Pavel Šlapák

Základní problémy teorie plasticity

Aplikace matematiky, Vol. 5 (1960), No. 5, 319–340

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102720

ČLÁNKY

ZÁKLADNÍ PROBLÉMY TEORIE PLASTICITY

Pavel Šlapák

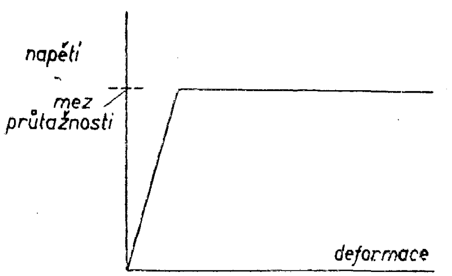
(Došlo dne 30. dubna 1959.)

Práce je přehledným článkem o nových výsledcích matematické teorie plasticity. Zvláštní pozornost se věnuje energetickým metodám a úlohám, majícím význam pro praxi.

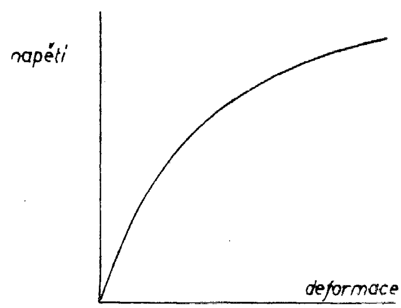
1. ÚVOD — VLASTNOSTI PLASTICKÝCH TĚLES

Na začátku bude užitečné říci něco o rozdělení problémů teorie plasticity na základě různých hledisek.

Nejdříve začneme materiálem. Abychom měli na mysli něco konkrétního, mluvme třeba o závislosti mezi napětím a deformací při zkoušce prutu na tah.



Obr. 1a.



Obr. 1b.

V podstatě se v teorii plasticity pracuje jednak s materiálem, který se chová ideálně plasticky (tím se rozumí, že při postupném zatěžování lze zmíněnou závislost vyjádřit dosti přesně způsobem uvedeným na obrázku 1a), jednak s materiálem, kde při rostoucí deformaci dochází ke zpevnění (obr. 1b). Podobné diagramy také dostaneme i pro obecnější případy. Obrázky 1a, b mohou pak představovat také závislost mezi tzv. zobecněným napětím a zobecněnou deformací u těles obecného tvaru a při složitějším způsobu namáhání. O tom bude mluveno níže.

Nyní se budeme nejprve zabývat teorií ideálně plastického tělesa. Tato teorie je podstatně více rozpracována než teorie tělesa s existujícím zpevněním materiálu. Ve stadiu, kdy v daném bodě může deformace mít první plastické přírůstky, jsou zde složky napětí vázány rovnicí, která se nazývá podmínkou plasticity. Podobně jako pružné konstanty má i podmínka plasticity experimentální základ, z něhož vychází její matematická formulace. K faktu, že tato podmínka je formulována ve složkách napětí, ačkoli znamená kvalitativní změnu vzhledem k přírůstkům deformace, se ještě vrátíme. Další závažné rovnice — tzv. fysikální vztahy — udávají závislost mezi složkami napětí a deformace resp. jejich přírůstky. Na rozdíl od teorie pružnosti není obecně tato závislost vzájemně jednoznačná. Různá zpracování teorie plasticity se liší navzájem právě různou formulací podmínky plasticity a fysikálních vztahů.

Druhým případem, jímž se v teorii plasticity zabýváme, je těleso, kde dochází ke zpevnění materiálu při rozvíjení deformací. Podmínka plasticity — ve smyslu uvedeném u prvního druhu těles — se zde přímo neformuluje, i když lze napsat jí obdobné rovnice, jež se však mění se vzrůstajícím zatížením. Za předpokladů vzhledem k zatížení, jež užívají někteří autoři, shoduje se v případě zatěžování teorie plastického tělesa „se zpevněním" s teorií nelineárně pružného tělesa. Jako v případě plastického tečení formulujeme i u tělesa se zpevněním obdobné fysikální rovnice. Dále se v obou případech počítá s tělesem isotropickým, jež je před zatěžováním v přirozeném, nenapjatém stavu. O důležitosti historie zatěžování bude zmínka níže.

Nyní budeme mluvit o členění úloh z hlediska velikosti deformací. Konkrétně budeme mít na mysli ideálně plastické těleso „bez zpevnění".

Podle toho, jak je pokročilá plastická deformace, rozeznáváme úlohy o plastickém tečení (nebo tzv. neomezených plastických deformacích) a úlohy o malých pružně-plastických deformacích. První případ se vyznačuje tím, že velikost plastické části deformace převyšuje velikost části pružné do té míry, že hodnoty pružné deformace mohou být zanedbány vedle hodnot deformace plastické. Tímto typem úloh se zabývá mnoho autorů a byla mu věnována velká pozornost zvláště ve speciálním případě při tzv. rovinné deformaci, o níž se bude dále mluvit. Pokud se v tělese vedle oblastí s pokročilým plastickým tečením vyskytují také oblasti pružné, jsou ve smyslu zanedbání pružných deformací považovány za dokonale tuhé a mluví se pak o koncepci tuho-plastického tělesa.

Při velkých plastických deformacích je výhodné pracovat místo s hodnotami deformací s hodnotami rychlostí deformace. Při počítání s deformacemi je totiž třeba vyjádřit jejich hodnoty vzhledem k jistému známému počátečnímu stavu deformací (např. nedeformovanému tělesu) a tyto relativní hodnoty mohou dosáhnout takové velikosti, že je třeba počítat s vyššími derivacemi přemístění podle souřadnic a ne jen s prvními parciálními derivacemi, jak je tomu při malých deformacích. Tím by se rovnice natolik zkomplikovaly, že jejich aplikace na konkrétní problémy by měla malou naději na úspěch.

Rychlosti deformací můžeme počítat jednak jako derivace deformací podle času, jednak můžeme rychlosti deformace vztahovat přímo k okamžitému stavu deformovaného tělesa, takže nepotřebujeme žádnou pomocnou základnu k odčítání relativních hodnot deformace. Tento druhý způsob dává mnohem jednodušší vztahy. Rozdíl je tu jen při velkých deformacích, při malých deformacích vedou oba způsoby určení rychlosti deformací na stejné výsledky.

Při plastickém tečení lze za určitých předpokladů určit v tělese celkem snadno polohu plošek, podle nichž působí tangenciální napětí maximální a přitom konstantní velikosti. Potom rozbor stavu napětí a rychlostí deformací nečiní obvykle již obtíží. Úlohy o plastickém tečení byly zkoumány mnoha autory pro rovinný stav deformace a rovinný stav napjatosti. Zvláště pro prvý případ je teorie hodně propracována.

Podstatně složitější je situace u druhého typu úloh ideálně plastického tělesa. Tento druhý případ — při dělení podle velikosti deformací — je charakterisován skutečností, že pružné a plastické deformace mají velikost „stejného řádu". Takový typ úloh je právě pro stavební praxi nejdůležitější, neboť tvoří přechod mezi situací, kdy těleso je namáháno jen pružně, a stavem, kdy těleso (nebo jeho část) je ve stavu plastického tečení a z hlediska konstruktivního je již nepotřebné.

Je-li např. na povrchu tělesa dáno zatížení jako monotonní funkce jednoho parametru t, je až do určité hodnoty t_0 tohoto parametru těleso ve stavu pružném. Pro hodnoty větší než t_0 vznikne jedna nebo několik plastických oblastí, a tak existuje jistá hranice, jež odděluje od sebe pružnou a plastickou oblast.

