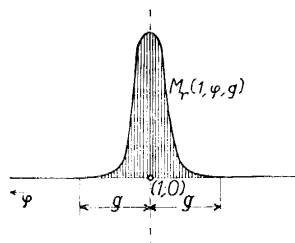
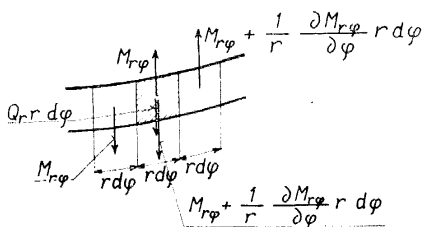
$$2) (V_r)_{r=1} = 0,$$

kde δ je Diracova funkce.

Spočítejme nyní výslednici V_r . Jednotlivé síly elementárních dvojic nahrazujících momenty $M_{r\varphi}$ jsou přímo rovny těmto poměrným momentům.

Obr. 3 znázorňuje poměry na volném okraji desky. Na každé okrajové elementární plošce šířky $r \cdot d\varphi$ nahradíme účinek smykového momentu $M_{r\varphi} \cdot r \cdot d\varphi$ účinkem reakce $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial \varphi} \cdot r \cdot d\varphi$. Tato reakce se zde sčítá s příčnou smykovou silou $Q_r \cdot r \cdot d\varphi$, takže velikost poměrné výslednice V_r bude

$$(3.2) \quad V_r = Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial \varphi}.$$



Obr. 3. Nahrazení $M_{r\varphi}$ elementárními dvojicemi Obr. 4. Definice okrajové podmínky $M_r(1, \varphi, g)$ na okraji desky.

Abychom vyjádřili V_r ve tvaru odpovídajícím (2.3), dosadíme z (2.3) do (3.2). Dostaneme

$$(3.3) \quad V_r = -D \left[\frac{\partial}{\partial r} \Delta w + \frac{\lambda_1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right].$$

Vztah (3.3) doplňuje formule (2.3).

Místo podmínky 1) z (3.1) definujeme poměrný ohybový moment M_r na obvodě pomocí hladké funkce, jejíž limitou je podmínka 1) z (3.1), zahrnující v sobě také zatížení.

$$(3.4) \quad \begin{aligned} M_r(1, \varphi, g) &= \frac{1}{\kappa g} e^{\varphi^2/(\varphi^2 - g^2)} & \text{pro } |\varphi| < g \\ M_r(1, \varphi, g) &= 0 & \text{pro } |\varphi| \geq g \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} M_r(1, \varphi, g) &= \frac{1}{\kappa g} e^{\varphi^2/(\varphi^2 - g^2)} \\ M_r(1, \varphi, g) &= 0 \end{aligned}} \right\} \varphi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right\rangle,$$

$$\begin{aligned} M_r(1, \varphi, g) &= \frac{1}{\kappa g} e^{(\varphi - \pi)^2/[(\varphi - \pi)^2 - g^2]} & \text{pro } |\varphi - \pi| < g \\ M_r(1, \varphi, g) &= 0 & \text{pro } |\varphi - \pi| \geq g \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} M_r(1, \varphi, g) &= \frac{1}{\kappa g} e^{(\varphi - \pi)^2/[(\varphi - \pi)^2 - g^2]} \\ M_r(1, \varphi, g) &= 0 \end{aligned}} \right\} \varphi \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle.$$

Funkce (3.4) definuje M_r ve shodě s obr. 4. Konstanta κ je určena tak, aby funkce (3.4) vyjadřovala jednotkový moment. Je tedy

$$(3.5) \quad \kappa = \int_{-1}^{+1} e^{\omega^2/(\omega^2 - 1)} d\omega, \quad \text{kde } \omega = \frac{\varphi}{g}.$$

Máme tak

$$(3.6) \quad \int_{(n\pi-g)}^{(n\pi+g)} M_r(1, \varphi, g) \cdot d\varphi = 1, \quad n = 0, 1.$$

Funkci $M_r(1, \varphi, g)$ rozvineme ve Fourierovu řadu s periodou π , jak to odpovídá skutečné okrajové podmínce. Připomeňme, že jde opět o funkci sudou, proto se neuplatní siny.

$$(3.7) \quad M_r(1, \varphi, g) = \frac{A_0(g)}{2} + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} A_n(g) \cos n\varphi,$$

kde

$$A_n(g) = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} M_r(1, \varphi, g) \cos n\varphi \, d\varphi.$$

Jak plyne z integrace po částech, konstanty $A_n(g)$ Fourierovy řady konvergují k nule s rostoucím n rychleji, než $\frac{1}{n^k}$, kde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Protože $V_r(1, \varphi) = 0$, jsou Fourierovy koeficienty této funkce rovny nule. Tedy

$$(3.8) \quad \begin{aligned} V_r(1, \varphi) &= 0, \\ B_n &= 0. \end{aligned}$$

Tak dostáváme dvě okrajové podmínky (3.7), (3.8) ve tvaru Fourierových řad.

4. VÝPOČET KOEFICIENTŮ $a_n(g), b_n(g)$ ŘEŠENÍ (2.4)

Levé strany rovnic (3.7), (3.8) vyjádříme pomocí funkce průhybů w v předpokládaném tvaru (2.4). K tomu použijeme pro moment M_r první rovnice ze soustavy (2.3) a pro sílu V_r vyjádření (3.3).

Rovnice (3.7), (3.8) můžeme přepsat

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \left[-D \left(\lambda_1 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \Delta w \right) \right]_{r=1} &= \frac{A_0(g)}{2} + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} A_n(g) \cos n\varphi, \\ \left[-D \left[\frac{\partial}{\partial r} \Delta w + \frac{\lambda_1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right] \right]_{r=1} &= 0. \end{aligned}$$

Postupným derivováním rovnice (2.4) a lineárními kombinacemi výsledků obdržíme výrazy vyskytující se na levé straně rovnic (4.1), jakož i ostatní výrazy z rovnic (2.3).

