

Aplikace matematiky

Stanislav Maloň

O základních principech analogových matematických strojů

Aplikace matematiky, Vol. 5 (1960), No. 4, 247–271

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102713>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1960

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

O ZÁKLADNÍCH PRINCIPECH ANALOGOVÝCH MATEMATICKÝCH STROJŮ

STANISLAV MALOŇ

(Došlo dne 29. září 1958.)

V článku jsou obsaženy základní poznatky teorie analogových matematických strojů a přehled a výklad jejich základních jednotek z hlediska funkčního, nikoli konstrukčního. Zvláštní pozornost je věnována výkladu jednoho z nejdůležitějších a nejrozšířenějších analogových počítačů — diferenciálního analyzátoru.

OBSAH

1. Princip analogových počítačů	248
1,1. Analogové počítače a matematické modely	248
1,2. Princip analogového zobrazování	249
1,3. Analogový funkční generátor	250
2. Základní analogové funkční generátory a integrátory	251
2,1. Popis a funkce základních mechanických funkčních generátorů	251
2,2. Popis a funkce mechanického integrátoru	254
2,3. Popis a funkce základních elektrických počítačích obvodů	256
2,4. Integrační obvod	258
3. Analogový diferenciální analyzátor	259
3,1. Klasifikace diferenciálních analyzátorů	260
3,2. Matematický princip analogového diferenciálního analyzátoru	261
3,3. Podmínka řešitelnosti diferenciální rovnice na analogovém diferenciálním analyzátoru s jednoduchými funkčními jednotkami	263
3,4. Vytváření funkčních vztahů pomocí analogového diferenciálního analyzátoru	266
3,5. Příklad řešení diferenciální rovnice pomocí analogového diferenciálního analyzátoru	268

Současné období vyspělé techniky se vyznačuje snahami o automatizaci a mechanizaci úkonů, které vyžadují myšlení a rozhodování. Význam těchto snah se projevuje výrazně zejména všude tam, kde nároky na množství úkonů, event. přesnost nebo rychlost jejich provedení vybočují z mezí reálných možností člověka.

Realizaci celé řady strojů, nazývaných „stroje na zpracování informací“, nabyly takové snahy zcela konkrétní podoby a přispěly k rozvoji

vědy, techniky a národního hospodářství a stále více se na něm podílejí. V dosavadním vývoji dosáhly mezi stroji na zpracování informací vysokého stupně dokonalosti matematické stroje, které dnes zasahují do řady oborů lidské činnosti, jejichž specifické problémy lze formulovat matematicky.

Tento článek si klade za cíl seznámit čtenáře v krátkém přehledu se základními poznatky o principech analogových matematických strojů, zejména analogového diferenciálního analyzátoru.

Matematické stroje se dělí na dvě základní a navzájem odlišné skupiny, analogové počítače a číslicové počítače.

K těmto dvěma skupinám připojíme ještě pro úplnost tzv. smíšené počítače, které jsou konstruovány na principech, které lze zařadit současně do první i do druhé skupiny.

Poznamenejme hned úvodem, že prakticky každou matematickou úlohu lze řešit oběma typy matematických strojů. Volba analogového nebo číslicového matematického stroje pro řešení dané úlohy je podmíněna zpravidla dalšími okolnostmi a požadavky — jako jsou např. rychlost a přesnost řešení, obtížnost přípravy výpočtu (programování), případně náročnost údržby stroje a v neposlední řadě též pořizovací náklady na stroj. Dále je třeba zdůraznit, že matematických strojů (číslicových i analogových) se používá nejen k řešení matematických úloh jako takových, ale též jako „řídících orgánů“ v různých regulovaných soustavách, automatických provozech v továrnách (např. automatické řízení obráběcího procesu) a jako součást různých vysoce organizovaných řídicích systémů. V těchto případech se výsledky matematických úloh transformují ve vhodné řídicí signály a ovládací akce.