Při dalším zvětšování t může postupně dojít k zplastizování celého tělesa. Dostáváme stav „počínajícího plastického tečení" s omezenými plastickými deformacemi, za nímž následuje případ neomezeného plastického tečení, o němž jsme se již zmínili. Jest však třeba počítat i s možností, že k plastickému tečení může dojít jen v části tělesa, jehož zbývající část je ještě ve stavu pružném. V obou případech je stav počínajícího plastického tečení charakterisován tím, že při jisté konstantní hodnotě $t = t_1$ je možné další narůstání deformace, tj. nastupuje plastické tečení tělesa nebo jeho části. Hodnota t_1 vede pak na hodnotu mezního zatížení, které bychom potřebovali znát [1, 7, 12].

Obecné metody pro určení hranice mezi pružnou a plastickou oblastí zatím nejsou. Podařilo se tuto hranici určit v případech, kdy předem známe její tvar (osově symetrické roury s konstantním přetlakem apod.) [6, 18, 33] a v některých dalších specálních úlohách (prosté kroucení apod.). Jsou však vypracovány metody, které dávají v určitých případech odhad pro hodnotu mezního zatížení, aniž by zkoumaly předchozí pružně plastický stav [33]. Těmito metodami se budeme zabývat v další části tohoto článku.

To, co zde bylo zatím řečeno, mělo mít informativní charakter, a v dalším bude třeba definovat několik pojmů a připomenout některé základní rovnice matematické teorie pružnosti, aby bylo možno hovořit přesněji.

2. ZÁKLADNÍ ROVNICE TEORIE PLASTICITY

Nejdříve zavedeme označení. Uvažované těleso vztahujeme k zvoleným přímým pravoúhlým osám a body tělesa označíme stejně jako jejich souřadnice — totiž x_i. Rovněž složky uvažovaných vektorů a tensorů označíme stejně jako příslušné vektory a tensory. Podle toho znamená

u_i vektor přemístění,
v_i vektor rychlosti přemístění,
p_i vektor vnějšího spojitého zatížení,
n_i vektor jednotkové vnější normály (a tedy i směrové kos.),
I jednotkový tensor,
ε_{ij} tensor deformace,
σ_{ij} tensor napětí,
e_{ij} deviátor deformace,
s_{ij} deviátor napětí,

(pokud není jinak uvedeno je $i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3$).

Dále označujeme střední napětí jako σ, kde

$$\sigma = \tfrac{1}{3}\sigma_{ii}$$

a střední deformaci jako ε, při čemž $\varepsilon = \frac{1}{3}\varepsilon_{ii}$. Čas označujeme t. Změnu teploty a objemovou váhu těles nebudeme zde uvažovat. Uvedené pojmy potřebují některá vysvětlení:

Tensor deformace se obvykle rozkládá na tensor deformace objemové a tvarové. Složky prvého tensoru charakterisují objemovou změnu uvažovaného elementu, složky druhého tensoru — který se nazývá deviátorem deformace — popisují tvarovou změnu elementu při konstantním objemu. Platí tedy

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon \,.\, I + e_{ij}\,.$$

Podobně rozkládáme také tensor napětí, takže deviátor napětí, jenž obsahuje složky napětí způsobující tvarovou změnu elementu, je definován rovnicí

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma I\,.$$

Při rychlosti deformací užíváme označení $\dot{\varepsilon}_{ij}$, tzv. časové změny napětí značíme $\dot{\sigma}_{ij}$ apod. Pro malé deformace platí známé vztahy

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right).$$

Další úmluvy ohledně označení budou uvedeny na příslušném místě v textu.

Nyní můžeme přistoupit k formulaci základních rovnic. Především z teorie pružnosti budeme potřebovat diferenciální rovnice rovnováhy na elementu

(1) $$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{čili div } \sigma_{ij} = 0)$$

a statické okrajové podmínky

(2) $$p_i = \sigma_{ij} n_j .$$

Upozorňujeme, že i podmínky spojitosti deformací — tzv. podmínky kompaktibility — zůstávají v platnosti i v teorii plasticity, pokud jsou ovšem vyjádřeny ve složkách deformací a uvažují správně jejich velikost.

Zbývají tedy ještě fysikální rovnice, které v teorii pružnosti jsou vyjádřeny zobecněným Hookeovým zákonem, který se píše např. ve tvaru

(3) $$s_{ij} = 2Ge_{ij} ,$$

kde G je modul pružnosti ve smyku.

Je vhodné ve vztazích (3) zavést rychlosti napětí a deformace, protože ve fázi pružně plastické navazují na Hookeův zákon složitější fysikální vztahy, jež pracují obvykle s přírůstky (rychlostmi) deformace.

Zkouškami bylo prokázáno, že objemová deformace elementu na rozdíl od deformace tvarové je záležitost téměř výhradně pružná, a tak všechny teorie plasticity zanedbávají plastickou část ε.

Další užívané zjednodušení u fysikálních vztahů spočívá u některých autorů v tom, že zanedbávají objemovou deformaci vůbec. Počítají tedy s tělesy „nestlačitelnými“.

Konečně ještě větší zjednodušení fysikálních vztahů znamená zanedbání pružných částí složek deformace vůbec — tedy nejen u deformace objemové, ale i u deformace tvarové. To je možné v takových případech, kdy ve srovnání s plastickými deformacemi jsou pružné deformace velmi malé.

V dalším se budeme odvolávat na tyto nejužívanější fysikální rovnice (jež ovšem platí teprve od vzniku prvých plastických deformací):

Rovnice Prandtl-Reussovy mají tvar [33, 11]

(4) $$2G\dot{e}_{ij} = \dot{s}_{ij} + \lambda s_{ij} , \quad (\dot{\varepsilon} = \text{konst} \, . \, \dot{\sigma}) ,$$

kde λ je jistý kladný skalární součinitel závislý na t a x_i. Tyto fysikální vztahy uvažují všechny druhy pružné deformace. Plastické části složek deformace jsou závislé od stanovení funkce λ. Použijeme-li totiž rozdělení $\dot{e}_{ij}$ na část pružnou a plastickou, tj.

$$\dot{e}_{ij} = \dot{e}_{ij}^{\text{el.}} + \dot{e}_{ij}^{\text{pl.}} ,$$

je především podle Hookeova zákona

(4a) $$2G\dot{e}_{ij}^{\text{el.}} = \dot{s}_{ij}$$

a dále podle (4) je

(4b) $$2G\dot{e}_{ij}^{\text{pl.}} = \lambda s_{ij} \, .$$

Další nejznámější fysikální rovnice pocházejí od MISESA [33, 11]. V těchto rovnicích se zanedbává jak pružná deformace objemová (takže $\dot{e}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$), tak i pružná deformace tvarová (takže $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl.}}$). Tyto rovnice mají tvar

(5) $$\dot{\varepsilon}_{ij} = \mu s_{ij} \, ,$$

kde μ je zatím neznámá funkce podobně jako λ. Má tedy ε_{ij} tentýž význam jako $\dot{e}_{ij}^{\text{pl.}}$ v rovnicích Prandtl-Reussových a rovnice Misesovy jsou protějškem rovnic (4b).

Nakonec uvedeme ještě fysikální vztahy HENCKYHO [22]

(6) $$e_{ij} = \psi \, . \, s_{ij} \, , \quad (\varepsilon = \text{konst} \, . \, \sigma) \, ,$$

kde ψ je jistá funkce úměrnosti. Tyto rovnice počítají i s pružnou částí složek deformace.

Jak v rovnicích Prandtl-Reussa, tak v rovnicích Henckyho se někdy za účelem zjednodušení výpočtu zanedbává celá objemová deformace. Vztahy uvedené v závorce při rovnicích (4) a (6) pak pozbývají smyslu (konstanty úměrnosti spolu s ε mají v tomto případě nulové hodnoty) a stejně tomu tak je vždy v rovnicích Misesových.

Pokud s objemovou deformací počítáme, dostaneme hodnotu konstanty úměrnosti z Hookeova zákona. Vyjde $\varepsilon = \dfrac{1 - 2\nu}{E} \sigma$, kde E je modul pružnosti a ν je Poissonův poměr.