(4.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \varphi} &= - \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} [a_n(g) \cdot r^n + b_n(g) \cdot r^{n+2}] n \sin n\varphi, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} &= - \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} [a_n(g) \cdot r^n + b_n(g) \cdot r^{n+2}] n^2 \cos n\varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^2 \partial r} &= - \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \{n a_n(g) r^{n-1} + [n+2] b_n(g) r^{n+1}\} n^2 \cos n\varphi, \\ \frac{\partial w}{\partial r} &= 2b_0(g) r + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \{n a_n(g) r^{n-1} + [n+2] b_n(g) r^{n+1}\} \cos n\varphi, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} &= 2b_0(g) + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \{n[n-1] a_n(g) r^{n-2} + [n+1][n+2] b_n(g) r^n\} \cos n\varphi, \\ \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} &= \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \{n[n-1][n-2] a_n(g) r^{n-3} + n[n+1][n+2] b_n(g) r^{n-1}\} \cos n\varphi; \\ \Delta w &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) w;\end{aligned}$$

$$(4.3) \quad \Delta w = 4b_0(g) + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \{4[n+1] b_n(g) r^n\} \cos n\varphi;$$

$$(4.4) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) = - \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \{n[n-1] a_n(g) r^{n-2} + n[n+1] b_n(g) r^n\} \sin n\varphi.$$

Některé výrazy budeme potřebovat pouze pro rovnice (4.1), tedy pro $r = 1$. Dosazením z rovnic (4.2) obdržíme

$$(4.5) \quad \left. \frac{\partial}{\partial r} \Delta w = \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \{4n[n+1] b_n(g)\} \cos n\varphi, \right|_{r=1}$$

$$(4.6) \quad \left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = - \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \{[n-1] a_n(g) + [n+1] b_n(g)\} n^2 \cos n\varphi. \right|_{r=1}$$

Dosazením příslušných hodnot z rovnic (4.2) až (4.6) do rovnic (4.1) obdržíme

$$(4.7) \quad -2Db_0(g) \lambda_2 - D \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \{a_n(g) \lambda_1 [n(n-1)] + b_n(g) [\lambda_1 (n+1)(n+2) + 4\mu(n+1)]\} \cos n\varphi = \frac{A_0(g)}{2} + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} A_n(g) \cos n\varphi,$$

$$D \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} [a_n(g) \cdot (n-1) n^2 \lambda_1 + b_n(g) \cdot (n+1) n (\lambda_1 n - 4)] \cos n\varphi = 0.$$

Použijeme-li symbolů E_n, F_n, G_n, J_n , (4.8),

$$(4.8) \quad \begin{aligned} E_n &= -D[\lambda_1 n(n-1)], \\ F_n &= -D[\lambda_1 (n+2) + 4\mu](n+1), \\ G_n &= D[\lambda_1 n^2 (n-1)], \\ J_n &= D[(\lambda_1 n - 4)(n+1)n], \end{aligned} \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

můžeme přehledněji přepsat rovnice (4.7) ve tvar (4.9)

(4.9)

$$-2\lambda_2 D b_0(g) + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \{E_n a_n(g) + F_n b_n(g)\} \cos n\varphi = \frac{A_0(g)}{2} + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} A_n(g) \cos n\varphi,$$

$$\sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \{G_n a_n(g) + J_n b_n(g)\} \cos n\varphi = 0.$$

Srovnáním koeficientů posloupností v rovnicích (4.9) určíme neznámé koeficienty $a_n(g)$, $b_n(g)$.

$a_0(g)$ jest libovolná konstanta, volíme ji nulovou ;

(4.10)
$$b_0(g) = -\frac{A_0(g)}{4\lambda_2 D};$$

$$a_n = b_n = 0, \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots;$$

(4.11)
$$a_n(g) = \frac{A_n(g)}{\left(E_n - \frac{F_n}{J_n} G_n\right)},$$

$$b_n(g) = \frac{A_n(g)}{\left(F_n - \frac{E_n}{G_n} J_n\right)}.$$

$$n = 2, 4, 6, 8, \dots$$

Po dosazení (4.8) do (4.11) a úpravě obdržíme koeficienty $a_n(g)$, $b_n(g)$ v konečném tvaru:

(4.12)
$$a_n(g) = \frac{\lambda_1 n - 4}{\lambda_1 \lambda_3 D (n-1) n} \cdot \frac{A_n(g)}{2},$$

$$b_n(g) = -\frac{1}{\lambda_3 D (n+1)} \cdot \frac{A_n(g)}{2}.$$

$$n = 2, 4, 6, 8, \dots$$

5. VÝPOČET STATICKÝCH VELIČIN DESKY

V předcházejícím oddílu jsme zjištěním hledaných koeficientů $a_n(g)$, $b_n(g)$ určili neznámé hodnoty funkce (2.4) a tím našli řešení w ve tvaru (2.4). Dosadíme-li zjištěné součinitele, obdržíme

(5.1)
$$w = -\frac{A_0(g)}{4\lambda_2 D} r^2 + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \left[\left(\frac{\lambda_1 n - 4}{2\lambda_1 \lambda_3 D (n-1) n} - \frac{1}{2\lambda_3 D (n+1)} r^2 \right) \cdot A_n(g) \cdot r^n \cos n\varphi \right].$$

Koeficienty $A_n(g)$ jsou určeny rovnicí (3.7), s okrajovým momentem definovaným v (3.4). Jsou však závislé na g , tedy na šířce $2g$, na kterou zatěžovací momenty

rozdělujeme. Teorie předpokládá soustředěný zatěžovací moment. Spočítáme proto limity $A_n(g)$ při $g \rightarrow 0$.

$$(5.2) \quad \lim_{g \rightarrow 0} A_n(g) = \frac{2}{\pi} \lim_{g \rightarrow 0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} M_r(1, \varphi, g) \cos n\varphi \cdot d\varphi \quad \text{pro } n = 0, 2, 4, 6, \dots$$

Máme

$$(5.3) \quad \begin{aligned} & \lim_{g \rightarrow 0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} M_r(1, \varphi, g) \cdot (1 - \cos n\varphi) d\varphi \leq \\ & \leq \max_{\varphi \in \langle -\pi/2, +\pi/2 \rangle} (1 - \cos n\varphi) \cdot \lim_{g \rightarrow 0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} M_r(1, \varphi, g) d\varphi \end{aligned}$$

a

$$(5.4) \quad \lim_{\varphi \rightarrow 0} \max (1 - \cos n\varphi) = 0,$$

proto limity integrálů v nerovnosti (5.3) jsou rovny nule.

