Aplikace matematiky

Vladimír Fiřt

Výpočet vlastních čísel na základě transformace homogenního systému algebraických rovnic

Aplikace matematiky, Vol. 6 (1961), No. 2, 91–102

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102744`

VÝPOČET VLASTNÍCH ČÍSEL NA ZÁKLADĚ TRANSFORMACE HOMOGENNÍHO SYSTÉMU ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

Vladimír Fiřt

(Došlo dne 18. března 1960.)

V článku je podána jistá iterační metoda výpočtu vlastních čísel homogenního systému n algebraických rovnic o n neznámých, na jehož řešení vede řada úloh z nauky o pružnosti a pevnosti, stavebné mechaniky a dynamiky. Jsou uvedeny dva numerické příklady.

1. ÚVOD

Při použití nejčastěji užívaných metod (metody deformační, silové, integrace diferenciálních rovnic, metody Ritzovy, Galerkinovy a jiných) k vyšetření kritického zatížení stavebních konstrukcí a k výpočtu vlastních frekvencí nezatížených soustav, jakož i soustav zatížených statickými osovými silami, se setkáváme s úlohou určit vlastní číslo ε_0 homogenního systému n algebraických rovnic, lineárních vzhledem k neznámým x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, [1], [2], [3], [5]:

$$\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1,n}x_n &=& 0\,, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2,n}x_n &=& 0\,, \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \ldots + a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n &=& 0\,, \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1} + a_{n,n}x_n &=& 0\,. \end{array} \tag{1}$$

Koeficienty $a_{i,k} = f_{i,k}(\varepsilon)$ jsou dané funkce argumentu ε.

Pro vlastní číslo ε_0 platí podmínka, že

$$\Delta(\varepsilon_0) = 0\,, \tag{2}$$

kde $\Delta(\varepsilon)$ je determinant systému (1):

$$\Delta(\varepsilon) = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Triviálnímu a netriviálnímu řešení systému rovnic (1) odpovídá fysikálně existence dvou rovnovážných stavů konstrukce (nedeformovaného a deformovaného stavu), tj. ztráta stability konstrukce rozvětvením rovnováhy. Při $\varepsilon \neq \varepsilon_0$ je $\Delta(\varepsilon) \neq 0$ a rovnice (1) jsou splněny tehdy a jen tehdy, když $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Je-li determinant (3) vysokého řádu, stává se rovnice (2) velmi složitou. A protože také v mnoha případech ε není explicitně vyjádřeno, není možné rovnici (2) řešit přímo, ale můžeme postupovat takto:

Sestrojí se graf funkce $\Delta(\varepsilon)$ v určitém intervalu $\langle \varepsilon', \varepsilon'' \rangle$ a bodu, kde hodnota této funkce je rovna nule, odpovídá hledané vlastní číslo ε_0. V případě, že body ε' a ε'' jsou blízko sebe a hodnoty $\Delta(\varepsilon')$ a $\Delta(\varepsilon'')$ mají opačná znaménka, lze vlastní číslo ε_0 určit lineární interpolací, neboť ε_0 leží mezi body ε' a ε''. Z $(n - 1)$ rovnic systému (1) lze určit hodnoty poměrů $\frac{x_i}{x_n}$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, dosadíme-li za koeficienty při neznámých x_i hodnoty $a_{i,k} = f_{i,k}(\varepsilon_0)$.

Hodnoty poměrů $\frac{x_i}{x_n}$ se určují tehdy, chceme-li vyšetřit tvar vybočení konstrukce, kterému odpovídá určitá velikost kritického zatížení, resp. tvar vlastního kmitání konstrukce, kterému odpovídá určitá vlastní kruhová frekvence nebo vlastní kmitočet [1], [2], [3].

Velkou námahu vyžaduje určení vlastního čísla ε_0 z rovnice (2) zvláště tehdy, když determinant (3) je vysokého řádu, neboť k sestrojení funkce $\Delta(\varepsilon)$ je nutné několikrát vyčíslit determinant n-tého řádu pro různě volené hodnoty argumentu ε.

Výpočet vlastních čísel iterační metodou, o níž nyní pojednáme, nevyžaduje sestrojení grafu složité funkce $\Delta(\varepsilon)$, což jest hlavní výhodou této metody. Rovněž poměry $\frac{x_i}{x_n}$ není nutno zvlášť určovat, neboť k jejich hodnotám dospějeme během teračního postupu výpočtu vlastního čísla ε_0.