Nejprve v celé další části probereme ideálně plastické těleso bez zpevnění materiálu. Po úvodním seznámení s rovnicí, zvanou podmínka plasticity, a rozebrání fysikálních vztahů, odlišíme teorii malých pružně-plastických deformací od případu neomezených plastických deformací.

3. PODMÍNKA PLASTICITY

Podmínka plasticity se dá považovat za kriterium, které udává, jaké seskupení složek napětí v uvažovaném bodě tělesa znamená začátek plastického deformování. Tato podmínka se bere stejná pro všechny body homogenního tělesa.

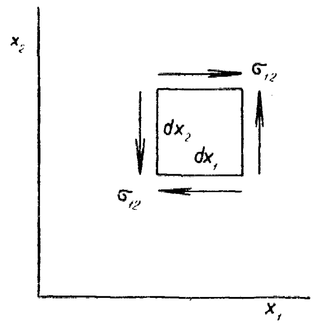
Formulace podmínky plasticity ve tvaru rovnice je udávána různými autory odlišným způsobem. Některé vlastnosti jsou však společné: Napišme rovnici vyjadřující podmínku plasticity ve tvaru

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \, .$$

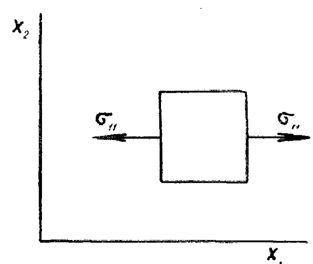
Tvar této funkce bude ovlivněn skutečností, že uvažujeme těleso isotropické — f musí být tedy nezávislé na pootočení systému souřadnic. Dále podmínka plasticity nezávisí od velikosti hydrostatického tlaku, takže místo složek tensoru napětí použijeme složky deviátoru napětí. Dalšími úvahami se dojde k závěru, že f musí být funkcí invariantů deviátoru napětí.

Poznámka: Pojmem invariant tensoru (deviátoru) napětí se označují koeficienty při jednotlivých stupních neznámé v kubické rovnici, z níž určujeme hlavní napětí σ_1, σ_2, σ_3 (resp. s_1, s_2, s_3). Označíme-li invarianty deviátoru napětí jako D_1, D_2, D_3, je

$$D_1 = s_{ii}\,, \quad D_2 = \tfrac{1}{2}s_{ij}s_{ij}\,, \quad D_3 = \tfrac{1}{3}s_{ij}s_{jk}s_{ki}\,.$$



Obr. 2a.



Obr. 2b.

Podle definice složek deviátoru napětí je $s_{ii} = 0$, a proto se počítá jen s invarianty D_2, D_3. Pro invariant D_2 se uvádějí některé fysikální interpretace (na základě „oktaedrického smykového napětí" τ_{okt} či měrné tvarové práce). Platí $D_2 = \frac{3}{2}\tau^2_{\text{okt}}$ (o pojmu τ_{okt} viz str. 331).

Můžeme tedy psát

$$f(D_2, D_3) = 0\,.$$

Nejvíce užívaná je podmínka plasticity Misesa

$$D_2 - k^2 = 0\,,$$

jejíž přednost je jak v její jednoduchosti, tak i ve velmi dobrém souladu s výsledky zkoušek. Smysl konstanty k vyplývá např. ze speciální rovinné napjatosti v případě tzv. „čistého smyku" (obr. 2a). Zde $D_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} = \sigma^2_{12}$, takže $k = |\sigma_{12}|$. Konstanta k tedy představuje tu hranici tangenciálního napětí při čistém smyku, při které nastupuje plastická smyková deformace. Podobně při namáhání v prostém tahu (obr. 2b) vychází podmínka plasticity ve tvaru

$$\tfrac{1}{3}\sigma^2_{11} - k^2 = 0\,,$$

odkud lze k porovnat s napětím na mezi průtažnosti σ_T. Platí $\sigma_T = k\sqrt{3}$.

Vedle Misesovy podmínky se hodně užívá starší podmínky TRESCA-ST. VÉNANTOVY, jež vychází z představy, že při plastickém deformování má největší hlavní smykové napětí konstantní hodnotu rovnající se maximální velikosti smykového napětí při čistém smyku, tj. k. Tato podmínka vyjádřena ve tvaru $f(D_2, D_3) = 0$ představuje dosti složitý výraz, a také její ověření zkouškami dává vcelku méně příznivé výsledky než rovnice odvozená Misesem.

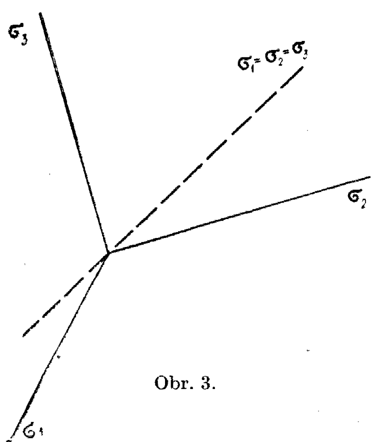
Trescova podmínka plasticity se dá výhodně užít tehdy, jsou-li známy směry hlavních napětí. Píšeme ji pak ve tvaru

$$\max\left(|s_1 - s_2|\,,\quad |s_2 - s_3|\,,\quad |s_3 - s_1|\right) = 2k\,.$$

U tělesa, kde nedochází ke zpevnění materiálu, je podmínka plasticity neodvislá od průběhu plastických deformací, takže pokud vyloučíme případ odtížení, musí platit

$$\dot{f} = 0\,.$$

Podmínku plasticity obecného typu lze geometricky interpretovat jako „plochu" v prostoru, jehož souřadnicemi jsou složky napětí σ_{ij} resp. s_{ij} [3, 12, 32]. Tyto „plochy" musí být konvexní. Zajímavé je geometrické vyjádření Misesovy a Tresca-St. Vénantovy podmínky plasticity v tzv. High-Westergaardově prostoru, jehož pravoúhlé osy souřadnic tvoří směry hlavních napětí v uvažovaném bodu tělesa (obr. 3).



Obr. 3.

Misesova rovnice představuje v tomto prostoru válcovou plochu o poloměru válce $r = k\sqrt{\frac{2}{3}}$ a ose válce $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Tresca-St. Vénantova rovnice je zobrazena pravidelným šestibokým hranolem, vepsaným do zmíněného kruhového válce.

Napjatosti v každém bodě tělesa odpovídá jistý bod v High-Westergaardově prostoru. V případě, kdy v uvažovaném bodě probíhají plastické deformace, leží jemu odpovídající obraz na ploše zmíněného válce nebo hranolu.

Znaménka u invariantů vystupujících v podmínce plasticity volíme tak, že pro případ, kdy deformace v uvažovaném bodě mají pružný charakter, platí $f(D_2, D_3) < 0$. Podle toho pružnému namáhání v jistém bodě tělesa odpovídá v High-Westergaardově prostoru některý bod ležící uvnitř válce resp. hranolu. Body vně těchto ploch nemohou představovat napjatost v žádném bodě tělesa (u něhož neuvažujeme zpevnění materiálu).

Podmínka plasticity patří vedle rovnic (1) a (2) k základním rovnicím při určování napětí v tělese. Skutečnost, že je formulována ve složkách napětí, se vysvětluje tím, že stav prvních plastických deformací navazuje spojitě na stav pružný, při kterém lze deformaci v uvažovaném bodě tělesa vyjádřit jednoznačně pomocí složek napětí v tomto bodě.

Dosud jsme mluvili o splnění podmínky plasticity v jistém bodě tělesa. Jakmile složky napětí v nějakém bodě splňují podmínku plasticity, začne v okolí tohoto bodu vznikat oblast, v níž se uplatňuje vedle pružné i plastická deformace. Se zvětšováním zatížení se pak postupně rozvíjí oblast plastické deformace a zachvacuje stále větší část tělesa. Přitom zbývající pružné oblasti zabraňují vznikání větších plastických deformací, avšak postupně toto „zdržování" slábne a nastupuje stav plastického tečení, jehož „začátek" odpovídá meznímu zatížení.