Z toho vyplývá

$$(5.5) \quad \lim_{g \rightarrow 0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} M_r(1, \varphi, g) \cos n\varphi d\varphi = 1,$$

a tedy

$$(5.6) \quad \lim_{g \rightarrow 0} A_n(g) = \frac{2}{\pi} \quad \text{pro } n = 0, 2, 4, 6, \dots$$

Nyní

$$(5.7) \quad \lim_{g \rightarrow 0} w(r, \varphi, g) = -\frac{1}{2\pi\lambda_2 D} r^2 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \left[\left(\frac{\lambda_1 n - 4}{2\lambda_1 \lambda_3 D(n-1)n} - \frac{1}{2\lambda_3 D(n+1)} r^2 \right) r^n \cos n\varphi \right],$$

neboť koeficienty z rovnic (4.10), (4.12) dávají hodnoty

$$(5.8) \quad \begin{aligned} a_0 &= 0, \\ b_0 &= -\frac{1}{2\pi\lambda_2 D}, \\ a_n &= b_n = 0, \quad n = 1, 3, 5, \dots \\ \left. \begin{aligned} a_n &= \frac{\lambda_1 n - 4}{\pi\lambda_1 \lambda_3 D(n-1)n}, \\ b_n &= -\frac{1}{\pi\lambda_3 D(n+1)}, \end{aligned} \right\} n = 2, 4, 6, \dots \end{aligned}$$

Tím dostáváme řešení rovnice (2.1) pro okrajové podmínky (3.1). Nám však jde o statické veličiny vyjádřené z této funkce w vztahy (2.3).

Použijeme rovnic (4.2), (4.3), (4.4), dosadíme do nich koeficienty a_n , b_n z (5.8) a vzniklé řady sečteme. Lineární kombinace výsledků dají nám posléze velikosti hledaných statických veličin podle rovnic (2.3).

Dosaďme tedy do (4.3) koeficienty (5.8)!

$$(5.9) \quad \Delta w = 4b_0 - \frac{4}{\pi\lambda_3 D} \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} r^n \cos n\varphi.$$

Řadu (5.9) a následující sečteme za předpokladu $|r| < 1$. Použijeme vztahu

$$e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i \sin n\varphi,$$

označíme

Re reálná část,

Im imaginární část,

$$\sum_{n=0,2,4,\dots}^{\infty} r^n \cos n\varphi = \operatorname{Re} \sum_{n=0,2,4,\dots}^{\infty} r^n e^{in\varphi}.$$

Budiž $n = 2k$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$,

$$|r^n| < 1,$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0,2,4,\dots}^{\infty} r^n \cos n\varphi &= \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} (r^2 e^{2i\varphi})^k, \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{1 - r^2 e^{2i\varphi}}, \\ &= \frac{1 - r^2 \cos 2\varphi}{1 - 2r^2 \cos 2\varphi + r^4}. \end{aligned}$$

Tento výsledek musíme zmenšit o prvý člen posloupnosti, který v hledaném součtu není zahrnut. Získaný součet dosadíme do (5.9)

$$(5.10) \quad \Delta w = 4b_0 - \frac{4}{\pi\lambda_3 D} \left(\frac{r^2(\cos 2\varphi - r^2)}{1 - 2r^2 \cos 2\varphi + r^4} \right).$$

Jestliže $r \rightarrow 1$, potom tento výraz platí také pro okraj desky vyjma body $(1, 0)$, $(1, \pi)$.

Dále vypočteme hodnotu $\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$ podle příslušné rovnice (4.2) s použitím (5.8)

$$(5.11) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = 2b_0 + \frac{1}{\pi\lambda_3 D} \left[r^{-2} \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \left(n - \frac{4}{\lambda_1} \right) r^n \cos n\varphi - \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} (n+2) r^n \cos n\varphi \right].$$

Obě sumy v rovnici (5.11) jsou stejné až na součinitele c v závorce. Jde o součet tvaru

$$(5.12) \quad \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} (n+c) r^n \cos n\varphi = \operatorname{Re} \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} (n+c)(re^{i\varphi})^n = \operatorname{Re} S.$$

V předešlé rovnici jsme si znakem S označili řadu

$$S = \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} (n+c)(re^{i\varphi})^n.$$

Budeme nyní hledat součet S_1 , který vznikne sčítáním od $n = 0, 2, 4, 6, \dots$ a je tedy o nulový člen S_0 větší než S .

$$(5.13) \quad S = S_1 - S_0,$$

$$S_1 = 2 \frac{r^2 e^{2i\varphi}}{(1 - r^2 e^{2i\varphi})^2} + c \frac{1}{1 - r^2 e^{2i\varphi}}.$$

Úpravou a odečtením S_0 podle (5.13) vychází

$$(5.14) \quad \operatorname{Re} S = c \frac{r^2(\cos 2\varphi - r^2)}{1 - 2r^2 \cos 2\varphi + r^4} + \frac{2r^2[(1+r^4)\cos 2\varphi - 2r^2]}{(1 - 2r^2 \cos 2\varphi + r^4)^2}.$$

V rovnici (5.11) nacházejí se dvě sumy tvaru (5.12), nabývající v součtu velikosti (5.14). V první sumě je konstanta c_1 , ve druhé c_2

$$c_1 = -\frac{4}{\lambda_1}, \quad c_2 = 2.$$

Dosaďme (5.14) s těmito konstantami do (5.11)!

$$(5.15) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = 2b_0 + \frac{2}{\pi\lambda_3 D} \left[\left(\frac{2}{\lambda_1} + r^2 \right) \frac{r^2 - \cos 2\varphi}{1 - 2r^2 \cos 2\varphi + r^4} + (1-r^2) \frac{[(1+r^4)\cos 2\varphi - 2r^2]}{(1 - 2r^2 \cos 2\varphi + r^4)^2} \right].$$

Jestliže $r \rightarrow 1$, platí tento výraz také pro body desky na okraji, vyjma body $(1, 0)$, $(1, \pi)$.