2. ITERAČNÍ METODA A JEJÍ POUŽITÍ

Při výpočtu aproximací vlastního čísla ε_0 iterační metodou budeme postupovat takto:

Transformujeme homogenní systém rovnic (1) na nehomogenní systém rovnic tak, že dělíme každou rovnici systému (1) neznámou $x_r \neq 0$. Dělíme-li tedy např. prvních $(n - 1)$ rovnic systému (1) neznámou $x_n \neq 0$, obdržíme systém $(n - 1)$ nehomogenních rovnic lineárních vzhledem k $(n - 1)$ neznámým poměrům

$$\frac{x_i}{x_n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n - 1 : \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
a_{1,1} \frac{x_1}{x_n} + a_{1,2} \frac{x_2}{x_n} + \ldots + a_{1,n-1} \frac{x_{n-1}}{x_n} &= - a_{1,n}, \\
a_{2,1} \frac{x_1}{x_n} + a_{2,2} \frac{x_2}{x_n} + \ldots + a_{2,n-1} \frac{x_{n-1}}{x_n} &= - a_{2,n}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n-1,1} \frac{x_1}{x_n} + a_{n-1,2} \frac{x_2}{x_n} + \ldots + a_{n-1,n-1} \frac{x_{n-1}}{x_n} &= - a_{n-1,n}.
\end{aligned} \tag{5}$$

A konečně, dělíme-li poslední rovnici systému (1) rovněž x_n, dostaneme

$$a_{n,1}\frac{x_1}{x_n} + a_{n,2}\frac{x_2}{x_n} + \ldots + a_{n,n-1}\frac{x_{n-1}}{x_n} + a_{n,n} = 0\,. \tag{6}$$

Tato transformace homogenního systému rovnic (1) je možná jen tehdy, když je splněna podmínka $x_n \neq 0$, a proto vlastní číslo ε_0 můžeme určit z podmínky, aby všechny transformované rovnice (5) a (6) byly splněny. Protože pro celkový počet n neznámých (vlastní číslo ε_0 a $(n-1)$ poměrů $\frac{x_i}{x_n}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$) platí n vztahů mezi nimi, které tvoří $(n-1)$ rovnic systému (5) a rovnice (6), obdržíme vždy řešení zcela určité. Odtud plyne tento závěr:

Vlastní číslo ε_0 je taková hodnota argumentu ε, při níž existuje řešení transformovaných nehomogenních rovnic (5) *a* (6).

Poněvadž homogennímu systému rovnic (1) přísluší nejen jedno vlastní číslo, ale více vlastních čísel [1], [2], existuje více než jedno řešení nehomogenních rovnic (5) a (6). Každému řešení těchto rovnic odpovídá určité vlastní číslo.

Výpočet vlastního čísla z transformovaných rovnic (5) a (6) provedeme metodou postupných aproximací (kterou uvedeme bez důkazu).

První aproximace. 1. Za přibližnou hodnotu nultého řádu vlastního čísla ε_0 vezmeme zvolené číslo ${}^{(0)}\varepsilon$ a vypočteme hodnoty koeficientů ${}^{(0)}a_{i,k} = f_{i,k}({}^{(0)}\varepsilon)$.

2. Ze systému nehomogenních lineárních rovnic (5) určíme poměry ${}^{(0)}\left(\frac{x_i}{x_n}\right)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, Gaussovou eliminací, iterací nebo jinými způsoby; tyto poměry ${}^{(0)}\left(\frac{x_i}{x_n}\right)$ budou přibližné, neboť je stanovíme z přibližných hodnot ${}^{(0)}a_{i,k}$.

3. Dosadíme hodnoty ${}^{(0)}a_{n,k} = f_{n,k}({}^{(0)}\varepsilon)$ a ${}^{(0)}\left(\frac{x_i}{x_n}\right)$ do rovnice (6)[1].

4. Sestrojíme graf funkce

$${}^{(1)}\Phi(\varepsilon) = {}^{(0)}\left(\frac{x_1}{x_n}\right) a_{n,1} + {}^{(0)}\left(\frac{x_2}{x_n}\right) a_{n,2} + \ldots + {}^{(0)}\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right) a_{n,n-1} + a_{n,n}\,, \tag{7}$$

která se vyznačuje tím, že poměry ${}^{(0)}\left(\frac{x_i}{x_n}\right)$ jsou konstantami a jen koeficienty $a_{n,k}$ jsou funkcemi argumentu ε. Funkce (7) představuje levou stranu rovnice (6) s přibližnými poměry ${}^{(0)}\left(\frac{x_i}{x_n}\right)$. Aproximace ${}^{(1)}\varepsilon$ je pak kořenem rovnice ${}^{(1)}\Phi(\varepsilon) = 0$ (viz příklad 1, obr. 2).

Druhá aproximace. 1. Vypočteme hodnoty koeficientů ${}^{(1)}a_{i,k} = f_{i,k}({}^{(1)}\varepsilon)$.

[1] Rovnice (6) není splněna, je-li ${}^{(0)}\varepsilon \neq \varepsilon_0$.

2. Řešením systému nehomogenních rovnic (5) s koeficienty ${}^{(1)}a_{i,k}$ určíme poměry ${}^{(1)}\left(\dfrac{x_i}{x_n}\right)$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$.

3. Sestrojíme graf funkce

$$(8) \qquad {}^{(2)}\Phi(\varepsilon) = {}^{(1)}\left(\frac{x_1}{x_n}\right) a_{n,1} + {}^{(1)}\left(\frac{x_2}{x_n}\right) a_{n,2} + \ldots + {}^{(1)}\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right) a_{n,n-1} + a_{n,n}\,,$$

která představuje levou stranu rovnice (6) s poměry ${}^{(1)}\left(\dfrac{x_i}{x_n}\right)$. U funkce (8) jsou poměry ${}^{(1)}\left(\dfrac{x_i}{x_n}\right)$ konstantami a jen koeficienty $a_{n,k}$ jsou funkcemi argumentu ε. Číslo ${}^{(2)}\varepsilon$, které je kořenem rovnice ${}^{(2)}\Phi(\varepsilon) = 0$, je druhou aproximací vlastního čísla ε_0.