1. PRINCIP ANALOGOVÝCH POČÍTAČŮ

1.1. ANALOGOVÉ POČÍTAČE A MATEMATICKÉ MODELY

Analogové počítače jsou konstruovány tak, že všechny matematické proměnné a parametry se v nich vyjadřují (zobrazují) prostřednictvím fyzikálních proměnných veličin (viz odst. 1,2). Vnitřní výstavba těchto strojů tvoří nějaký fyzikální systém (mechanismus, elektrickou síť, hydraulický systém apod.), v němž se mezi spojitě se měnícími fyzikálními veličinami uskutečňují analogické závislosti, jaké jsou mezi matematickými proměnnými řešené úlohy. Tyto závislosti jsou popsány v podstatě týmiž vztahy a rovnicemi, jaké se řeší v dané matematické úloze. Fyzikální proces, který ve stroji probíhá, představuje řešení vztahů a rovnic, popisujících jeho vnitřní systém; měření tohoto procesu (plynulé nebo v izolovaných časových okamžicích) zprostředkuje informaci o řešení dané matematické úlohy; obvykle se toto měření automatizuje tak, aby výsledky řešení byly dány ve formě grafu nebo tabulky.

Analogové počítače jsou zpravidla specialisovány na řešení vždy určitého typu úloh; z existujících analogových počítačů uvedeme pro informaci základní typy:

Lineární analyzátor [1], [8], [9] — tj. stroj na řešení systémů lineárních algebraických rovnic;

algebraický analyzátor [12] — tj. stroj na řešení algebraických rovnic vyšších stupňů;

diferenciální analyzátor [1] — tj. stroj na řešení systémů obyčejných diferenciálních rovnic;

harmonický analyzátor [1], [2] — tj. stroj na realizaci harmonické analýsy.

Pro speciální účely byla sestrojena řada analogových počítačů, o nichž je pojednáno v odborné a časopisecké literatuře.

Někdy se pro analogové počítače používá termínu *matematické modely*: Jde zejména o takové specialisované analogové počítače, jejichž funkcí jest napodobování — neboli modelování nějakého často zkoumaného fyzikálního jevu při různých podmínkách a parametrech. Vnitřní systém takového počítače má s uvažovaným jevem společné to, že se řídí týmiž matematickými zákony. Fyzikální principy, na nichž je stroj založen, mohou být přitom zcela odlišného charakteru než je uvažovaný jev. Jako příklad zde dobře poslouží matematický model hřídele (sloužící k určování kritických otáček hřídelů, jejichž parametry se vkládají do počítače) a matematický model letadla (sloužící buď ke zkoušení prototypů letadel nebo ke cvičení pilotů [11]; do počítače se vkládají parametry letadla, napodobují se vlivy, které mohou během letu působit a sledují se reakce jednotlivých částí letadla na ně; odpadá při tom jakékoliv riziko pro zkušebního pilota a hospodářský efekt je evidentní).

1.2. PRINCIP ANALOGOVÉHO ZOBRAZOVÁNÍ

Reálné číslo resp. reálná matematická proměnná x se v analogovém počítači zobrazuje tak, že se jí přiřadí jednojednoznačně určitá (proměnná) fyzikální veličina φ rovnicí

$$(1,1) \quad x = \mu\varphi,$$

kde μ je nenulová konstanta úměrnosti, kterou budeme nazývat modulem analogového zobrazení („měřítko“ zobrazení). Veličina μ má reciproký fyzikální rozměr veličiny φ . Vztah (1,1) platí pro všechna φ z daného intervalu M_φ , zpravidla konečné délky.

Pojem analogového zobrazování se jednoduše zobecní na vektory: Vektor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ je zobrazen analogově, jestliže je zobrazena každá jeho složka, což lze formálně vyjádřit rovnicí

$$(1,2) \quad x = \mu I_{n,n} \varphi,$$

kde $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$

$I_{n,n}$ je jednotková matice a složky vektoru $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ jsou fyzikální veličiny, které mohou být eventuelně navzájem kvalitativně odlišné.

Povaha fyzikálních veličin, volených k analogovému zobrazování, je taková, že popsaným způsobem lze teoreticky zobrazit libovolné konečné reálné číslo z daného intervalu, event. vektor z dané části prostoru E_n . V souvislosti s tím se někdy hovoří o analogovém zobrazování jako o spojitém zobrazování.

V mechanických analogových počítačích bývá za fyzikální proměnnou φ volen nejčastěji úhel natočení hřídelů (rotační pohyb je mechanicky snadno realizovatelný), méně často poloha listů apod. V elektrických analogových počítačích bývají za veličinu φ voleny nejčastěji elektrické napětí, elektrický proud apod.

Vhodnou volbou modulu μ lze dosáhnout

1. aby všechny proměnné veličiny řešené úlohy byly zobrazitelné v „rozsahu“ stroje (tj. aby se pohybovaly v mezích hodnot, kterých mohou nabývat zvolené fyzikální veličiny v daném analogovém počítači),
2. dostatečné přesnosti.