Sečteme ještě hodnotu potřebnou k vyčíslení $M_{r\varphi}$ v (2.3) podle (4.4). Po dosazení (5.8) dostaneme

$$(5.16) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{\pi\lambda_3 D} \left[- \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \left(n - \frac{4}{\lambda_1} \right) r^{n-2} \sin n\varphi + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} n r^n \sin n\varphi \right].$$

Pokud jde o tvar sum, je výraz (5.16) zcela obdobný (5.11), na místě kosínů jsou siny, proto při sčítání komplexních čísel srovnáme imaginární části. V této formě použijeme (5.12) a odvodíme (5.17) jako obdobu (5.14)

$$(5.17) \quad \operatorname{Im} S = c \frac{r^2 \sin 2\varphi}{(1 - 2r^2 \cos 2\varphi + r^4)} + \frac{2r^2(1-r^4) \sin 2\varphi}{(1 - 2r^2 \cos 2\varphi + r^4)^2}.$$

Připomeňme, že opět platí (5.13), jenomže v tomto případě $S_0 = 0$. Z (5.16) plyne, že pro výraz (5.17) jsou konstanty c_3, c_4

$$c_3 = -\frac{4}{\lambda_1}, \quad c_4 = 0.$$

Dosaďme (5.17) s uvedenými konstantami do (5.16)! Dostáváme

$$(5.18) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) = + \frac{2}{\pi \lambda_3 D} \left[\frac{2}{\lambda_1} \frac{\sin 2\varphi}{(1 - 2r^2 \cos 2\varphi + r^4)} + (1 - r^2) \frac{(r^4 - 1) \sin 2\varphi}{(1 - 2r^2 \cos 2\varphi + r^4)^2} \right].$$

Tak jsme získali základní funkce (5.10), (5.15) a (5.18) v uzavřeném tvaru. Z nich vypočteme (2.3). Chybí nám některé výrazy potřebné k vyčíslení příčných smykových sil Q . Ty vypočteme derivováním Δw (5.10)

$$(5.19) \quad \frac{\partial}{\partial r} \Delta w = - \frac{8}{\pi \lambda_3 D} \frac{r(r^4 + 1) \cos 2\varphi - 4r^3}{(1 - 2r^2 \cos 2\varphi + r^4)^2},$$

$$(5.20) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Delta w = - \frac{8}{\pi \lambda_3 D} \frac{r(r^4 - 1) \sin 2\varphi}{(1 - 2r^2 \cos 2\varphi + r^4)^2}.$$

Uvedené výrazy (5.19), (5.20) jsou vlastně až na součinitele přímo příčné smykové poměrné síly Q_r a Q_φ podle rovnic (2.3).

Zavedeme zjednodušující označení opakujících se konstant a funkcí, které bude užitečné zejména pro číselný výpočet.

Přehled označení:

$$(5.21) \quad \begin{aligned} A(r; \varphi) &= (1 - 2r^2 C(\varphi) + r^4), & \lambda_1 &= (1 - \mu), \\ B(\varphi) &= \sin 2\varphi, & \lambda_2 &= (1 + \mu), \\ C(\varphi) &= \cos 2\varphi, & \lambda_3 &= (3 + \mu), \\ Z_1(r; \varphi) &= \frac{r^2 - C(\varphi)}{A(r; \varphi)}, & L_1(r) &= (1 - r^2) \lambda_1, \\ Z_2(r; \varphi) &= \frac{(r^4 + 1) C(\varphi) - 2r^2}{A^2(r; \varphi)}, & L_2(r) &= \lambda_2 r^2, \\ Z_3(r; \varphi) &= \frac{(r^4 - 1) B(\varphi)}{A^2(r; \varphi)}, & D &\dots \text{ tuhost desky ve výrazech se krátí,} \\ & & \mu &\dots \text{ Poissonovo číslo.} \end{aligned}$$

Přepíšme rovnice (5.10), (5.15), (5.18), (5.19), (5.20), upravme a dosaďme (5.8)!

$$(5.22) \quad \begin{aligned} \Delta w &= \frac{4}{\pi D} \left[-\frac{1}{2\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} r^2 Z_1(r; \varphi) \right], \\ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} &= \frac{2}{\pi D} \left\{ -\frac{1}{2\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} \left[\left(\frac{2}{\lambda_1} + r^2 \right) Z_1(r; \varphi) + (1 - r^2) Z_2(r; \varphi) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) &= \frac{2}{\pi \lambda_3 D} \left[\left(\frac{2}{\lambda_1} \cdot \frac{B(\varphi)}{A(r; \varphi)} \right) + (1 - r^2) Z_3(r; \varphi) \right], \\ \frac{\partial}{\partial r} \Delta w &= - \frac{8}{\pi \lambda_3 D} r Z_2(r; \varphi), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Delta w &= - \frac{8}{\pi \lambda_3 D} r Z_3(r; \varphi).\end{aligned}$$

Výrazy (5.22) dosazeny do (2.3) řeší úlohu pokud jde o statické veličiny. Dosaďme!

$$(5.23) \quad \begin{aligned}M_r &= + \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi \lambda_3} [(L_2(r) + 2) \cdot Z_1(r; \varphi) + L_1(r) \cdot Z_2(r; \varphi)], \\ M_\varphi &= + \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi \lambda_3} [(L_2(r) - 2) \cdot Z_1(r; \varphi) - L_1(r) \cdot Z_2(r; \varphi)], \\ M_{r\varphi} &= - \frac{2}{\pi \lambda_3} \left(\frac{2B(\varphi)}{A(r; \varphi)} + L_1(r) \cdot Z_3(r; \varphi) \right), \\ Q_r &= + \frac{8}{\pi \lambda_3} r Z_2(r; \varphi), \\ Q_\varphi &= + \frac{8}{\pi \lambda_3} r Z_3(r; \varphi).\end{aligned}$$

Výrazy (5.23) s hodnotami (5.21) jsou konečným výsledkem statického řešení dané desky. Platí pro

$$r \in \langle 0, 1 \rangle, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Pro $r = 1$ platí vyjma body $(1; 0)$, $(1; \pi)$, v nichž působí zatížení.

6. CHARAKTERISTICKÉ VÝSLEDKY

Vyšetřovaný případ kruhové desky je obdobný Hertzovu problému, kruhové stěně zatížené ve dvou protilehlých bodech obvodu dvěma stejnými silami. Každá diferenciální vrstva desky je vlastně takovouto stěnou, na niž však navíc působí po povrchu smyková napětí τ_{zr} , $\tau_{z\varphi}$. Deska je oproti stěně schopna vzdorovat příčným smykem, silami označenými Q_r , Q_φ .

Hertzův problém se vyznačuje některými velmi charakteristickými výsledky [4]. Podél průměru $\varphi = 0$ spojujícího zatěžovací body je napětí

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{\pi} = \text{const}.$$

Tomu u desky odpovídá

$$(6.1) \quad \begin{aligned}\text{pro } \varphi = n\pi, \quad n = 0, 1, \quad M_\varphi &= + \frac{\lambda_1}{\pi \lambda_3} = \text{const} . \\ 0 \leq r < 1, \quad &\end{aligned}$$

Podél osy $\varphi = 0$ jest moment M_φ stálý a má velikost podle (6.1) .