Obecně m-tou aproximaci ${}^{(m)}\varepsilon$ vlastního čísla ε_0 určíme z podmínky, aby hodnota funkce

$$(9) \qquad {}^{(m)}\Phi(\varepsilon) = {}^{(m-1)}\left(\frac{x_1}{x_n}\right) a_{n,1} + {}^{(m-1)}\left(\frac{x_2}{x_n}\right) a_{n,2} + \ldots + {}^{(m-1)}\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right) a_{n,n-1} + a_{n,n}$$

byla rovna nule $({}^{(m)}\Phi({}^{(m)}\varepsilon) = 0)$. Přitom poměry ${}^{(m-1)}\left(\dfrac{x_i}{x_n}\right)$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, určíme řešením rovnic (5) s koeficienty ${}^{(m-1)}a_{i,k} = f_{i,k}({}^{(m-1)}\varepsilon)$, kde ${}^{(m-1)}\varepsilon$ je $(m - 1)$-ní aproximace vlastního čísla ε_0.

Číslo ${}^{(m)}\varepsilon$ aproximuje vlastní číslo ε_0 s dostatečnou přesností, jestliže se od předcházející hodnoty ${}^{(m-1)}\varepsilon$ liší „dostatečně málo".

Vhodnou volbou rovnice (6) ze systému rovnic (1) dosáhneme již při první aproximaxi výsledků dostatečně přesných. Jestliže první aproximace ${}^{(1)}\varepsilon$ je ještě značně odchylná od odhadnuté hodnoty ${}^{(0)}\varepsilon$, je nutné v některých případech určit také druhou aproximaci (viz příklady), po případě ještě další aproximace.

Dříve než pojednáme o tom, jak takovou volbu rovnice (6) provést, demonstrujme uvedený postup řešení na dvou numerických příkladech.

Příklad 1. Určit nejmenší kritické zatížení rámu (obr. 1a), které odpovídá tvaru vybočení charakterisovanému relativním posunem δ koncových průřezů stojek (obr. 1b).

Dáno $k = \dfrac{J_0 h}{J\, l} = 0{,}4$ ($J_0(J)$ je moment setrvačnosti průřezu příčle (stojky), l – délka příčle, h – výška rámu) a poměr sil

$$N_1 : N_2 : N_3 := N_{1,kr} : N_{2,kr} : N_{3,kr} = 2{,}56 : 4 : 1\,,$$

kde $N_{i,kr}$, $i = 1, 2, 3$, jsou hledané kritické osové síly. Označíme-li

$$(10) \qquad \varepsilon_i = h\sqrt{\frac{N_i}{EJ}}\,, \quad i = 1, 2, 3\,,$$

(E je modul pružnosti materiálu) je $\varepsilon_1 = 0{,}8\varepsilon_2$ a $\varepsilon_3 = 0{,}5\varepsilon_2$.

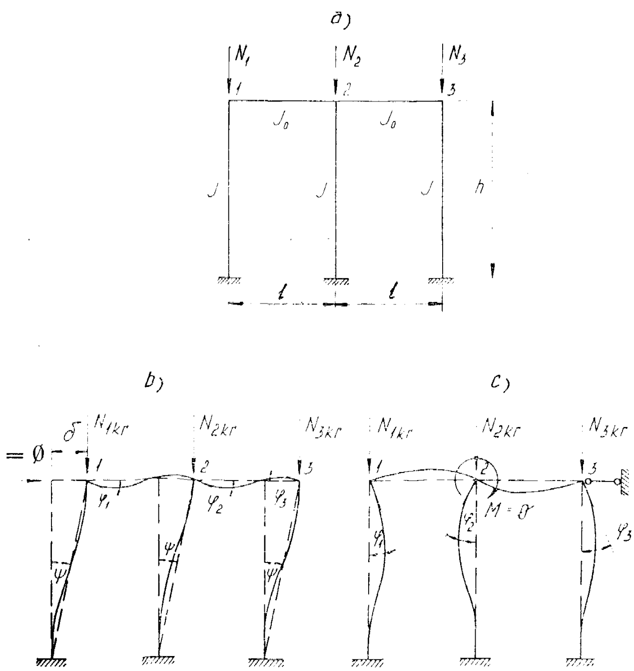
Při použití deformační metody a za předpokladů uvedených v [3] (str. 217) obdržíme ze styčníkových rovnic $\Sigma M = 0$ a z patrové rovnice $\Sigma T = 0$ tuto soustavu rovnic:[2])