Volba modulů analogového zobrazení je zpravidla dosti komplikovaná záležitost, má-li být vyhověno oběma požadavkům současně. Nebudeme se zde touto otázkou podrobně zabývat a odkážeme na literaturu (např. [1], [3], [13]). Ke druhému bodu jen povšečně poznamenejme, že obecně platí tato zásada: Čím menší je modul (příp. norma modulu) μ analogového zobrazení, tím větší je přesnost zobrazení a naopak.

1.3. ANALOGOVÝ FUNKČNÍ GENERÁTOR

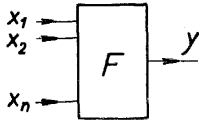
Jednou ze základních funkčních jednotek analogového počítače je tzv. „funkční generátor“. Nežli vyslovíme definici funkčního generátoru, předešleme několik předpokladů.

Předpokládejme, že je dána funkce $y = F(x)$, definovaná a ohraničená na konečné části n — rozměrného Eukleidovského prostoru E_n . Předpokládejme dále, že vektor x je zobrazen podle vztahu (1,2) pomocí n fyzikálních veličin a že matematická proměnná y je podle vztahu (1,1) zobrazena nějakou fyzikální proměnnou veličinou ψ , tj. $y = r\psi$, kde r je modul analogového zobrazení.

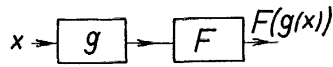
Analogovým funkčním generátorem se rozumí zařízení s n vstupními veličinami φ_n a zpravidla jednou výstupní veličinou ψ , které navzájem souvisí vztahem

$$(1,3) \quad \psi = \frac{1}{r} F(\mu_1\varphi_1, \mu_2\varphi_2, \dots, \mu_n\varphi_n);$$

(můžeme též říci, že je to zařízení, které na základě vhodných fyzikálních analogií vytváří fyzikálně funkční vztah (1,3)). Pro názornost budeme ve schématech označovat funkční generátor obdélníčkem, označeným značkou funkce F , kterou vytváří (obr. 1). Šípkami v obraze je označen logický směr vstupu a výstupu proměnných.



Obr. 1. Schematické označení generátoru funkce $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$.



Obr. 2. Schematické označení generátoru složené funkce $F[g(x)]$.

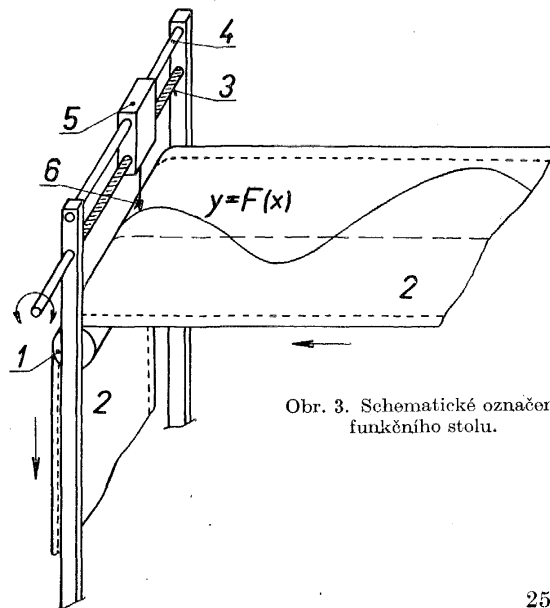
2. ZÁKLADNÍ ANALOGOVÉ FUNKČNÍ GENERÁTORY A INTEGRÁTORY

V tomto paragrafu vyložíme princip nejdůležitějších funkčních a integračních jednotek, založených na mechanických a elektrických principech; jejich výběr je volen tak, abychom s nimi v dalším vystačili při výkladu elementů teorie analogového diferenciálního analyzátoru. Poznamenejme, že pokud při tom pro ilustraci použijeme příkladů a zjednodušených schémat, půjde zpravidla o jednu z více možných variant.

2.1. POPIS A FUNKCE ZÁKLADNÍCH MECHANICKÝCH FUNKČNÍCH GENERÁTORŮ

Funkční stůl je zařízení, pomocí něhož se vytvářejí funkce jedné proměnné, dané grafem, zakresleným na pásu perforovaného papíru.