U Hertzova problému vychází na obvodu stěny vedle okrajových podmínek

$$(6.2) \quad \text{pro } r = 1, \quad \varphi \neq n\pi, \quad n = 0, 1, \quad \sigma_r = 0, \quad \tau_{r\varphi} = 0,$$

$$\text{také} \quad \sigma_\varphi = 0.$$

To znamená, že celý okraj stěny (až na zatěžovací body) je bez napětí. Je to nejcharakterističtější výsledek Hertzova problému. Nulové hodnotě σ_φ odpovídá u desky konstanta

$$(6.3) \quad \text{pro } \varphi \neq n\pi, \quad n = 0, 1, \quad M_\varphi = \frac{4}{\pi\lambda_3} = \text{const.} \\ r = 1,$$

Na obvodě zvolené kruhové desky je moment M_φ stálý a má velikost podle (6.3).

Řešení stěny vychází ze dvou okrajových podmínek (6.2), podobně i řešení desky vychází ze dvou (3.1). Podmínice pro σ_r odpovídá podmínka pro M_r , avšak podmínice smykových napětí $\tau_{r\varphi}$ by odpovídala podmínka pro $M_{r\varphi}$ a nikoliv pro V_r . V napjatosti desky počítáme s přítomností příčné smykové síly Q , která v napjatosti stěny nemá obdoby. V úvaze o působení volného okraje desky Kirchhoff slučuje účinek $M_{r\varphi}$ a Q_r na V_r a tak dostává nutné a postačující dvě podmínky.

Z obecného hlediska je však deska útvar nikoli rovinný, jak teorie zjednodušuje, ale prostorový, pro jehož volný povrch platí obecná podmínka, že všechna povrchová napětí musí být nulová.

Tak dospíváme k podmínce, že nejen M_r , vyjadřující společný účinek σ_r ke střednicové ploše desky, musí být nulový na volném okraji desky, ale také $M_{r\varphi}$, reprezentující účinek $\tau_{r\varphi}$ a Q_r , reprezentující účinek τ_{zr}

$$(6.4) \quad \begin{aligned} \text{a) } M_r &= 0, \\ \text{b) } M_{r\varphi} &= 0, \\ \text{c) } Q_r &= 0. \end{aligned}$$

Podmínky (6.4) jsou obecnější než (3.1); vyžadují, aby obě složky výslednice V_r byly nulové. Jsou analogické podmínkám volného okraje stěny. Rozdíl ve výsledcích podle (3.1) a (6.4) můžeme podle Saint Venantova principu očekávat pouze v okrajové oblasti omezené šířky.

Všimněme si blíže těchto rozdílů ve výsledcích. Nejdříve zjistíme velikost $M_{r\varphi}$ na obvodu desky, plynoucí z řešení (5.23)

$$(6.5) \quad (M_{r\varphi})_{r=1} = -\frac{2}{\pi\lambda_3} \cotg \varphi.$$

Ač by $M_{r\varphi}$ podle (6.4) mělo býti nulové podél obvodu, řešení vycházející z (3.1) dává výsledek odpovídající kotangentě. Dosahuje proto všech reálných hodnot.

Dále vypočteme z řešení (5.23) úhly α_1, α_2 , o které se na obvodě desky odchylují směry hlavních momentů M_1, M_2 od normály. Vzhledem k tomu, že M_r má právě směr normály a M_φ tečny k obvodu, vypočteme $\alpha_{1,2}$ ze vztahů Mohrovy kružnice.

Pro $\varphi \in (0, \pi)$

$$(6.6) \quad \operatorname{tg} 2\alpha_{1,2} = \frac{2M_{r\varphi}}{M_r - M_\varphi}.$$

Úhel 2α určuje směr, proto má význam pouze v jedné čtveřici sousedních kvadrantů.

Definujme

$$(6.7) \quad 2\alpha_1 \in \left(-\frac{3\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right), \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}.$$

Ve smyslu (6.7) určuje (6.6) jednoznačně dva úhly α_1, α_2 . Dosadíme za $M_{r\varphi}$ z (6.5), za M_φ z (6.3) a uvažme, že $M_r = 0$ ve shodě s okrajovými podmínkami (3.1)

$$(6.8) \quad \operatorname{tg} 2\alpha_{1,2} = \operatorname{cotg} \varphi.$$

Obecně platí pro n celé

$$(6.9) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{cotg} \left[(2n-1)\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right].$$

Pro $n = 1; 2$ vyplývá z posledních dvou rovnic

$$(6.10) \quad \alpha_1 = -\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}, \quad \alpha_2 = -\frac{\varphi}{2} + \frac{3\pi}{4}.$$

Izostaty se definují jako křivky, jež svými tečnami a normálami určují směry hlavních napětí (u stěn), nebo momentů (u desek). Podle toho úhly $\alpha_{1,2}$ jsou směrové odchylky izostat od kolmice při vyústění na okraj. Dosahují všech hodnot v intervalu

$$\alpha_1 \in \left(-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right), \quad \alpha_2 \in \left(+\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right).$$

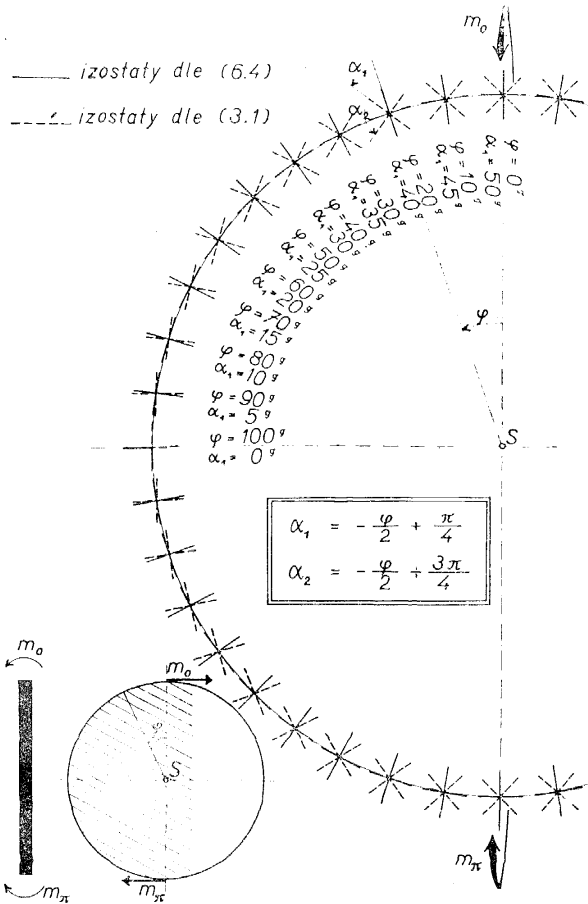
Naproti tomuto výsledku uvažme, že podle okrajových podmínek (6.4) jsou vzhledem k $M_{r\varphi} = 0$ na volném okraji M_r a M_φ přímo momenty hlavními a proto izostaty v jedné soustavě na okraj ústí kolmo a v druhé s ním splývají. Je to stejný výsledek, jaký nalézáme u stěn (6.2). Dosadíme-li (6.4) do (6.6), vychází