Protože ještě i zatížení velmi blízké k meznímu vyvolává plastické deformace, jejichž velikost je srovnatelná s velikostí deformací pružných, označujeme celou tuto fázi — počínající splněním podmínky plasticity v prvém elementu tělesa a končící vznikem stavu plastického tečení — jako pružně-plastickou. Uvažujeme-li vnější zatížení jako rostoucí funkce jednoho parametru t, je pružně-plastická fáze charakterisována jistým intervalem t_1, t_2, přičemž hodnota t_1 udává rozmezí pružné a pružně-plastické fáze a hodnota t_2 podobně fáze pružně-plastické a plastického tečení. Při rozvíjejícím se plastickém tečení hodnota parametru t již dále nestoupá. Je tedy vznik plastického tečení charakterisován jevem, že poprvé je možné narůstání deformace při konstantním zatížení.

Řekli jsme již, že fázi plastického tečení speciálně při rovinné deformaci a napjatosti byla věnována daleko větší pozornost než fázi pružně-plastické. Je to hlavně proto, že při plastickém tečení lze vycházet ze značně jednodušších fysikálních rovnic, jež dostaneme zanedbáním velikosti pružné části deformace. Používá se tu obvykle fysikálních vztahů Misesových, přičemž se ukazuje, že pro aplikaci těchto vztahů není třeba znát poměry v předchozím pružně-plastickém stavu. Poukazuje se však na skutečnost, že je možno si představit případ, kdy k plastickému tečení tělesa speciálního tvaru dojde jen v jeho části, zatím co zbylá část zůstává ve stavu pružném. V takovém případě by pak zkoumání fáze plastického tečení musil předcházet podrobný rozbor fáze pružně plastické [33].

Dosud jsme probírali případ, při němž složky zatížení ve všech bodech tělesa jsou monotonními funkcemi jediného parametru. Většinou se pak řeší jen případy tzv. úměrného zatěžování, kdy všechny složky vnějšího zatížení rostou navzájem úměrně.

Tímto zjednodušujícím omezením se sleduje cíl, aby při výpočtu nebylo třeba mít na zřeteli historii zatěžování a deformace — ovšem ještě za předpokladu, že před daným procesem nebylo nikdy dříve zkoumané těleso namáháno až ke vzniku plastických deformací.

Otázky odtěžování z plastického stavu a otázky opakovaného zatížení přinášejí s sebou další problémy. Uveďme alespoň, že dosti malé odtěžování probíhá pružně, tj. při platnosti Hookeova zákona. Podrobně se lze s těmito otázkami seznámit v literatuře [4, 21, 28].

4. FYSIKÁLNÍ VZTAHY

Nyní se vrátíme k fysikálním rovnicím. Původně se fysikální rovnice uvažovaly jako nezávislé od podmínky plasticity [32]. Potom se přešlo k teorii tzv. plastického potenciálu, kde plastický potenciál je jistá daná funkce složek napětí [5, 9, 23, 32 aj.].

Nejznámější teorie plastického potenciálu pracuje s levou stranou podmínky plasticity $f(s_{ij})$ jako s potenciální funkcí. Podle této teorie je

$$d\varepsilon_{ij}^{\text{pl.}} = \nu \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{resp.} \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl.}} = \nu' \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}},$$

kde ν, ν' jsou nějaké funkce úměrnosti.

Teorie plastického potenciálu udává tedy vztah mezi přírůstky plastické deformace a příslušným napětím. Má důležitou geometrickou a fysikální interpretaci v prostoru, jehož souřadnicemi jsou složky napětí. Zatím uveďme alespoň základní příklad:

Za potenciál f vezmeme funkci odpovídající Misesově podmínce plasticity:

$$f = \tfrac{1}{2} s_{ij} s_{ij} - k^2 .$$

Podle teorie plastického potenciálu vyjdou fysikální rovnice ve tvaru

$$\dot{e}_{ij}^{\text{pl.}} = \nu' s_{ij} .$$

Dostáváme tedy vztahy, které jsou v souhlase s rovnicemi (4b) a (5). U Prandtl-Reussových vztahů stačí položit

$$\lambda = \frac{\nu'}{2G},$$

u vztahů Misesa $\mu = \nu'$.

Funkce λ a μ lze z fysikálních rovnic eliminovat s použitím podmínky plasticity se zřetelem na předpokládané vlastnosti materiálu. U materiálu ideálně plastického s podmínkou plasticity podle Misesa lze např. vyloučit λ z rovnice (4) pomocí vztahu

$$\dot{f} = 0 \quad \text{čili} \quad s_{ij}\dot{s}_{ij} = 0 .$$

Vyjde

$$\lambda = \frac{G}{k^2} s_{ij}\dot{e}_{ij} .$$

Podobně pro μ dostaneme rovněž na základě Misesovy podmínky plasticity

$$\mu = \frac{\sqrt{C}}{k}, \quad \text{kde} \quad C = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} .$$

Na základě určených funkcí λ a μ je vidět, že rovnice (4) jsou homogenní rovnice 1. stupně vzhledem k rychlostem deformace a časovým změnám napětí, rovnice (5) jsou pak homogenní nultého stupně vůči rychlostem deformací. V obou případech je tedy napětí dosažené na konci přetvořovacího procesu nezávislé od doby, po kterou tento stav trval. Dále lze využít vlastnosti, že rovnice (4) a (5) jsou homogenní vzhledem k derivacím podle času, k tomu, že se čas nahradí jiným parametrem, který s časem monotonně vzrůstá a je charakteristický pro okamžitý stav deformace.

Prandtl-Reussovy vztahy vyjadřují jednoznačně $\dot{s}_{ij}$, jsou-li dána σ_{ij} a $\dot{\varepsilon}_{ij}$. Jsou vhodné pro počítání pružně-plastického stavu v tělese. Pro velké deformace dávají příliš složité výrazy, neboť vzhledem k respektování pružných deformací nelze rychlosti vztahovat k přetvořenému stavu tělesa.

Misesovy vztahy (5) jsou vhodné naopak pro stav plastického tečení, neboť dávají totéž jednoduché vyjádření pro malé i pro velké plastické deformace. Pokud počítáme rychlosti vzhledem k deformovanému tělesu, je ovšem třeba formulovat okrajové podmínky též na deformované hranici.

Zabývejme se dále otázkami napjatosti a přetvoření tělesa, v němž nedochází ke zpevnění v průběhu plastické deformace. Část povrchu tělesa, kde je dáno zatížení pomocí vektorové funkce p_i, označme S_p, a obdobně S_v bude představovat tu část, kde jsou předepsány rychlosti.

Pro objasnění problematiky vezmeme např. otázku napjatosti v tělese při daném zatížení, které již přestoupilo hranici, kdy rovnováha mohla být udržena jen při pružné napjatosti a deformaci.

Pro napětí jsou předepsány rovnice rovnováhy (1), okrajové podmínky (2) na S_p a konečně podmínka plasticity ve tvaru nerovnosti $f \leqq 0$ ($<$ platí v pružném oboru). Podaří-li se nám udělat návrh napjatosti, jež tyto podmínky splňuje, neznamená to, že již máme správné řešení. (Ukáže se, že máme jen řešení „staticky přípustné“.) V teorii pružnosti bylo třeba vzít v úvahu ještě podmínky kompaktibility. Zde však formulovat tyto rovnice pro složky napětí je vesměs nemožné. Máme však jiné prostředky, které pomáhají posoudit správnost řešení, a to extremální principy teorie plasticity.