(11)

$$\begin{aligned}
&[L_1(\varepsilon_1) + 4k]\,\phi_1 + 2k\phi_2 - L_3(\varepsilon_1)\,\psi = 0\,,\\
&2k\phi_1 + [L_1(\varepsilon_2) + 8k]\,\phi_2 + 2k\phi_3 - L_3(\varepsilon_2)\,\psi = 0\,,\\
&2k\phi_2 + [L_1(\varepsilon_3) + 4k]\,\phi_3 - L_3(\varepsilon_3)\,\psi = 0\,,\\
&L_3(\varepsilon_1)\,\phi_1 + L_3(\varepsilon_2)\,\phi_2 + L_3(\varepsilon_3)\,\phi_3 -\\
&\qquad - [L_4(\varepsilon_1) + L_4(\varepsilon_2) + L_4(\varepsilon_3)]\,\psi = 0\,,
\end{aligned}$$

kde ϕ_i, $i = 1, 2, 3$, jsou úhly pootočení styčníků 1, 2, 3 a ψ úhel pootočení os stojek (obr. 1b); kladný smysl těchto úhlů pootočení je shodný se smyslem otáčení hodinových ručiček. Tyto úhly pootočení jsou neznámými veličinami, které jsou v systému (1) obecně označeny jako x_i.

Výpočet vlastního čísla ε_0 homogenního systému rovnic (11) vede na stanovení kritické hodnoty parametru ε_2, kterou označíme $\varepsilon_{2,kr}$.



Obr. 1.

[2]) Viz označení funkcí $L_j(\varepsilon)$ v [3] na str. 240—241 a příklad na str. 299—300, kde ε je označeno písmenem u.

Dělením rovnic (11) úhlem $\psi \neq 0$ dostáváme tento systém nehomogenních rovnic:

(12)

$$
\begin{aligned}
&[L_1(\varepsilon_1) + 4k]\frac{\phi_1}{\psi} + 2k\frac{\phi_2}{\psi} = L_3(\varepsilon_1)\,,\\
&2k\frac{\phi_1}{\psi} + [L_1(\varepsilon_2) + 8k]\frac{\phi_2}{\psi} + 2k\frac{\phi_3}{\psi} = L_3(\varepsilon_2)\,,\\
&2k\frac{\phi_2}{\psi} + [L_1(\varepsilon_3) + 4k]\frac{\phi_3}{\psi} = L_3(\varepsilon_3)\,,\\
&L_3(\varepsilon_1)\frac{\phi_1}{\psi} + L_3(\varepsilon_2)\frac{\phi_2}{\psi} + L_3(\varepsilon_3)\frac{\phi_3}{\psi} - [L_4(\varepsilon_1) + L_4(\varepsilon_2) +\\
&\qquad + L_4(\varepsilon_3)] = 0\,.
\end{aligned}
$$

První aproximace. Odhadneme ${}^{(0)}\varepsilon_1 = {}^{(0)}\varepsilon_2 = {}^{(0)}\varepsilon_3 = 0\,[L_1(0) = 4, L_3(0) = 6]$ a z prvních tří rovnic (12) ($k = 0{,}4$) určíme poměry ${}^{(0)}\left(\frac{\phi_1}{\psi}\right) = {}^{(0)}\left(\frac{\phi_3}{\psi}\right) = + 0{,}98360$, ${}^{(0)}\left(\frac{\phi_2}{\psi}\right) = + 0{,}61476$. Po dosazení těchto poměrů do levé strany poslední rovnice (12) obdržíme tuto funkci argumentů ε_i, $i = 1, 2, 3$:

$$
{}^{(1)}\Phi(\varepsilon) = 0{,}98360\,[L_3(\varepsilon_1) + L_3(\varepsilon_3)] + 0{,}61476 L_3(\varepsilon_2) - [L_4(\varepsilon_1) + L_4(\varepsilon_2) + L_4(\varepsilon_3)]\,. \tag{13}
$$

Průběh funkce ${}^{(1)}\Phi(\varepsilon)$ je znázorněn pro různé hodnoty ε_2 ($\varepsilon_1 = 0{,}8\varepsilon_2$, $\varepsilon_3 = 0{,}5\varepsilon_2$) na obr. 2.

Nejmenší hodnota první aproximace kritického parametru $\varepsilon_{2,kr}$ je ${}^{(1)}\varepsilon_2 = 3{,}1$ (${}^{(1)}\varepsilon_1 = 0{,}8 \,.\, 3{,}1 = 2{,}48$, ${}^{(1)}\varepsilon_3 = 0{,}5 \,.\, 3{,}1 = 1{,}55$). Protože hodnota ${}^{(1)}\varepsilon_2$ je značně odlišná od odhadnuté hodnoty ${}^{(0)}\varepsilon_2$, určíme ještě druhou aproximaci.

