Aplikace matematiky

Ludvík Prouza

Poznámka k jedné formuli o „vzorkovaných“ funkcích

Aplikace matematiky, Vol. 5 (1960), No. 6, 453–457

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102731

POZNÁMKA K JEDNÉ FORMULI O „VZORKOVANÝCH“ FUNKCÍCH

LUDVÍK PROUZA

(Došlo dne 17. září 1959)

V článku se vyšetřuje platnost jedné důležité formule, známé z teorie diskrétní Laplaceovy transformace a lineárních impulsních filtrů.

ÚVOD

V této poznámce se budeme zabývat jistým zobecněním důležité formule

$$R^*(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(s + 2\pi i n) , \tag{1}$$

kde $R(s)$ je Laplaceova transformace nějaké funkce $r(t)$ a $R^*(s)$ je diskrétní Laplaceova transformace „vzorkované“ posloupnosti $\{r(n)\}$.

Důkaz formule (1) má dlouhou historii; podrobný seznam příslušných pramenů, obsahujících též aplikace formule, najde čtenář v [6], [7].

1. NĚKOLIK PŘEDBĚŽNÝCH POZNÁMEK

Budiž t reálné (v aplikacích značí čas). Budiž $k = 0, 1, 2, \ldots$. Nechť $r(t)$ je reálná funkce, splňující podmínky

1. $r(t) = 0$ pro $t < 0$,
2. $r(t)$ má Riemannův integrál v každém konečném intervalu,
3. $|r(t)| < A e^{\alpha t}$ pro $t \geq 0$ a nějaké $A > 0$, $\alpha > 0$.

Nechť s je komplexní. Laplaceova transformace

$$R(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, r(t)\, \mathrm{d}t \tag{2}$$

funkce $r(t)$, jak známo, existuje pro s splňující podmínku $\operatorname{Re} s > s_0 > \alpha$. Nechť $\tau \in \langle 0, 1 \rangle$. Z 3. plyne existence zobecněné diskrétní Laplaceovy transformace

$$R^*(s, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-s(\tau+k)}\, r(\tau + k) , \tag{3}$$

a protože

$$(4)\qquad \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mathrm{Re}\,s(\tau+k)}|r(\tau+k)| \leqq Ae^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-(s_0-\alpha)k} < \infty\,,$$

konverguje řada v (3) absolutně a stejnoměrně pro $\tau \in \langle 0, 1\rangle$. Vzhledem k 2. existuje Riemannův integrál $\int_0^1 R^*(s, \tau)\,\mathrm{d}\tau$. Rozšiřme definici $R^*(s, \tau)$ na všechna reálná τ tak, že $R^*(s, \tau)$ bude periodická s periodou 1. Zřejmě k $R^*(s, \tau)$ můžeme vytvořit Fourierovu řadu

$$(5)\qquad R^*(s, \tau) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{2\pi i m\tau}\,,$$

kde

$$(6)\quad c_m = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(s+2\pi i m)(\tau+k)} r(\tau+k)\,\mathrm{d}\tau = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 e^{-(s+2\pi i m)(\tau+k)} r(\tau+k)\,\mathrm{d}\tau = R(s+2\pi i m)\,.$$

Oprávněnost záměny integrace a sumace v (6) plyne ze stejnoměrné konvergence řady v (3).

2. DVĚ VĚTY O KONVERGENCI

Věta 2,1. *Nechť funkce $r(t)$ splňuje podmínky 1., 2., 3., nechť $u > 0$ a nechť pro každé t existuje*

$$(7)\qquad \lim_{u\to 0}\frac{r(t+u)+r(t-u)}{2}\,.$$

Nechť ϱ je reálné, $0 < \varrho < 1$. Pak pro každé τ

(8)

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-s(\tau+k)} \lim_{u\to 0}\frac{r(\tau+k+u)+r(\tau+k-u)}{2} = \lim_{\varrho\to 1}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\varrho^{|m|}R(s+2\pi i m)e^{2\pi i m\tau}\,.$$

Důkaz: Existuje

$$(9)\qquad \lim_{u\to 0}\frac{R^*(s,\tau+u)+R^*(s,\tau-u)}{2} = \lim_{u\to 0}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-s(\tau+k)}\frac{e^{-us}r(\tau+k+u)+e^{us}r(\tau+k-u)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-s(\tau+k)}\lim_{u\to 0}\frac{r(\tau+k+u)+r(\tau+k-u)}{2}\,,$$

kde přechod od prostředního výrazu k výrazu vpravo plyne ze stejnoměrné konvergence řady v (3) a existence limity v (7). Odtud plyne, že Fourierova řada v (5) má Abel-Poissonův součet (9), tj. plyne (8).

Kdybychom nepředpokládali platnost podmínky (7), plyne už z integrovatelnosti $R^*(s, \tau)$ dle Riemanna, že (8) platí skoro všude, ježto, jak známo, množina bodů nespojitosti $R^*(s, \tau)$ má Lebesgueovu míru 0. To však z hlediska aplikací má malý význam, naopak, z hlediska aplikací je důležitá otázka konvergence řady v (5) v obyčejném smyslu (tj. ve smyslu $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{m=-N}^{N}$).