5. EXTREMÁLNÍ PRINCIPY

Formulace extremálních principů je závislá od mnoha faktorů: od druhu napjatosti, podmínky plasticity (event. ještě podmínky zpevnění u neideálně plastických těles), fysikálních vztahů s uvažovanými zjednodušeními, od okrajových podmínek aj. [9, 11, 12, 26, 30 aj.].

K objasnění podstaty věci vezmeme obecnou prostorovou napjatost u ideálně plastického tělesa při Misesově fysikálních rovnicích (5) a Misesově podmínce plasticity [33].

Úlohu formulujeme takto: Při daném zatížení p_i na S_p a rychlostech v_i na S_v předpokládejme, že těleso je celé ve stavu plastické napjatosti. Je třeba najít podmínky (uvedeme je ve tvaru vět), které odlišují skutečný stav napětí resp. skutečný stav rychlosti deformací od všech „staticky přípustných“ stavů napětí resp. „kinematicky přípustných“ stavů deformace.

Je třeba definovat nově zavedené pojmy:

Staticky přípustný stav (pole) — označení σ^0_{ji} — musí mít tyto vlastnosti:

1. σ^0_{ij} splňuje v každém bodě stat. podmínky rovnováhy (1),
2. na částech S_p splňují σ^0_{ij} okrajové podmínky (2) pro dané zatížení
3. ve všech bodech tělesa je splněna podmínka plasticity $\frac{1}{2}s^0_{ij}s^0_{ij} - k^2 = 0$.

Kinematicky možným polem rychlostí deformace $\dot{\varepsilon}^*_{ij}$ se nazývá pole, pro jehož všechny body platí:

1. $\dot{\varepsilon}^*_{ij}$ jsou odvozeny z rychlostí v^*_i, jež splňují podmínku nestlačitelnosti
$$\frac{\partial v^*_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{čili} \quad \operatorname{div} v^*_i = 0\,,$$
2. v^*_i splňují okrajové podmínky na části S_v.

K tomu je třeba poznamenat, že je pole skutečných napětí staticky přípustným a pole skutečných rychlostí deformace kinematicky přípustným. Na tomto základě lze vyslovit věty:

Pole skutečných napětí v tělese se liší od všech ostatních staticky přípustných polí tím, že činí výraz
$$J^0 = \int_{S_v} \sigma^0_{ij} v_i n_j \, \mathrm{d}S$$
maximálním.

Pole skutečných rychlostí deformace je odlišné od všech kinematicky přípustných polí tím, že výraz
$$K^* = k\sqrt{2} \int_V \sqrt{\dot{\varepsilon}^*_{ij}\dot{\varepsilon}^*_{ij}} \, \mathrm{d}V - \int_{S_p} p_i v^*_i \, \mathrm{d}S$$
má pro skutečné pole minimální hodnotu.

K tomu několik připomínek. Především výraz pro J^0 lze upravit na jednodušší tvar
$$J^0 = \int_{S_v} p^0_i v_i \, \mathrm{d}S\,.$$
kde p^0_i představuje fiktivní zatížení na S_v odpovídající poli σ^0_{ij}. Podle toho má být tedy na S_v výkon vnějších sil — odvozených podle rovnice (2) ze staticky přípustného pole σ^0_{ij} — na daných rychlostech v_i maximální pro skutečné pole σ_{ij}.

Výraz pro K^* lze opět upravit tak, aby jeho fysikální význam byl bližší. Jak lze snadno odvodit, platí
$$2\dot{\varepsilon}_{ij}\,.\,\dot{\varepsilon}_{ij} = \gamma^2_{\mathrm{okt}}\,,$$

kde γ_{okt} představuje rychlost oktaedrické smykové deformace[1]), a protože oktaedrické napětí τ_{okt} lze vyjádřit pomocí vztahu

$$\tau_{okt}^2 = \tfrac{1}{3}s_{ij}s_{ij}\,,$$

plyne z podmínky plasticity $k = \tau_{okt}\sqrt{\tfrac{3}{2}}$. Dále pak s užitím těchto rovnic platí

$$k\sqrt{2}\sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,\tau_{okt}\,.\,\dot{\gamma}_{okt}\,.$$

Podle toho prvý člen ve výrazu pro K^* představuje až na konstantu úměrnosti výkon smykových oktaedrických napětí na příslušných rychlostech smykové deformace a to pro celé těleso.

Protože Misesovy vztahy (5) jsou homogenní nultého stupně vůči rychlostem deformace, odpovídá podle (5) skutečný stav napjatosti σ_{ij} nejen skutečnému stavu rychlosti deformace $\dot{\varepsilon}_{ij}$, ale i každému stavu $c\,.\,\dot{\varepsilon}_{ij}$, kde c je nějaká konstanta úměrnosti. Přitom každé „skutečné“ pole $c\,.\,\dot{\varepsilon}_{ij}$ činí K^* minimálním. Jsou tedy podle Misesovy teorie určeny rychlosti deformace až na konstantní součinitel. Protože pro skutečné rychlosti deformace a skutečná napětí je

$$K = k\sqrt{2}\int_V \sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}}\,\mathrm{d}V - \int_{S_p} p_i v_i\,\mathrm{d}S = \int_S \sigma_{ij}v_i n_j\,\mathrm{d}S - \int_{S_p}\sigma_{ij}v_i n_j\,\mathrm{d}S =$$
$$= \int_{S_v}\sigma_{ij}v_i n_j\,\mathrm{d}S = J\,,$$

platí tedy

$$J^0 \leqq J = K \leqq K^*\,.$$

Podobně lze formulovat extremální principy při jiných předpokladech, např. při vztazích (4) a Misesově podmínce plasticity [33], při Trescově podmínce plasticity [17] či při teorii malých pružně plastických deformací s užitím rovnice (6) [22] aj.

Zvláště důležitou aplikaci těchto principů představuje úloha, týkající se mezního zatížení [1, 10, 12, 33, 34]:

Uvažujme úměrné zatížení charakterisované parametrem s. Meznímu zatížení ať náleží hodnota s_0. Pomocí extrémních principů lze hledanou hodnotu s_0 omezit i zdola. Metody, jimiž se tohoto omezení dosahuje, jsou propracovány pro speciální případy napjatosti zvláště při koncepci tuho-plastického tělesa [1, 12, 32]. Všude je dolní mez spojována se staticky přípustným polem napětí (namáhání) a horní mez závisí od zvoleného kinematicky přípustného pole přetvoření (rychlostí).

[1]) Jako oktaedrické plošky se označuje osm orientovaných plošek v uvažovaném bodě tělesa, jež mají stejný sklon ke všem třem směrům hlavních napětí — a deformací — (bez ohledu na orientaci těchto směrů). Smykové napětí patřící k oktaedrické plošce se označuje τ_{okt}. Úhel posunutí dvou vzájemně rovnoběžných oktaedrických plošek u uvažovaného elementu γ_{okt}. Pro pružné těleso platí $\tau_{okt} = G\,.\,\gamma_{okt}$.

U jednoduchých stavebních konstrukcí je rozpracován i případ obecnějšího (nikoli už úměrného) způsobu zatížení [25].

Vraťme se nyní k obecnému případu.

Zavedení pojmů přípustných polí je východiskem ze situace, kdy je nemožné stanovit hranici pružné a plastické oblasti nebo získat pružné pokračování oblasti, která je ve stavu plastickém.

Zvláště využití extremálních principů, založených na Misesových rovnicích, může dát v některých případech rychlý odhad pro hodnotu mezního zatížení. Postupuje se tak, že určité oblasti v tělese se považují za plastické — což lze např. na základě zkoušek přibližně odhadnout — a na ostatní část tělesa se pohlíží v důsledku zanedbání pružné deformace jako na dokonale tuhou. Protože podle Misesovy teorie je stav napětí definován jen v plastické oblasti, je pak nutno najít v oblastech tuhých vhodné pokračování tak, aby celkové pole napětí bylo staticky přípustným. Druhým úkolem je potom najít kinematicky přípustné pole. Přitom je možné použít i nespojitá pole napětí resp. rychlostí, jež ovšem na příslušných čarách nespojitosti neodporují statickým rovnicím rovnováhy resp. podmínce spojitosti deformací.