Druhá aproximace. Z tabulek funkcí $L_j(\varepsilon)$ [5][3]) vyhledáme jejich hodnoty pro vypočtená čísla ${}^{(1)}\varepsilon_i$, $i = 1, 2, 3$:

$$
\begin{aligned}
L_1(2{,}48) &= 3{,}1040\,, & L_3(2{,}48) &= 5{,}3562\\
L_1(3{,}1) &= 2{,}5148\,, & L_3(3{,}1) &= 4{,}9650\\
L_1(1{,}55) &= 3{,}6692\,, & L_3(1{,}55) &= 5{,}7552\,.
\end{aligned}
$$

Z prvních tří rovnic (12) určíme po dosazení těchto hodnot přesnější poměry ${}^{(1)}\left(\frac{\phi_1}{\psi}\right) = 1{,}04138$, ${}^{(1)}\left(\frac{\phi_2}{\psi}\right) = 0{,}58276$, ${}^{(1)}\left(\frac{\phi_3}{\psi}\right) = 1{,}00375$. Tyto poměry dosadíme opět do levé strany poslední rovnice (12):

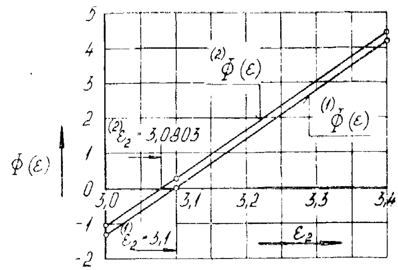
$$
{}^{(2)}\Phi(\varepsilon) = 1{,}04138 L_3(\varepsilon_1) + 0{,}58276 L_3(\varepsilon_2) + 1{,}00375 L_3(\varepsilon_3) - [L_4(\varepsilon_1) + L_4(\varepsilon_2) + L_4(\varepsilon_3)]\,. \tag{14}
$$

---

[3]) V této knize nejsou funkce $L_j(\varepsilon)$ tabelovány přímo, ale jejich násobky.

Pomocí grafu funkce (14) a z podmínky, že ${}^{(2)}\Phi({}^{(2)}\varepsilon) = 0$ (obr. 2) určíme druhou aproximaci vlastního čísla ${}^{(2)}\varepsilon_2 = 3{,}0803$ (${}^{(2)}\varepsilon_1 = 0{,}8\,{}^{(2)}\varepsilon_2 = 2{,}4642$, ${}^{(2)}\varepsilon_3 = 0{,}5\,{}^{(2)}\varepsilon_2 = 1{,}5402$).

Pro posouzení přesnosti obdrženého výsledku jsme určili přesné hodnoty $\varepsilon_{i,kr}$, $i = 1, 2, 3$, z podmínky (2). Determinant systému rovnic (11) při $\varepsilon_2' = 3{,}0$ ($\varepsilon_1' = 0{,}8 \,.\, 3{,}0 = 2{,}4$, $\varepsilon_3' = 0{,}5 \,.\, 3{,}0 = 1{,}5$) má hodnotu $\Delta(\varepsilon') = +\,152{,}247$ a při $\varepsilon_2'' = 3{,}1$ ($\varepsilon_1'' = 2{,}48$, $\varepsilon_3'' = 1{,}55$) má hodnotu $\Delta(\varepsilon'') = -\,35{,}947$. Přesná hodnota vlastního čísla $\varepsilon_{2,kr} = 3{,}0809$ ($\varepsilon_{1,kr} = 2{,}4647$, $\varepsilon_{3,kr} = 1{,}5405$), při níž $\Delta(\varepsilon) = 0$, byla určena lineární interpolací mezi ε_2', $\Delta(\varepsilon')$ a ε_2'', $\Delta(\varepsilon'')$.



Obr. 2.

Je tedy první aproximace ${}^{(1)}\varepsilon_2$ vlastního čísla o 0,62% větší než přesná hodnota $\varepsilon_{2\,kr}$ (odhadli jsme ${}^{(0)}\varepsilon_2 = 0$ značně odchylné od ${}^{(1)}\varepsilon_2 = 3{,}1$) a druhá aproximace ${}^{(2)}\varepsilon_2$ je pouze o 0,02% menší než $\varepsilon_{2,kr}$.

Kritické síly $N_{i,kr}$, $i = 1, 2, 3$, určíme ze vztahu (10):

$$N_{i,kr} \doteq {}^{(2)}\varepsilon_i^2 \frac{EJ}{h^2}\,, \quad i = 1, 2, 3\,. \tag{15}$$

P ř í k l a d 2. Určit nejmenší kritické zatížení rámu (obr. 1a), je-li zabráněno posunu styčníků (obr. 1c). Dané hodnoty jsou stejné jako v příkladě 1.

V tomto případě je $\psi = 0$ a první tři (styčníkové) rovnice (11) po dělení $\phi_2 \neq 0$ a po změně pořadí zní:

$$\begin{aligned}
&[L_1(\varepsilon_1) + 4k]\,\frac{\phi_1}{\phi_2} = -\,2k\,,\\
&[L_1(\varepsilon_3) + 4k]\,\frac{\phi_3}{\phi_2} = -\,2k\,,\\
&2k\left(\frac{\phi_1}{\phi_2} + \frac{\phi_3}{\phi_2}\right) + L_1(\varepsilon_2) + 8k = 0\,.
\end{aligned} \tag{16}$$

Poslední (patrová) rovnice v (11) je na ostatních rovnicích závislá, a proto ji neuvažujeme.