Na obr. 3 je naznačeno zjednodušené schéma jednoho provedení funkčního stolu: Válec 1 posouvá pruh perforovaného papíru 2, na němž je zakreslen graf funkce $y = F(x)$; nad válcem jsou umístěny šroub 3 a tyč 4, které unášejí obousměrně vozík 5, opatřený hrotem 6. Jestliže hrot 6 sleduje „plynule“ graf funkce F (tj. jeho y -ovou souřadnici) při posuvu perforovaného papíru ve směru záporného smyslu



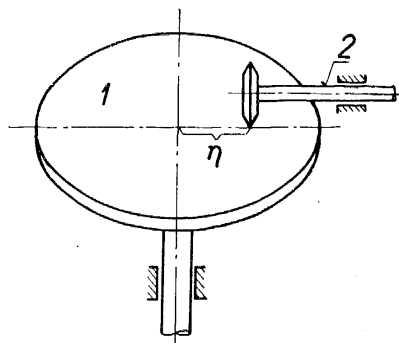
Obr. 3. Schematické označení funkčního stolu.

osy x , transformuje se výchylka vozíku 5 v natočení šroubu 3; tento rotační pohyb se přenáší buď přímo nebo pomocí polohového servomechanismu¹⁾ do jiné části stroje.

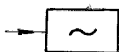
Sledování grafu funkce hrotem 6 se docílí buď ručně nebo pomocí elektrooptického sledovacího zařízení.

Připojíme-li na vstup generátoru funkce F jako nezávisle proměnnou (spojitou) funkci $g(x)$, vytváří se složena funkce $F[g(x)]$ (obr. 2).

Vyměníme-li hrot 6 za písátka a je-li posuv vozíku 5 řízen nějakou jednotkou analogového počítače, slouží popsané zařízení jako výstupní registrační jednotka, tj. k zápisu výsledků řešené úlohy formou grafu.²⁾



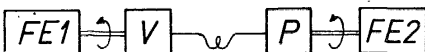
Obr. 6. a) Třecí převod.
b) Mechanický integrátor.



Obr. 4. Schematické označení registrační jednotky.

Pomocí funkčního stolu můžeme v zásadě vytvářet každou spojitou nebo po částech spojitou funkci jedné proměnné. Nicméně k vytváření funkce se jej používá zřídka, a to jen v těch případech, kdy nelze, nebo kdy je nákladné použít jiných způsobů vytváření, popsaných v další části tohoto paragrafu

a v odst. 3.3. Naproti tomu použití funkčního stolu jako zapisovacího (registračního) zařízení na výstupu analogového počítače je velmi hojné.



Obr. 5. Schematické označení polohového servomechanismu.

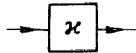
¹⁾ Polohový servomechanismus je zařízení, které zprostředkuje vzájemnou vazbu mezi jednotlivými funkčními a jinými jednotkami analogového počítače. Elektromechanický polohový servomechanismus se skládá ze dvou hlavních částí (obr. 5): Vysílače V , který je mechanicky spojen s hřídelí funkční jednotky $FE 1$ a přijímače P , vhodně elektricky propojeného s vysílačem a mechanicky připojeného k jiné funkční jednotce $FE 2$. Polohový servomechanismus sleduje rotační pohyb funkční jednotky $FE 1$ a s jistým časovým zpožděním a s jistou chybou uvádí do souhlasného rotačního pohybu funkční jednotku $FE 2$, přičemž současně zesílí kroutící moment. Podrobnější pojednání lze nalézt např. v knihách [2], [4]. Polohové servomechanismy jsou sice s hlediska konstrukčního velice důležité, pro pochopení funkce analogového počítače však nejsou nezbytné a nebudeme je proto ve schématech zvlášť vyznačovat.

²⁾ U elektronických diferenciálních analyzátorů plní funkci registračního zařízení zpravidla osciloskop.

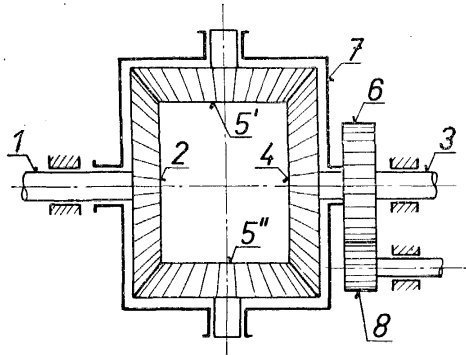
Půjde-li o použití funkčního stolu jako generátoru funkce jedné proměnné, budeme jej označovat schematicky symbolem, naznačeným na obr. 1; v opačném případě — půjde-li o jeho použití jako registračního zařízení, budeme jej označovat symbolem, zakresleným na obr. 4.