Užití nespojitých polí je dokonce výhodné [8, 12, 33], můžeme přitom totiž vystačit s velmi jednoduchým stavem napětí nebo rychlosti deformace. Např. u pole napětí užíváme často konstantního stavu napětí tak, že uvažované těleso rozdělíme (obvykle rovinami) na několik částí o různém, ale konstantním stavu napětí, jež na dělicích plochách splňuje jisté podmínky, jejichž původ je ve faktu, že jen některé složky napětí mohou být nespojité.

V dalším odstavci týkajícím se ideálně plastického tělesa bez zpevnění se zmíníme o dílčím problému, kterému byla věnována většina prací z oboru plasticity — totiž o plastickém tečení těles, jež jsou ve stavu rovinné deformace[2]) [2, 14, 16, 22, 33, 36 aj.].

Zvolme v případě rovinné deformace souřadné osy tak, že u_i resp. v_i jsou rovnoběžné s rovinou x_1x_2. Pak platí

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0 \quad \text{resp.} \quad \dot{\varepsilon}_{13} = \dot{\varepsilon}_{23} = \dot{\varepsilon}_{33} = 0 \,. \tag{7}$$

Z těchto vztahů lze na základě fysikálních rovnic předem určit hodnoty některých složek napětí.

Pro úlohy plastického tečení se vesměs užívají Misesovy fysikální rovnice. Pomocí rovnic (7) lze pak najít, že

$$s_{13} = s_{23} = s_{33} = 0 \quad \text{čili} \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad \text{a} \quad \sigma_{33} = \sigma \,.$$

Misesova podmínka plasticity při rovinné deformaci dostane tvar

$$\tfrac{1}{4}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \sigma_{12}^2 - k^2 = 0 \,, \tag{8}$$

[2]) Rovinná deformace tělesa je definována těmito vlastnostmi: Ve všech bodech tělesa jsou u_i resp. v_i rovnoběžné s danou rovinou a jejich hodnoty nezávisí od souřadnic na ose kolmé k této rovině.

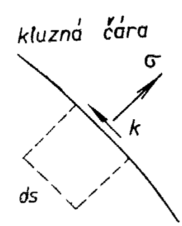
shodný s tvarem podmínky plasticity Tresca-St. Vénantovy pro tentýž případ. V rovnicích (1) odpadne jedna rovnice a některé další členy, takže rovnice rovnováhy obsahují jen složky σ_{11}, σ_{22} a σ_{12}. Tensorový zápis pak je

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0, \quad \text{kde } i = 1, 2, \; j = 1, 2 . \tag{1'}$$

Protože rovnice (1') a (8) obsahují právě tři neznámé, lze za daných okrajových podmínek týkajících se pouze zatížení formulovat tzv. staticky určitou úlohu:

Za předpokladu, že vnější zatížení odpovídá plastickému tečení uvažovaného tělesa, je úkolem určit stav napětí v tělese.

Vyloučíme-li za pomoci rovnice (8) jednu neznámou, řešíme pak dvě diferenciální parciální rovnice (1') za daných okrajových podmínek. Rovnice jsou v případě uvažovaného vztahu (8) vždy hyperbolického typu a dávají dvě soustavy charakteristických čar, které, jak lze ukázat, jsou shodné s tzv. kluznými čarami v tělese. Přitom kluznými čarami rozumíme takové křivky, k jejichž každému elementu patří tangenciální napětí o velikosti k; normální napětí na těchto elementárních ploškách vychází rovné střednímu napětí σ (obr. 4).



Obr. 4.

Zmíněné diferenciální parciální rovnice se řeší většinou přibližně.

Formálnost řešení tkví obvykle ve skutečnosti, že autoři se někdy nezabývají otázkou, je-li nalezené pole napětí skutečným řešením. Často se totiž pomíjí otázka, zda pole rychlostí, které lze na základě Misesových vztahů nalezenému řešení přiřadit, nevede ke sporu (např. při plastickém tečení musí být na hranici $\int_l p_i v_i \, dl > 0$).

Obecnější úlohu o rovinné deformaci lze formulovat takto:

Nechť na dané části hranice jsou dány rychlosti a na zbývající části napětí tak, aby těleso bylo ve stavu plastického tečení. Jest určit pole napětí a rychlostí v tělese.

Při této úloze, která bývá nazývána „staticky neurčitou", je třeba vyřešit za daných okrajových podmínek pět neznámých funkcí σ_{11}, σ_{12}, σ_{22}, v_1, v_2. K tomu slouží dvě rovnice (1'), rovnice (8), podmínka nestlačitelnosti

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \text{ kde } i = 1, 2 , \tag{9}$$

a konečně rovnice vyplývající z fysikálních vztahů

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} . \tag{10}$$

V případě staticky neurčité úlohy je třeba řešit všech pět uvedených rovnic současně. V případě úlohy staticky určité slouží rovnice (9) a (10), jež jsou hyperbolického typu, k řešení možných polí rychlostí na základě známých složek napětí. Charakteristické čáry těchto rovnic splývají se zmíněnými kluznými čarami.

Úlohy plastického tečení při rovinném stavu napjatosti[3]) jsou podstatně složitější než úlohy týkající se rovinné deformace, a jsou proto daleko méně zpracovány. Vyjmenujeme stručně alespoň základní potíže při řešení těchto úloh [8a, 9, 11].

Na rozdíl od případu rovinné deformace jsou při rovinné napjatosti rovnice, jež vyjadřují Misesovu nebo Tresca-St. Vénantovu podmínku plasticity, odlišné. Při užití fysikálních rovnic (5) spolu s Misesovou podmínkou plasticity, dostaneme sice shodné charakteristické čáry pro napětí i rychlosti, avšak nemáme zaručenou v celém tělese hyperboličnost výchozích rovnic, které mohou být někde i parabolického nebo eliptického typu.

Při užití rovnice (5) a Tresca-St. Vénantovy podmínky plasticity mohou být výchozí diferenciální parciální rovnice v tělese jak hyperbolické tak i parabolické a navíc ještě se navzájem liší systém charakteristických čar pro napětí a pro rychlosti. Poučné srovnání úlohy o rovinné deformaci a rovinné napjatosti je podáno v [8a], kde se upozorňuje také na okolnost, že v teorii plasticity nejsou dosud formulovány žádné takové typy okrajových podmínek, pro které by bylo možno dokázat existenci a jednoznačnost řešení uvažovaných úloh.

6. PLASTICKÉ ZPEVNĚNÍ

V závěrečné části uvedeme ještě několik poznámek k teorii plasticity počítající s tělesem, kde dochází ke zpevnění při rostoucí plastické deformaci [3, 5, 13, 19, 24].

Problémy týkající se tělesa se zpevněním by vyžadovaly, pokud by se měly od základů vysvětlovat, samostatného článku. Proto zde uvedeme pouze srovnání s tělesem ,,bez zpevnění", o kterém jsme dosud mluvili, a omezíme se pak na výklad teorie založené na fysikálních rovnicích Henckyho, které se často užívají.

Všechny základní rovnice (1), (2), (4) nebo (5) či (6) zůstávají v platnosti, pouze ve fysikálních vztazích je třeba znovu určit funkci úměrnosti λ nebo μ resp. ψ. Mění se podstatně jen podmínka plasticity.