P r v n í a p r o x i m a c e. Odhadneme ${}^{(0)}\varepsilon_1 = {}^{(0)}\varepsilon_2 = {}^{(0)}\varepsilon_3 = 0$ a z prvních dvou rovnic (16) ($L_1(0) = 4$, $k = 0{,}4$) určíme poměry ${}^{(0)}\!\left(\dfrac{\phi_1}{\phi_2}\right) = {}^{(0)}\!\left(\dfrac{\phi_3}{\phi_2}\right) = -\,0{,}14286$.

Dosadíme tyto poměry do poslední rovnice (16). Po malé úpravě ($k = 0{,}4$) obdržíme, že $L_1(\varepsilon_2) = -\,2{,}97142$ a z tabulek funkcí $L_j(\varepsilon)$ [5] vyhledáme přímo hodnotu ${}^{(1)}\varepsilon_2 = 5{,}188$ (${}^{(1)}\varepsilon_1 = 0{,}8 \,.\, 5{,}188 = 4{,}150$, ${}^{(1)}\varepsilon_3 = 0{,}5 \,.\, 5{,}188 = 2{,}594$).

Přesná hodnota vlastního čísla určená z podmínky $\Delta(\varepsilon) = 0$, kde $\Delta(\varepsilon)$ je determinant soustavy prvních tří rovnic (11) ($\psi = 0$), je $\varepsilon_{2,kr} = 5{,}162$ ($\varepsilon_{1,kr} = 4{,}130$, $\varepsilon_{3,kr} = 2{,}581$). Tato hodnota $\varepsilon_{2,kr}$ byla určena lineární interpolací mezi hodnotami $\varepsilon_2' = 5{,}16$, $\Delta(\varepsilon') = +\,0{,}118$ a $\varepsilon_2'' = 5{,}20$, $\Delta(\varepsilon'') = -\,2{,}846$. I když jsme odhadli hodnotu ${}^{(0)}\varepsilon_2 = 0$ značně odchylnou od ${}^{(1)}\varepsilon_2 = 5{,}188$[4], obdrželi jsme již při první aproximaci výsledek téměř přesný (${}^{(1)}\varepsilon_2$ je jen o 0,5% větší než $\varepsilon_{2,kr}$). Kritické síly $N_{i,kr}$, $i = 1, 2, 3$, určíme ze vztahu (10): $N_{i,kr} \doteq {}^{(1)}\varepsilon_i^2 \dfrac{EJ}{h^2}$, $i = 1, 2, 3$.

3. O VHODNÉ VOLBĚ ROVNICE (6)

Obecně můžeme volit rovnici (6) ze systému rovnic (1) (po transformaci na nehomogenní systém) zcela libovolně. Známe-li přesné hodnoty poměrů $\dfrac{x_i}{x_n}$, můžeme určit přesnou hodnotu vlastního čísla ε_0 z kterékoli rovnice systému (5) nebo z rovnice (6).

Kdybychom odhadli hodnotu ${}^{(0)}\varepsilon$ blízkou přesné hodnotě vlastního čísla ε_0, určili bychom z libovolných $(n-1)$ rovnic systému (1) již při první aproximaci všech $(n-1)$ poměrů ${}^{(0)}\left(\dfrac{x_i}{x_n}\right)$ blízkých k jejich správným hodnotám $\dfrac{x_i}{x_n}$. Po dosazení těchto poměrů do levé strany zbývající (transformované) n-té rovnice systému (1) obdrželi bychom funkci ${}^{(1)}\Phi(\varepsilon)$ a z podmínky ${}^{(1)}\Phi({}^{(1)}\varepsilon) = 0$ určili bychom první aproximaci ${}^{(1)}\varepsilon$, jejíž hodnota by se velmi málo lišila od přesné hodnoty ε_0.

Ve skutečnosti však odhadnutá hodnota ${}^{(0)}\varepsilon$ se bude více nebo méně lišit od přesné hodnoty ε_0. Chceme-li již při první nebo druhé aproximaci obdržet výsledek co nejpřesnější, a to i v případě, když rozdíl ${}^{(0)}\varepsilon - \varepsilon_0$ je značný, musíme provést volbu rovnice (6) s hlediska fysikálního významu uvedeného postupu výpočtu.

Tak např. u úlohy řešené v příkladě 1 je při hodnotách ${}^{(0)}\varepsilon_i \neq \varepsilon_{i,kr}$ (${}^{(1)}\varepsilon_i \neq \varepsilon_{i,kr}$) determinant z koeficientů při neznámých ϕ_i, $i = 1, 2, 3$ a ψ systému rovnic (11) různý od nuly. Proto musí alespoň jedna rovnice systému (11) byt nehomogenní, mají-li být úhly ϕ_i, $i = 1, 2, 3$ a ψ různé od nuly a mají-li mít poměry ${}^{(0)}\left(\dfrac{\phi_i}{\psi}\right)$, ${}^{(1)}\left(\dfrac{\phi_i}{\psi}\right)$ určité hodnoty, kterých při výpočtu používáme. Poněvadž přibližné poměry ${}^{(0)}\left(\dfrac{\phi_i}{\psi}\right)$ a ${}^{(1)}\left(\dfrac{\phi_i}{\psi}\right)$ jsme určili z prvních tří rovnic systému (12), které vznikly transformací prvních tří (styčníkových) rovnic (11), které jsou homogenní, musí mít poslední

---

[4]) Poznamenejme, že kritická hodnota parametru $\varepsilon_{2,kr}$, která odpovídá nejmenšímu kritickému zatížení vyšetřovaného rámu, může být maximálně rovna $2\pi = 6{,}283$ ($\varepsilon_{2,kr} = 2\pi$ platí pro rám s absolutně tuhými příčli ($J_0 = \infty$), tj. pro prut na obou koncích dokonale vetknutý).