Některé jednoduché matematické funkce lze mechanicky vytvářet pomocí zařízení, známých z použití k jiným technickým účelům (viz např. [2]).

Násobení konstantou se mechanicky realizuje převodem, a to buď ozubeným soukolím nebo třecím převodem (spojkou) (obr. 6). V obou případech je vztah mezi úhly α a φ natočení navzájem mechanicky vázaných hřídelí lineární, tj.



Obr. 7. Schematické označení násobící jednotky.



Obr. 8. Mechanická sčítačka (tzv. „diferenciál“).

(2,1)

$$\varphi = \alpha_0 \pm \kappa \alpha .$$

V případě ozubeného soukolí znamená konstanta κ převod, v případě třecí spojky je $\kappa = \frac{\eta}{b}$, kde η — je orientovaná vzdálenost roviny kolečka 2 od středu disku 1, b — je poloměr kolečka 2, α_0 — je úhel počátečního natočení kolečka 2. Třecí spojkou lze realizovat násobení libovolnou konstantou z intervalu $\left\langle -\frac{a}{b}, \frac{a}{b} \right\rangle$, kde a — je poloměr disku 1.

Ve schématech budeme označovat funkční jednotku, která realizuje mechanicky násobení konstantou obdélníčkem, do něhož vepíšeme konstantu κ (obr. 7); nazývá se reduktorem.

Velmi důležitou funkční jednotkou analogového počítače je sčítačka (sumátor); schéma jednoho jejího mechanického provedení je naznačeno na obr. 8. Její hlavní části jsou: Planetové soukolí 2, 4, 5', 5'', uložené ve skříní 7, k níž je pevně připojeno ozubené kolo 6, přenášející rotační pohyb skříně 7 na ozubené kolo 8. Vychýlíme-li pomocí hřídele 1 kolo 2 o úhel φ_1 a pomocí hřídele 3 kolo 4 o úhel φ_2 , pak výchylka φ_3 skříně 7, přenesená na ozubené kolo 8, je úměrná součtu φ_1 a φ_2 , tj.

(2,2)

$$\varphi_3 = \gamma(\varphi_1 + \varphi_2) ,$$

kde γ je konstanta, závislá na převodu ozubeného soukolí 6 a 8: vhodnou volbou převodu lze dosáhnout toho, aby konstanta γ byla rovna právě jedné.

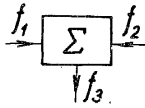
Sčítačku budeme ve schématech označovat obdélníčkem s vepsanou značkou sumace (obr. 9).

Existují ještě jiné mechanické funkční generátory (viz např. [2]); v tomto odstavci a v odstavci 2,3 popsaným jednotkám budeme říkat jednoduché funkční generátory.

2.2. POPIS A FUNKCE MECHANICKÉHO INTEGRÁTORU

Integrátor je zařízení, kterým se na základě vhodné fyzikální analogie realizuje integrace.

Uvažujme třetí převod podle obrazu 6, mechanicky přizpůsobený, aby se vzdálenost roviny kolečka 2 od středu disku 1 dala měnit (v intervalu $\langle -a, a \rangle$).



Předpokládejme, že se disk 1 pootočí o úhel $\Delta\alpha_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i$, přičemž vzdálenost roviny kolečka 2 od středu disku 1 je η_i ; pak podle vztahu (2,1) se kolečko 2 odvalí o úhel $\alpha_0 + \frac{1}{b} \eta_i \Delta\alpha_i$. Položme

Obr. 9. Schematické označení sčítačky.

$$(2,3) \quad \alpha_i = \mu_1 g(x_i), \quad \eta_i = \mu_2 f(x_i), \\ i = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

kde f, g — jsou v nějakém intervalu I spojité nebo po částech spojité funkce se spojitými nebo po částech spojitými derivacemi³⁾, μ_1, μ_2 — jsou moduly analogového zobrazení.