Věta 2,2. *Nechť* $T \geqq 0$. *Nechť* $r(t)$ *splňuje* 1., 2., 3. *a má omezenou variaci v intervalu* $\langle 0, T\rangle$, *nechť existuje* $r'(t)$ *pro* $t \geqq T$. *Nechť* $\int\limits_T^\infty \exp(-st)\, r'(t)\, dt$ *konverguje pro nějaké reálné* $s_0 > 0$ *a je omezený pro* $\operatorname{Re} s > s_0$. *Potom řada v* (5) *konverguje v obyčejném smyslu.*

Důkaz: Podle jedné Doetschovy věty (viz [2], s. 198, věta 9) platí za podmínek věty 2,2 $R(s) = O\left(\frac{1}{|s|}\right)$ pro $s \to \infty$ stejnoměrně v $\operatorname{Re} s > s_0$. Speciálně tedy $R(s + 2\pi i m) = O\left(\frac{1}{m}\right)$ pro pevně zvolené s. Dále za podmínek věty 2,2 platí věta 2,1, tj. platí (8). Na základě jedné Littlewoodovy věty (viz [3], s. 501) platí tedy tvrzení věty 2,2.

3. SPECIÁLNÍ PŘÍPAD PŘENOSOVÉ FUNKCE LINEÁRNÍHO FILTRU

Nechť je dán lineární filtr se soustředěnými parametry s přenosovou funkcí

$$W(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}, \tag{10}$$

kde $P(s)$ *a* $Q(s)$ *jsou polynomy a stupeň* $P(s)$ *je aspoň o* 1 *nižší než stupeň* $Q(s)$. *Označme* $w(t)$ *impulsní odezvu (váhovou funkci) filtru. Potom*

$$\frac{1}{2}\, w(0+) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-sk} w(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} W(s + 2\pi i m). \tag{11}$$

Důkaz: Jak známo, $w(t)$ má jediný konečný skok v bodě $t = 0$, je-li stupeň $P(s)$ právě o 1 nižší než stupeň $Q(s)$, jinak je spojitá, splňuje 1., 2., 3., má derivaci a platí pro ni věta 2,2, jak plyne např. z [2], s. 138. Pro $\tau = 0$ dostáváme tedy z (3), (5), (6) ihned (11) (s $r(t) = w(t)$, $R(s) = W(s)$).

Je-li $w(0+) = 0$, dostáváme z (11) formuli (1).

ZÁVĚR

V článku jsme ukázali zobecnění formule (1) (vzorec (8)); dále jsme ukázali, že pro funkce $r(t)$, vyskytující se v aplikacích, řada (5) konverguje v obyčejném smyslu; speciálně pro přenosové funkce lineárních filtrů tvaru (10) platí

(11) v obyčejném smyslu. Je-li $w(0+) \neq 0$, je $W(s + 2\pi i m)$ právě řádu $O\left(\frac{1}{m}\right)$, jak plyne např. z [4], s. 458—461 (nebo přímo z (10)). Řada vpravo v (11) konverguje v tomto případě pomalu, takže např. grafické konstrukce na ní založené, popsané v literatuře (např. [5]), jsou patrně málo přesné.

Literatura

[1] *Doetsch G.:* Der Zusammenhang zwischen der Laplace-Transformierten einer Funktion und der zugeordneten Treppenfunktion. Regelungstechnik, März 1957, s. 86—88.

[2] *Doetsch G.:* Theorie and Anwendung der Laplace-Transformation. Springer, Berlin 1937.

[3] *Knopp K.:* Theory and Application of Infinite Series. Blackie & Son, London 1957.

[4] *Смирнов В. И.:* Курс высшей математики. Том II, ГИТТЛ, Москва 1956.

[5] *Linvill W. K.:* Sampled Data Control Systems Studied through Comparison of Sampling with Amplitude Modulation. Trans. AIEE, 1951, Pt II, s. 1779—1788.

[6] *Prouza L.:* Bemerkungen zur Theorie und Literatur über die linearen Impuls-Regelsysteme. Regelungstechnik, Mai 1960, s. 162—167.

[7] *Prouza L.:* Poznámka o přenosové funkci lineárního impulsního filtru. Má vyjít v Souhrnu prací o automatizaci 1959.

Резюме

ПРИМЕЧАНИЕ К ОДНОЙ ФОРМУЛЕ О „ВЫБРАННЫХ“ ФУНКЦИЯХ

ЛЮДОВИК ПРОУЗА (Ludvík Prouza)

В статье исследуется некоторое обобщение важной формулы

$$R^*(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(s + 2\pi i n)\,, \tag{1}$$

где $R(s)$ означает преобразование Лапласа некоторой функции $r(t)$, а $R^*(s)$ — дискретное преобразование Лапласа „выбранной“ последовательности $\{r(n)\}$.

Подробный список литературы к истории доказательства формулы (1) и различным применениям найдется в [6], [7].

Summary

NOTE ON A FORMULA ON "SAMPLED" FUNCTIONS

LUDVÍK PROUZA

In this paper a generalization of the important formula

$$R^*(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(s + 2\pi i n) \tag{1}$$

is investigated, where $R(s)$ is the Laplace transform of a function $r(t)$ and $R^*(s)$ is the discrete Laplace transform of the "sampled" sequence $\{r(n)\}$.

A fairly complete bibliography concerning the history of proof of this formula and its various applications can be found in [6], [7].