(patrová) rovnice systému (11) absolutní člen $A \neq 0$. Avšak takové rovnice platí pro rám zatížený vodorovnou silou $H = A \frac{EJ}{h^2}$, která působí v úrovni příčlů (obr. 1b). Protože již při první aproximaci, t. j. při ${}^{(0)}\varepsilon_1 = {}^{(0)}\varepsilon_2 = {}^{(0)}\varepsilon_3 = 0$ ($N_1 = N_2 = N_3 = 0$) jsou deformace rámu od síly H podobné tvaru vybočení [4] charakterisovanému posunem δ styčníků a příslušnému nejmenšímu kritickému zatížení, jsou také i poměry ${}^{(0)}\left(\frac{\phi_i}{\psi}\right)$, $i = 1, 2, 3$, od síly H nepříliš odlišné od poměrů $\frac{\phi_i}{\psi}$ příslušných tvaru vybočení rámu.

Pomocí takto určených poměrů ${}^{(0)}\left(\frac{\phi_i}{\psi}\right)$ určujeme vlastní číslo z patrové rovnice, ve které položíme $A = 0$ ($H = 0$), tj. uvažujeme stav, který nastane při rozvětvení rovnováhy konstrukce. Určené poměry ${}^{(1)}\left(\frac{\phi_i}{\psi}\right)$ při druhé aproximaci odpovídají zatížení rámu vodorovnou silou $H \neq 0$ a osovými silami $N_i = {}^{(1)}\varepsilon_i^2 \frac{EJ}{h^2}$, $i = 1, 2, 3$.

Obdobně jsme při výpočtu vlastního čísla $\varepsilon_{2,kr}$, které odpovídá tvaru vybočení podle obr. 1c (příklad 2), předpokládali, že tvar vybočení je podobný deformaci rámu zatíženého momentem M ve styčníku 2. Proto za rovnici (6) byla zvolena styčníková rovnice pro styčník 2.

Obecně tedy platí, že při výpočtu kritického zatížení konstrukcí metodou deformační je výhodné za rovnici (6) volit takovou rovnici systému (1), jejíž pravá strana by představovala zatěžovací stav,[5]) při kterém by byly deformace konstrukce podobné uvažovanému tvaru vybočení.

Při výpočtu vlastních frekvencí konstrukcí metodou deformační je výhodné za rovnici (6) volit takovou rovnici, jejíž pravá strana by představovala amplitudu harmonicky proměnného zatížení s určitou frekvencí ω, od kterého tvar ustáleného vynuceného kmitání by byl podobný tvaru vlastního kmitání konstrukce. V krajním případě, kdy frekvence $\omega = 0$, pravá strana zvolené rovnice by představovala statické zatížení.

Literatura

[1] *Bleich F.:* Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill Book Company, Inc. New York, 1952.

[2] *Koloušek V.:* Dynamika stavebních konstrukcí II, SNTL, Praha, 1956.

[3] *Лейтес С. Д.:* Устойчивость сжатых стальных стержней, Госстройиздат, Москва, 1954.

[4] *Sattler K.:* Das Durchbiegungsverfahren zur Lösung von Stabilitätsproblemen, Bautechnik, H. 10, 1953.

[5] *Смирнов А. Ф.:* Устойчивость и колебания сооружений, Трансжелдориздат, Москва, 1958.

[5]) U pravoúhlých rámů bude to vodorovná síla působící v úrovni jednoho patra nebo moment působící v jednom styčníku.

Резюме

ИСЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ НА ОСНОВАНИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

ВЛАДИМИР ФИРСТ (Vladimír Fiřt)

При применении самых распространенных методов (метод деформаций, метод сил, интегрирование дифференциальных уравнений, метод Ритца, Галеркина и другие) k исследованию устойчивости и собственных частот строительных конструкций мы встречаемся с задачей определить собственное значение ε_0 однородной системы (1) n алгебраических уравнений, линейных относительно неизвестных x_i, $i = 1, 2, \dots, n$, где коэффициенты $a_{i,k} = f_{i,k}(\varepsilon)$ являются данными функциями аргумента ε.

Итерационный метод для определения числа ε_0, которое удовлетворяет соотношениям (2), (3), излагаемый в этой статье, основан на преобразовании однородной системы (1) в неоднородную систему уравнений путем деления каждого уравнения (1) на одну неизвестную $x_r \neq 0$.

Общий путь расчета таков.

Деля уравнения системы (1), напр. на $x_n \neq 0$, получим неоднородную систему $(n - 1)$ уравнений (5) и уравнение (6). Исчисление ε_0 из уравнений (5) и (6) произведено методом последовательных приближений.