Uvažujme rozdělení D intervalu I , kterým interval I rozdělíme na n vzájemně disjunktních intervalů $I_i \equiv (x_i, x_{i+1})$; v každém intervalu I_i zvolme bod $\xi_i, i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Řídí-li se v každém intervalu I_i natočení disku 1 a vzdálenost η_i ⁴⁾ vztahy (2,3), pak úhel celkového odvalení kolečka 2 — označme jej třeba $\varphi = \mu_3 F(x)$ je dán součtem

$$(2,4) \quad \varphi = \alpha_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{b} \eta_i \Delta\alpha_i = \alpha_0 + \frac{\mu_1 \mu_2}{b} \sum f(\xi_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] = \frac{\mu_1 \mu_2}{b} S + \alpha_0.$$

Jestliže norma dělení D konverguje k nule, pak součet S konverguje a je roven Stieltjesovu integrálu, tj.

$$\lim_{\|D\| \rightarrow 0} S = \int_I f(x) dg(x)^5).$$

³⁾ Uvedená omezení odpovídají mechanickým vlastnostem integrátoru.

⁴⁾ Řízení vzdálenosti η_i , stejně jako řízení rotace disku 1 podle rovnice (2,3) se provádí zpravidla přijímači polohových servomechanismů [4].

⁵⁾ Při odvození rovnice, popisující činnost integrátoru, jsme záměrně vyloučili čas.

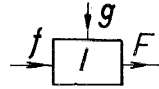
Označíme-li ve vztahu (2,4) úhel α_0 počátečního natočení kolečka 2 souhlasně $\alpha_0 = \mu_3 F_0$ a konstantu $\frac{\mu_1 \mu_2}{b \mu_3} = K$, pak závěrem dostáváme pro úhel celkového odvalení kolečka 2 vztah

$$(2,5) \quad F(x) - F_0 = K \int f(x) dg(x).$$

Kolečko 2, jehož úhlová výchylka je úměrná integrálu (2,5), se nazývá integrující kolečko.

V případě, že funkce $g(x)$ má spojitou derivaci $g'(x)$, označíme $h(x) = f(x) \cdot g'(x)$ a vztah (2,5) přepíšeme jednoduše na Cauchy-Riemannův integrál

$$(2,6) \quad F(x) - F_0 = K \int f h(x) dx.$$



Obr. 10. Schematické označení integrátoru.

Integrátor, jehož funkce je popsána rovnicemi (2,5) resp. (2,6), budeme značit ve schématech symbolem, naznačeným na obr. 10.

Poznámka 1: Výstup integrátoru (jde o natočení integrujícího kolečka) je zpravidla připojen na vysílač polohového servomechanismu, aby se zabránilo skluzům a tím zvětšení nepřesnosti mechanické integrace.

Poznámka 2: Jak vyplývá z kontextu, mohou se pomocí mechanického integrátoru integrovat nejen spojitě funkce, ale i funkce po částech spojitě: V bodech, ve kterých není funkce spojitá, zastavíme rotaci disku 1, provedeme patřičné přestavení polohy integrujícího kolečka a potom uvedeme disk opět v pohyb. Takto si počínáme rovněž před započítím řešení diferenciální rovnice, když nastavujeme na integrátorech počáteční podmínky.

Poznámka 3: Při integraci vzniká chyba, která závisí na funkcích $f(x)$ a $g(x)$, na chybě jejich sledování, na opracování integrujícího kolečka a disku a na modulech analogového zobrazení. V odborném tisku se uvádí, že se podařilo snížit celkovou relativní chybu integrace pomocí mechanického integrátoru až asi na 0,1⁰⁰/0.

Kromě popsaného způsobu zapojení se též používá mechanického integrátoru v tzv. inverzním zapojení; naznačíme jeho princip.

Neuvažujme na chvíli skutečné dynamické vlastnosti mechanické soustavy, kterou mechanický integrátor představuje; můžeme pak natočení integrujícího kolečka považovat nezávislým — nazvěme je opět φ a vzdálenost jeho od středu disku 1 nazvěme η ; pak natočení α disku 1 je funkcí φ a η . Jestliže rychlost integrujícího kolečka je $\frac{d\varphi}{dt}$, pak rychlost otáčení disku 1 je

$$\frac{dx}{dt} = k \frac{1}{\eta} \cdot \frac{d\varphi}{dt},$$

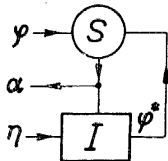
nebo-li

$$dx = \frac{k}{\eta} d\varphi$$

a odtud

$$\alpha - \alpha_0 = k \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\eta}, \quad (\eta = \eta(\varphi)),$$

kde α_0 je počáteční natočení disku 1, odpovídající hodnotě φ_0 , k je konstanta.