K názornému poučení o změně podmínky plasticity poslouží nejlépe opět geometrický model v High-Westergaardově prostoru. Mějme na mysli na příklad analogii s Misesovou podmínkou plasticity. Vezměme v tělese jistý bod, v němž má napjatost dosud pružný charakter, takže přiřazený bod bude

[3]) Rovinný stav napjatosti v tělese je charakterisován skutečností, že lze udat takovou rovinu, že na všech ploškách tělesa rovnoběžných s touto rovinou se tangenciální i normální napětí rovnají nule.

ležet uvnitř jistého válce. Jestliže při postupu zatěžování se bod dostane na plochu válce, je zde předpoklad pro vznik prvních plastických deformací. Ale zatím co u ideálně plastického tělesa bez zpevnění se při libovolně velkých plastických deformacích bod nalézal stále na témže válci, v našem případě se s každým přírůstkem plastické deformace zvětší i poloměr válce, na který je nyní bod vázán. Při případném odlehčení bod opustí válec a zaujme některou polohu uvnitř válce. Při dalším zatěžování pak může dojít k opětnému zpevnění, až když bod v H.-W. prostoru dosáhne znovu plochy válce, kterou předtím opustil, tedy za jiných podmínek než tomu bylo za vzniku prvých plastických deformací.

Je tedy plastické chování materiálu při zpevnění popsáno pomocí [3]:

1. původní podmínky plasticity, která udává, za jakého stavu napětí nastala poprvé plastická deformace,

2. zákona zpevnění, který popisuje změnu podmínky plasticity v průběhu plastické deformace — tedy v právě uvedeném případě by bylo třeba udat proměnnou hodnotu poloměru válce např. $r = F(\int \sigma_{ij}\, \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{pl.}})$,

3. fysikálních rovnic.

V obecném prostoru napětí se souřadnicemi σ_{ij} platily u ideálně plastického tělesa vztahy

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{pl.}} = \nu \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} ,$$

kde rovnicí $f(\sigma_{ij}) = 0$ byla určena jistá „plastická“ plocha. Podle toho tedy v daném bodě tělesa „vektor“ $\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{pl.}}$, uvažovaný v prostoru napětí, má směr gradientu plochy $f = 0$ v místě uvažovaného napětí, a protože „vektor“ přírůstku napětí $\mathrm{d}\sigma_{ij}$ musí ležet v tečné rovině (v bodě σ_{ij} na $f = 0$), je

$$\mathrm{d}\sigma_{ij}\, \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{pl.}} = 0 .$$

Při plastickém tělese se zpevněním se užívá rovněž teorie plastického potenciálu, zde však „vektor“ $\mathrm{d}\sigma_{ij}$ může mít v „bodě“ σ_{ij} libovolný směr, a tak pokud neuvažujeme odtížení, platí

$$\mathrm{d}\sigma_{ij}\, \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{pl.}} \geqq 0 .$$

Dá se ukázat [5], že fysikální vztahy tu lze vyjádřit ve tvaru

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{pl.}} = g_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}\, \mathrm{d}\sigma_{kl} ,$$

kde

$$g_{ij} = G \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

(G v daném bodě je jistý skalár).

Pro těleso se zpevněním lze analogicky formulovat extremální principy a jejich význam je obdobný jako u teorie ideálně plastického tělesa [11, 26, 30].

V sovětské literatuře se velmi často aplikuje metoda malých pružně plastických deformací. I když je v principu odlišná od obecných teorií, je vcelku velmi jednoduchá a proto se zde o ní zmíníme [14, 16, 22, 30 aj.].

Tato teorie je založena na fysikálních rovnicích (6).

Podmínka, nahrazující zde podmínku plasticity, je vyjádřena vztahem mezi druhým invariantem deviátoru napětí a jistou invariantní funkcí složek deformace. Označme

$$T = \sqrt{\tfrac{1}{2}\, s_{ij}s_{ij}} \quad \text{a} \quad \Gamma = \sqrt{2e_{ij}e_{ij}}\,.$$

Zmíněná podmínka má tvar

$$T = g(\Gamma)\,.\,\Gamma\,. \tag{11}$$

Vzhledem k tomu, že $T = \tau_{\text{okt}} \sqrt{\frac{3}{2}}$ a $\Gamma = \gamma_{\text{okt}} \sqrt{\frac{3}{2}}$, lze rovnici (11) považovat za platnou i v pružné oblasti pro $g(\Gamma) = G$. (V pružné oblasti je totiž $\tau_{\text{okt}} = G\gamma_{\text{okt}}$.)

V literatuře se uvádí, že závislost (11) je prakticky stejná pro různé stavy napjatosti, pokud užíváme úměrného zatěžování. Je proto možné stanovit ji ku příkladu ze zkoušky na prostý tah. Obrázek 1b můžeme proto považovat též za grafické vyjádření rovnice $T = g(\Gamma)\,.\,\Gamma$ pro uvažovaný materiál.

Ve fysikálních rovnicích (6) je třeba dále určit funkci ψ. S pomocí podmínky (11) vychází $\psi = \dfrac{1}{2g(\Gamma)}$, což je v souladu s rovnicí (3) pro případ pružného tělesa, kdy $g(\Gamma) = G$.

Pokud se tedy jedná jen o případ zatěžování, máme zde vlastně teorii, která by mohla právě tak dobře popisovat chování jistého nelineárně pružného tělesa.

Proti Henckyho vztahům se vznáší hodně námitek hlavně proto, že při složitějším způsobu namáhání nebo při odtížení a jiném druhu třeba i úměrného zatěžování vedou ke sporům. Když se však omezíme na daný případ úměrného zatížení, nelze proti nim vcelku nic namítat, pokud ovšem je aplikujeme jen na malé deformace.

Podobně jako pro těleso pružné lze i pro případ plastického tělesa se zpevněním formulovat jisté extremální principy.

Pro uvažovaný případ Henckyho malých pružně-plastických deformací platí dokonce téměř shodné formulace Lagrangeova a Castiglianova variačního principu, známé z teorie pružnosti. To nijak nepřekvapuje vzhledem k vzájemně jednoznačné závislosti mezi s_{ij} a e_{ij} a rovněž mezi σ a ε.

Jak lze snadno podle rovnic (6) odvodit, platí

$$\sigma_{ij}\,\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = T\,\mathrm{d}\Gamma + 3\sigma\,\mathrm{d}\varepsilon\,,$$

kde prvý výraz se týká změny tvaru a druhý změny objemu. Vzhledem k (11) jde o úplný diferenciál funkce, kterou budeme nazývat přetvárnou prací a označovat Π. Je tedy

$$\Pi = \int \sigma_{ij} \, \mathrm{d}\varepsilon_{ij}$$

a vzhledem k tomu, že za počáteční stav bereme těleso v nenapjatém stavu, je π závislá jen od konečného stavu deformace resp. napětí.

Zabývejme se nyní přetvárnou prací jako funkcí stavu deformace v tělese, které je na jisté části povrchu podrobeno danému úměrnému zatížení a na zbývající části vázáno podmínkami ohledně přemístění. Definujeme pojem přetvárně možný stav tak, že budeme od něho vyžadovat splnění dvou podmínek: jednak spojitost deformací v tělese, jednak splnění všech podmínek na povrchu tělesa, jež se týkají přemístění. Označme složky přetvárně možného přemístění a deformace jako u_i', ε_{ij}'. Protože skutečný stav přemístění je též přetvárně možný, můžeme pak vyslovit tuto větu:

Skutečný stav přetvoření se liší od všech ostatních přetvárně možných stavů tím, že dělá výraz

$$\int_{S_p} p_i u_i' \, \mathrm{d}S - \int_V \Pi(\varepsilon_{ij}') \, \mathrm{d}V \tag{12}$$

minimální.

Analogickým způsobem jako v teorii pružnosti se dá ukázat, že splnění rovnice (12) je nutnou a postačující podmínkou pro splnění statických rovnic (1) a (2).