$$(6.11) \quad \bar{\alpha}_1 = 0, \quad \bar{\alpha}_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Rozdíl ve výsledcích (6.11) a (6.10) je směrovou odchylkou na volném okraji desky mezi izostatami podle (6.4) a (3.1).

Odchylky podle (6.10) jsme v jednotlivých bodech obrysu vynesli na obr. 5. Směrová odchylka (6.10) spolu s výsledkem (6.5) pro $M_{r\varphi}$ charakterizuje rozpor mezi okrajovými podmínkami (3.1) a (6.4). Vidíme tedy, že zjednodušování okrajových podmínek má za následek rozdíly výsledků, které co do velikostí i směru mohou dosáhnout největších možných hodnot. Podle Saint Venantova principu se omezují tyto rozpory na úzkou obvodovou oblast. Řešení jako celek jimi není ovlivněno.

Naše fotoelastimetrické experimenty tyto skutečnosti plně potvrdily. Teoretické a experimentální výsledky se téměř úplně shodovaly ve vnitřní oblasti desky. V okrajové oblasti šířky zhruba rovné tloušťce desky h jsme zjistili zhora uvedené podstatné odchylky a to tak, že experiment lépe odpovídal podmínkám (6.4). Do vzdá-



Obr. 5.

Směrové odchylky $\alpha_{1,2}$ vyústění izostat na volný okraj desky podle různých okrajových podmínek.

lenosti $2h$ od okraje i menší odchylky zcela vymizely. Zvolený případ je nepříznivý: zatížení působí přímo na okraji. Proto odchylky dosahují největších možných velikostí. V praxi přicházející případy bývají příznivější.

To, že se tyto rozpory omezují na okrajovou oblast však neznamená, že jsou vždy zanedbatelné a ve svých důsledcích nepodstatné. Například experimentální metodiky často vycházejí z hodnot měřených právě na okrajích, používají integrací [6]

a jiných vyhodnocovacích způsobů, které předpokládají platnost běžné teorie a jejich předpokladů a následkem těchto rozporů mohou být úplně znehodnoceny. To platí i tehdy, když odchylky zdánlivě nejsou značné. Experimentálně jsme například prokázali, že chyby vznikají i v místech, kde podmínky (3.1) a (6.4) splývají.

Ukažme to na příkladě integrace podle SCHWIEGERA [6]. V přímém řezu, který určuje pravouhloú souřadnou soustavu $x; y$ s počátkem v počátku integrace, integrujeme podle rovnice

$$(6.12) \quad \mu M_x - M_y = - (1 + \mu) \int_0^x \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dx + c.$$

Podmínky (3.1) a (6.4) splývají pro $\varphi = \frac{\pi}{2}$, kdy v obou případech $M_{r\varphi} = 0$.

Pro integraci podle (6.12) musíme však znát funkci $\frac{\partial M_{yx}}{\partial y}$, která podle (6.5) při $x \equiv r$ je

$$(6.13) \quad \left(\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \right)_{r=1} = + \frac{2}{\pi \lambda_3} \cdot \frac{1}{\sin^2 \varphi},$$

tedy v bodě $r = 1, \varphi = \frac{\pi}{2}$

$$(6.14) \quad \left(\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \right)_{r=1, \varphi=\pi/2} = + \frac{2}{\pi \lambda_3},$$

zatím co z platnosti (6.4) vyplývá v témže místě

$$(6.15) \quad \left(\frac{\partial \bar{M}_{yx}}{\partial y} \right)_{r=1, \varphi=\pi/2} = 0.$$

Vidíme tedy, že integrovaná funkce nabývá v okrajové oblasti různých hodnot (6.14), (6.15) při platnosti (3.1) nebo (6.4) i v řezu $\varphi = \frac{\pi}{2}$, kde oboje podmínky splývají. Chyba v tomto řezu je však minimální a při integraci prakticky zanedbatelná.

Všimněme si však integrace v řezech rovnoběžných s $x \equiv \varphi = \frac{\pi}{2}$. Podle (6.12) můžeme integrovat jen při znalosti konstanty c . Zřejmě platí

$$(6.16) \quad c = \mu M_{x=0} - M_{y=0}.$$

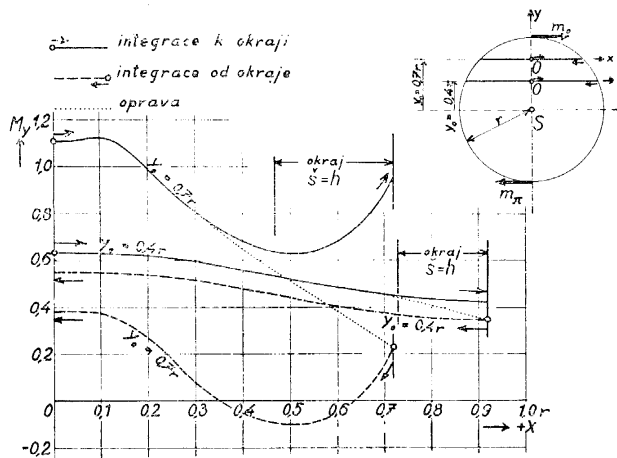
Integraci můžeme začít v každém bodě, kde známe $M_{x=0}; M_{y=0}$. Proměřili jsme fotoelasticimetricky model [7]. Měření shodující se s (6.4) dá tyto hodnoty na volném okraji přímo. Pro srovnání jsme integrovali jednak od okraje dovnitř desky vycházejíce z přímo změřených hodnot $(c)_{r=1}$ a opačně od osy $\varphi = 0$ k okraji, vycházejíce z hodnot $(c)_{\varphi=0}$, rovněž určených experimentálně. Výsledky jsme srovnali ještě

s výsledky teoretickými (5.23). Kontrolou byla podmínka rovnováhy, která také posloužila ke srovnání.