1. За приближение нулевого порядка собственного числа ε_0 берем избранное число ${}^{(0)}\varepsilon$ и вычисляем значения коэффициентов ${}^{(0)}a_{i,k} = f_{i,k}({}^{(0)}\varepsilon)$.

2. Подставляя коэффициенты ${}^{(0)}a_{i,k}$ в уравнения (5) и решая эти уравнения, определяем отношения ${}^{(0)}\left(\frac{x_i}{x_n}\right)$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

3. Построим график функции (7) аргумента ε. Приближение ${}^{(1)}\varepsilon$ тогда является корнем функции (7) (см. рис. 2).

Вообще m-ое приближение ${}^{(m)}\varepsilon$ собственного значения ε_0 мы определим из уравнения ${}^{(m)}\Phi(\varepsilon) = 0$, где ${}^{(m)}\Phi(\varepsilon)$ — функция (9). Притом отношения ${}^{(m-1)}\left(\frac{x_i}{x_n}\right)$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$, мы определим из уравнений (5) с коэффициентами ${}^{(m-1)}a_{i,k} = f_{i,k}({}^{(m-1)}\varepsilon)$, где ${}^{(m-1)}\varepsilon$ является $(m - 1)$-ым приближением числа ε_0.

Этот метод оказывается выгодным и в тех случаях, когда определитель (3) имеет высокий порядок и определение ε_0 из условия (2), исключительно применяемого в литературе, становится чрезмерно затруднительным.

В статье при помощи этого метода исследованы критические нагрузки двухпролетной рамы со смещающимися и несмещающимися узлами (рис. 1).

В последнем параграфе этой статьи показано, как на основании физического значения процесса вычисления подходящим способом избрать уравнение (6) из системы (1), чтобы получить первое или второе приближение числа ε_0 достаточно точное.

Résumé

CALCUL DES VALEURS PROPRES SUR LA BASE D'UNE TRANSFORMATION D'UN SYSTÈME HOMOGÈNE D'ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

VLADIMÍR FIŘT

En appliquant les méthodes les plus connues (méthode des déformations, méthode des forces, intégration d'équations différentielles, méthode de Ritz, de Galerkin etc.) pour examiner la stabilité et les fréquences propres des constructions d'ouvrages d'art, on rencontre le problème de la détermination de la valeur propre ε_0 d'un système homogène (1) de n équations algébriques, linéaires par rapport aux inconnues x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, où les coefficients $a_{i,k} = f_{i,k}(\varepsilon)$ sont des fonctions données de l'argument ε.

La méthode iterative pour déterminer le nombre ε_0, vérifiant les relations (2), (3), qui fait l'objet du présent article, est fondée sur une transformation du système homogène (1) en un système d'équations non-homogène. Cette transformation réside en ce qu'on divise chaque équation (1) par une des inconnues $x_r \neq 0$.

Voici le procédé général de calcul.

En divisant les équations du système (1), p. ex. par $x_n \neq 0$, on obtient le système non-homogène de $(n - 1)$ équations (5) et l'équation (6). Le calcul de ε_0 par les équations (5) et (6) a été effectué moyennant la méthode des approximations successives.

1. Comme valeur approximative de l'ordre zéro de la valeur propre ε_0 on prend un nombre choisi ${}^{(0)}\varepsilon$ et l'on calcule les valeurs des coefficients ${}^{(0)}a_{i,k} = f_{i,k}({}^{(0)}\varepsilon)$.

2. En substituant les coefficients ${}^{(0)}a_{i,k}$ dans les équations (5) et en résolvant ces équations, on détermine les rapports ${}^{(0)}\left(\dfrac{x_i}{x_n}\right)$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$.

3. On construit un diagramme de la fonction (7) de l'argument ε. L'approximation ${}^{(1)}\varepsilon$ sera alors racine de la fonction (7) (voir fig. 2).

En général, on détermine la m-ième approximation ${}^{(m)}\varepsilon$ de la valeur propre ε_0 par l'équation ${}^{(m)}\Phi(\varepsilon) = 0$, où ${}^{(m)}\Phi(\varepsilon)$ est la fonction (9).

Cela étant, on détermine les rapports ${}^{(m-1)}\left(\dfrac{x_i}{x_n}\right)$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, par les équa-

tions (5) aux coefficients ${}^{(m-1)}a_{i,k} = f_{i,k}({}^{(m-1)}\varepsilon)$, où ${}^{(m-1)}\varepsilon$ est la $(m - 1)$-ième approximation de ε_0.

Cette méthode est avantageuse aussi dans les cas où le déterminant (3) est d'un ordre élevé et la détermination de ε_0 par la condition (2), employée exclusivement en littérature, devient excessivement onéreuse.

Dans l'article on a utilisé cette méthode pour calculer les charges critiques d'un portique à deux travées avec noeuds déplaçables et fixes (fig. 1).

Dans le dernier alinéa de cet article on démonstre comment, en prenant pour point de départ la signification physique du procédé de calcul, il faut choisir de façon convenable l'équation (6) du système (1) pour obtenir la première ou la deuxième approximation de ε_0 suffisamment exacte.