Druhý princip formuluje extremální vlastnosti jisté funkce napětí obdobné Π. Protože výraz $\varepsilon_{ij} \, \mathrm{d}\sigma_{ij}$ je opět úplným diferenciálem, označme

$$\int \varepsilon_{ij} \, \mathrm{d}\sigma_{ij} = R$$

a nazveme R doplňkovou prací v uvažovaném bodě. Podobně jako Π je i R funkcí pouze konečného stavu napětí.

Definujme dále další pomocný pojem — staticky možný stav napjatosti — tak, že na příslušné složky napětí klademe požadavek splnění rovnice (1) a dále rovnice (2) na té části povrchu tělesa, kde je dáno zatížení. Označme staticky možný stav jako σ_{ij}'. Mezi σ_{ij}' patří zřejmě i skutečný stav σ_{ij}.

Platí tato věta: Skutečný stav napětí v tělese se liší od všech stavů staticky možných tím, že činí výraz

$$\int_V R(\sigma_{ij}') \, \mathrm{d}V$$

— čili doplňkovou práci celého tělesa — minimální.

Jde tedy o větu obdobnou Castiglianovu principu. Pro pružné těleso totiž platí $R = \Pi$, takže místo o minimu doplňkové práce se mluví o minimu práce přetvárné či potenciální energie.

Uvedená teorie Henckyho pro tělesa se zpevněním se v aplikacích někdy zjednodušuje předpokladem, že objemovou deformaci tělesa lze zanedbat.

Pro velké plastické deformace se tato teorie nehodí. V takovém případě je třeba užít jiných fysikálních vztahů a podmínek pro zpevnění, kterými se zde již nebudeme zabývat [11, 31].

V posledních letech je v teorii plasticity zaměřena pozornost zvláště na extremální principy a i na jejich aplikace na nejrůznější typy stavebních konstrukcí [1, 12]. Na druhé straně se pak rozvíjí teorie variačního počtu pro různé případy nehomogenních a anisotropických těles [10, 27, 29].

Je též snaha vybudovat nové teorie plasticity, které by vhodněji formulovaly složité fysikální vztahy mezi přírůstky plastické deformace a napětí [7, 20, 23, 24, 37].

Koiter zavedl teorii plastického zobecněného potenciálu, kde místo jediného potenciálu se užívá několika potenciálních funkcí [20, 32].

Nejznámější nová teorie plasticity pochází od Sanderse [35], na kterého navazují další autoři [23].

S rozvíjející se matematickou teorií plasticity jde kupředu i její aplikace, což se jistě brzy projeví i ve stavební a jiné praxi, jež je zatím vesměs pod vlivem pružnostních řešení.

Seznam citované literatury

[1] *Baker:* The ultimate load theory ... (1956).

[2] *Белоносов:* Приближенное интегрирование уравнений плоской задачи теории упругости; ПММ 1957/1.

[3] *Clavuot - Ziegler:* Über einige Verfestigungsregeln; Ing. - Arch. 1959 Festschr.

[4] *Collonetti:* Plasticité et fluage; Ann. inst. techn. batim. et trav. publ., Oct. 1959.

[5] *Drucker:* Some implications of work hardening and ideal plasticity; Quart. Appl. Mat. 1950/4.

[6] *Ершов:* Приближенное решение осесым. упруго-пластических задач; Изв. АН СССР 1959/3.

[7] *Фейнберг:* Принцип предельной напряженности; Изв. АН СССР 1959/4.

[8] *Галин:* Об условиях на поверхностях сильных разрывов для упругих и пластических тел; ПММ 1955/3.

[8a] *Geiringer:* Some recent results in the theory of id. plast. body; Překlad: Probl. mech. 1955.

[9] *Greenberg:* Complementary minimum principles for an el.-pl. materiál; Quart. Appl. Mech. 1949/1.

[10] *Heyman:* Limit design of framed struct. made of imperfectly plastic materials; Bull. Acad. polonaisę sci. sci. techn. 1959/2—3.

[11] *Hill:* The matematical theory of plasticity (1950).

[12] *Hodge:* Plastic analysis of structures (1959).

[13] *Хуан-Ке-Чжи:* Об упрочнении жестко-пластического материала; ПММ 1958/4.

[14] *Илюшин:* К теории малых упруго-пластических деформаций; ПММ 1946/3.

[15] *Илюшин:* Нормальные и касательные напряжения при чистом изгибе балок за пределом упругости ...; Инж. сборник 19 (1954).

[16] *Илюшин:* Пластичность (1954).

[17] *Ивлев:* К построению теории идеальной пластичности; ПММ 1958/6.

[18] *Ивлев:* Некоторые частные решения уравнений осесым. задачи теории идеальной пластичности ...; ПММ 1958/5.
[19] *Ивлев:* Об изотропном упрочнении пластических тел; Доклады АН СССР 1959/4.
[20] *Ивлев:* О выводе уравнений определенного пластического течения при условии полной пластичности; Изв. АН СССР 1959/3.
[21] *Качанов:* К вопросу о сложном нагружении; ПММ 1955/3.
[22] *Качанов:* Основы теории пластичности (1956).
[23] *Клюшников:* Новые представления в пластичности и деформационная теория; ПММ 1959/4.
[24] *Клюшников:* О законах пластичности для материала с упрочнением; ПММ 1958/1.
[25] *Livesley:* Optimum design of struct. frames for altern. systems of loading; Civ. Eng. and publ. w. review — June 1959.
[26] *Марков:* О вариационных принципах в теории пластичности; ПММ 1947/3.
[27] *Милейковский:* Условие пластичности анизотропных тел; Реф. сб. механики 1957/10.
[28] *Москвитин:* Упруго-пластическая деформация тел при повторных нагружениях; ПММ 1955/6.
[29] *Olszak-Perzyna:* Remarks of the validity of varitional theorems in the mech. of inelastic anisotr. bodies; Bull. Acad. pol. sci. sci. techn. 1959/2—3.
[30] *Панферов:* О применимости вариационных методов к задачам теории малых упруго-пластических деформаций; ПММ 1952/3.
[31] *Phillips:* Variation. principles of finite plastic deformations; Quart. Appl. Mat. 1949/1.
[32] *Prager:* Probleme der Plastizitätstheorie (1955).
[33] *Prager - Hodge:* Theorie der ideal plast. Körper (1954).
[34] *Ржаницын:* Расчот сооружений с учотом пластических свойств материалов (1954).
[35] *Sanders:* Plastic stress-strain relations based on linear loading functions; Překlad: Sbornik mech. 1956/3.
[36] *Szczerpinski:* Solution of the plane problem of plast. in hyperb. series; Bull. Acad. pol. 1959/6.
[37] *Trifan:* A new theory of plastic flow; Quart. Appl. Mat. 1949/2.

Резюме

ОСНОВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

ПАВЕЛ ШЛАПАК (Pavel Šlapák)

В работе дается обзор главных принципов математической теории пластичности. После подразделения теории на основные секторы, большая часть работы посвящается вариационным принципам в теории пластичности.

При всем том принимаются в соображение физические уравнения Прандтл - Реусса и уравнения теории малых упруго-пластических деформаций. При этом работается с идеально-пластическим материалом и с упрочняющимся материалом.

Zusammenfassung

GRUNDLEGENDE PROBLEME DER PLASTIZITÄTSTHEORIE

PAVEL ŠLAPÁK

Der vorliegende Artikel ist eine übersichtliche Arbeit nach den Grundprinzipien der mathematischen Plastizitätstheorie. Zuerst wird das Problem in einige Absätze zerlegt und es werden die Grunddefinitionen angeführt.

Der Hauptteil des Beitrages befasst sich mit den Variationsprinzipen in der Plastizitätstheorie. Dabei geht man wie von den Prandtl-Reussischen physikalischen Gleichungen so auch von den Gleichungen der Theorie der kleinen plastischen Deformationen aus. Man betrachtet beide üblichen plastischen Materiale: das ideal-plastische Material und das Material mit plastischer Verfestigung im Verlaufe der plastischen Deformationen.