$$(6.17) \quad \int_{-l}^{+l} M_y dx = m_0,$$

kde délka řezu je $2l$ a m_0 je vnější zatěžovací moment, který je jednotkový. Přehled výsledků podává obr. 6 a tabulka 1. Zde jsou v první řádce výsledky teoretické, v dalších experimentální, získané integrací směrem k okraji a od okraje a posléze konečný experimentální výsledek opravený podle přímého měření na okraji. Vyšetřené řezy jsou rovnoběžné s $\varphi = \frac{\pi}{2}$, tedy kolmé ke směru zatížení, a jsou od středu desky vzdáleny $y_0 = 0,4r$ a $y_0 = 0,7r$. Poměr tloušťky desky k rozpětí byl na modelu $\frac{h}{d} = \frac{1}{11,4}$.

Sledujme průběh M_y . Při integraci od $\varphi = 0$ k okraji desky vznikají chyby pouze v okrajové oblasti. Na okraji dospějeme k nesprávné hodnotě $(M_y)_{r=1}$, která je v prvním řezu o 23%, ve druhém o 317% větší, než měřena a neshoduje se ani s teo-



Obr. 6. Výsledky integrací.

Tab. 1. Srovnání integrací.

		Řez $y_0 = 0,4r$			chyba			odchylka		
experiment	teorie	m_0	= 1,00		0		$(M_y)_{r=1}$	= 0,377	109%	+ 9%
	integrace k okraji		= 0,98	101%	+1%		= 0,425	123%	+ 23%	
	integrace od okraje		= 0,84	86,6%	-13,4%		= 0,345			
	výsledné hodnoty		= 0,97	100%			= 0,345	100%	0	
		Řez $y_0 = 0,7r$			chyba			odchylka		
experiment	teorie	m_0	= 1,00		0		$(M_y)_{r=1}$	= 0,380	165%	+ 65%
	integrace k okraji		= 1,206	116,6%	+16,5%		= 0,960	417%	+ 317%	
	integrace od okraje		= 0,157	15,2%	-84,8%		= 0,230			
	výsledné hodnoty		= 1,035	100%			= 0,230	100%	0	

retickou. Vyjdeme-li z konstanty přímo určené měřením a integrujeme od okraje dovnitř desky, ovlivňujeme okrajovými chybami celý průběh integrace. Oproti skutečným hodnotám M_y vychází v prvním řezu průběh s hodnotami zmenšenými o 14 až 20% a ve druhém řezu, který je blíže oblasti zatížení, vycházejí hodnoty úplně nesmyslné. Integrace v obou směrech probíhá ovšem stejně, vznikají stejné chyby na okraji desky, avšak různým určením výchozí integrační konstanty vznikne posunutí celé integrační křivky. Při experimentálním řešení prakticky použít této integrace můžeme, avšak jen ve vnitřní oblasti desky. Každý průchod okrajovou oblastí znamená posunutí dalšího průběhu integrace. Na obr. 6 jsme vyznačili výsledné experimentální hodnoty, jejichž průběh uvnitř desky splývá s první integrací a na okraji je doplněn podle přímého měření. Průběh tak pokračuje k okrajové hodnotě totožné s výchozí hodnotou integrace vedené opačným směrem.

Uvedenou integraci [6] lze použít jen s ohledem na vznikající chyby. Také ostatních experimentálních metodik obvyklých při vyšetřování stěn lze použít jen s vyhradami. Připomeňme membránovou analogii a iteraci (určující součty hlavních momentů ze změřených okrajových hodnot), kterou uvádí DRUCKER [5] jako doplňkovou metodu k fotoelasticitě (určující rozdíly hlavních momentů) při vyšetřování desek.

Na závěr shrňme, že na rozdíl od stěny, jejíž okraj (v našem smyslu) plně vyhovuje teorii, je okraj desky vždy výjimečnou oblastí, a to i okraj volný. Proto je třeba mít vždy na zřeteli, že se zmíněné zjednodušení okrajových podmínek, které fyzikální skutečnost přesně nevystihuje, u desek [2] i skořepin [3] běžně užívá. Obecné použití výpočetních postupů a vzorců v úzké okrajové oblasti desek a skořepin vede k chybám, které se nemusí vždy omezit jen na tuto úzkou oblast.

Literatura

- [1] Китовер К. А.: Круглые тонкие плиты. Гос. изд. лит. по строительству и архитектуре, Ленинград-Москва 1953, стр. 11, 87.
- [2] Timoshenko S.: Theory of Plates and Shells, Mc Graw-Hill Book Company, New York and London 1940, str. 89, 90.
- [3] Гольденвайзер А. Л.: Теория оболочек. Гос. изд. технико-теор. лит., Москва 1953, стр. 102.
- [4] Pirard A.: La Photoélasticité. Paris-Liège 1947, str. 208.
- [5] Hetényi M.: Handbook of Experimental Stress Analysis. John Willey New York, Chapman & Hall London, 1950, str. 928.
- [6] Schwiieger H.: Ein Auswerteverfahren bei der spannungsoptischen Untersuchung elastischer Platten. Bauplanung und Bautechnik, 8. Jg., Heft 4., 1954.
- [7] Košťák B.: Fotoelasticitrické vyšetřování ohybu tenkých desek. Zpráva ČSAV-ÚTAM, Praha 1958 — Stavebnický časopis, Bratislava 1961. No 1—2.

КРУГЛАЯ ПЛИТА, ЗАГРУЖЕННАЯ В ДВУХ
ПРОТИВОПОЛОЖНЫХ ТОЧКАХ КРАЯ ДВУМЯ ОДИНАКОВЫМИ
ИЗГИБАЮЩИМИ МОМЕНТАМИ

БЛАГОСЛАВ КОШТЯК (Blahoslav Košťák)

Цель настоящей статьи — привести в замкнутой форме непосредственное решение данной плиты (рис. 1), показывая при этом противоречия, вытекающие из упрощения граничных условий плит [2] или оболочек [3], введенного Кирхгоффом. Об этом упрощении нам не надо забывать, когда мы хотим использовать теорию в области контура, и вследствие этого тоже предполагаем, что она действительна в этой области, как мы это находим при применении некоторых вспомогательных методов экспериментального исследования напряжений (например — мембранная аналогия, итерация [5], или различные интеграции [6]).

Мы ищем функцию прогибов $w(r, \varphi)$ из уравнения (2.1), (2.2) в виде (2.4). Из этой функции w мы найдем статические величины, приходящиеся на единицу длины (2.3) (рис. 2). Два коэффициента a_n, b_n в уравнении (2.4) ищем, используя граничные условия. Смотря по физической действительности, существуют три общих условия (6.4), но мы должны принять два упрощенных (3.1) (рис. 3), из которых первое — основное, второе — замененное. Применяя функцию $M_r(1, \varphi, g)$ ((3.4), рис. 4), мы находим краевые условия как ряды Фурье ((3.7); (3.8) или (4.1)). Введя (2.4) в (4.1), получим (4.7) или (4.9), где величины $a_n(g), b_n(g)$ вытекают из сравнения коэффициентов рядов ((4.10), (4.12)). Введя после предельного перехода $g \rightarrow 0$ величины a_n, b_n во все выражения правых частей уравнений (2.3), мы можем все эти выражения найти в виде рядов ((4.2), (4.3), (4.4), (4.5), (4.6)). Применяя отношения комплексных чисел, найдем суммы ((5.10), (5.15), (5.18), (5.19), (5.20) или (5.22)). После того, учитывая обозначения (5.21), найдем по уравнениям (2.3) результаты (5.23) как линейные комбинации выражений (5.22).

Сравнивая плиту с аналогической стенкой (проблема Герца), находим характеристические результаты (6.1), (6.3). На краях плиты находим (6.5) и (6.10) в согласии с упрощенными граничными условиями (3.1), но в противоположность к условиям (6.4). Вместо анулирования крутящих моментов $M_{r\varphi}$ они идут по котангенту от 0 к $\pm \infty$. Углы $\alpha_{1,2}$ выражают отклонения главных моментов от перпендикуляров на границе. Из того вытекает, что теоретические изостатические кривизны не спускаются перпендикулярно на край (6.11), но под углом $\alpha_{1,2}$, который может изменяться от 0 к 45° . (Смотри рис. 5.) Очевидно, эти отличия могут достичь в пределе абсолютных максимумов.

Эти результаты согласно с нашими экспериментами [7] и проявленной возможностью больших ошибок (рис. 6 и таб. 1) показывают, что, хотя упрощение граничных условий не имеет важнейших влияний на общее решение, не возможно его всегда просто отбросить. Вследствие пространственного постоянства краевых напряжений краевая область всегда является исключаемой, и обычная теория здесь не подходит.

Summary

A CIRCULAR PLATE BENT BY TWO EQUAL BENDING MOMENTS ACTING AT TWO OPPOSITE POINTS OF THE EDGE

BLAHOŠLAV KOŠŤÁK

The purpose of this paper is to find a direct and closed-form static solution of the thin plate (Fig.1); and to show the contradictions arising from Kirchhoff's simplification of boundary conditions on free edges of plates [2] or shells [3]. This simplification must be taken into account if we apply the theory and therefore also assume its strict validity in the neighbourhood of the considered edge as is done in some methods of experimental stress analysis (*e. g.* membrane analogy, iteration [5] or integrations [6]).

We are looking for a function of the deflections $w(r, \varphi)$ of Eqs. (2.1), (2.2) in the form of (2.4). The static quantities per unit lengths Eqs. (2.3) (see Fig. 2) can be determined by the function w . Two unknowns a_n, b_n in Eq. (2.4) are to be determined from the boundary conditions. There are three general free boundary conditions (6.4), so that we have to reduce them (see Fig.3) to two, in the simplified form of Eqs. (3.1), where the first is the original one and the second replaces the remaining. Using the function $M_r(1, \varphi, g)$ (Eqs. (3.4), see Fig. 4) we can find the boundary conditions in the form of Fourier series, Eqs. (3.7), (3.8) or (4.1). Putting expression (2.4) into Eqs. (4.1) we obtain Eq. (4.7) or (4.9), where the quantities $a_n(g), b_n(g)$ result from the comparison of the coefficient of series (4.10) and (4.12). Let $g \rightarrow 0$ in the expressions for $a_n(g), b_n(g)$ ((5.6), (5.7)); substitute into all terms on the right sides of Eqs. (2.3). These terms appear in the form of the series (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), (4.6). We use a relation on complex numbers for their sum (5.10), (5.15), (5.18), (5.19), (5.20); or (5.22). Then according to Eqs. (2.3), and using the notations (5.21), the linear combinations of the expressions (5.22) give us the final static quantities (5.23).

When compared with the problem of Hertz we can observe the characteristic results (6.1), (6.3). Along the edge of the plate we obtain Eq. (6.5) and (6.10), according to the simplified conditions (3.1) but in contradiction to the general conditions (6.4). The twisting moment $M_{r\varphi}$, which should equal zero, may take on all real values from 0 to $\pm \infty$. The angles $\alpha_{1,2}$ are inclinations of the principal bending moments

to the normal on the edge. This means that the isostatic curves of the theory do not approach the free edge perpendicularly ((6.11) which results from (6.4)), but under an angle $\alpha_{1,2}$, which may vary from 0° to 50° (see Fig. 5). We can see that the magnitudes of these deflections as well as those of $M_{r\theta}$ can, in the limit, reach their absolute maxima.

It was our experiments [7] and the proved possibility of real errors that had led us to these problems. Although the simplification of boundary conditions has no essential influence on the solution as a whole, it cannot be neglected in all those cases that, in some way, depend on the strict validity of the conditions at the edge. One example of this is shown when using the integration (6.12) [6] to evaluate an experiment. (See Fig. 6.) Starting from the experimentally known constant c at the axis or at the edge we can integrate towards the edge or back. Both integral curves are practically parallel but different due to errors in the edge area. The integration towards the edge gives us false values at the edge, and the integration in the opposite direction even within the plate. Errors arise even at the point $(1, \pi/2)$ where (3.1) and (6.4) are identical (see (6.14), (6.15)), but here they are at their minimum. It can be seen that we must be very careful with our experiments when using such formulas. The edge area is always exceptional due to the three-dimensional state of stresses.