Obr. 11. Schéma inverzního zapojení mechanického integrátoru.

V konkrétním provedení se inverzní zapojení realizuje z jasných důvodů dynamických vlastností systému takto (obr. 11): Mezi hřídel integrujícího kolečka a hřídelu disku 1, jehož natočení označme φ^* , se zapojí servomechanismus S , který řídí rychlost rotace disku 1 tak, aby rozdíl $\varphi - \varphi^*$ byl co nejmenší (bližší viz [1]).

2.3. POPIS A FUNKCE ZÁKLADNÍCH ELEKTRICKÝCH POČÍTACÍCH OBVODŮ

Jednoduché funkce a integrace (příp. derivování) lze realizovat též pomocí elektrických obvodů s pasivními elementy; vysoké požadavky na přesnost a stabilitu počítačích obvodů však omezují jejich praktickou aplikaci; důvody jsou zcela speciální povahy a k jejich obšírnému výkladu bychom museli použít širších poznatků z elektrotechniky. Odkážeme tedy na literaturu ([1], [3], [5]) a v tomto odstavci předložíme pro informaci osvědčené a nejčastěji používané elektrické obvody, které jsou dostatečně přesné a stabilní. Jsou to obvody, používající elektronických stejnosměrných („počítačích“) zesilovačů [3] se silnou zápornou zpětnou vazbou v kombinaci s pasivními elementy.

V dalším budeme ve schématech označovat stejnosměrný zesilovač symbolem, naznačeným na obr. 12. Předpokládejme, že zisk (zesílení) tohoto zesilovače je A ; pak výstupní napětí e_2 závisí na vstupním napětí e_1 vztahem

$$(2,8) \quad e_2 = -Ae_1, \quad A \gg 1.$$

Počítačí obvody, používající stejnosměrných zesilovačů a pasivních elementů, lze shrnout do jednoho obecného schématu, které je naznačeno na obr. 13; označme Z_v a Z_z vstupní a zpětnovazební impedance; při tom předpokládáme, že $Z_v \neq 0$, $Z_z \neq 0$.

Odvodíme rovnici, udávající vztah mezi vstupním napětím $e_1 = e_1(t)$ a výstupním napětím $e_2 = e_2(t)$ v obvodu na obr. 13; t je čas.

V bodě, označeném písmenem O , je nějaké napětí e . Podle rovnice (2,8) je toto napětí

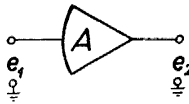
$$(2,9) \quad e = -\frac{e_2}{A}.$$

Předpokládejme, že zesilovačem neteče proud⁶⁾; můžeme pak vyjádřit proudy i_1 a i_2 (viz obr. 13), tekoucí do bodu O :

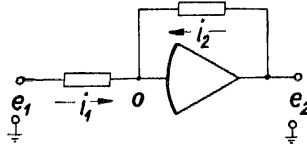
$$(2,10) \quad i_1 = \frac{e_1 - e}{Z_v}, \quad i_2 = \frac{e_2 - e}{Z_z}.$$

Podle prvního Kirchhoffova zákona [6] je algebraický součet proudů, tekoucích do bodu O , roven nule

$$(2,11) \quad i_1 + i_2 = 0.$$



Obr. 12. Schematické označení stejnosměrného zesilovače.



Obr. 13. Obecné schéma počítačeho obvodu.

Vyjádříme-li e ve vztahu (2,10) výrazem (2,9) a dosadíme-li do rovnice (2,11), dostaneme po úpravě

$$(2,12) \quad e_2 = - \frac{Z_z}{\frac{1}{A}(Z_v + Z_z) + Z_v} e_1;$$

za předpokladu, že zisk A zesilovače vzrůstá neomezeně, redukuje se vztah (2,12) na rovnici

$$(2,12^*) \quad e_2 = - \frac{Z_z}{Z_v} e_1.$$

Jestliže $A \rightarrow \infty$, pak podle vztahů (2,9) a (2,12) $e \rightarrow 0$: Interpretace této okolnosti je taková, že zesilovač při dostatečně velkém zisku A udržuje na vstupní svorce O od nuly málo odlišný potenciál, tzv. „virtuální nulu“.

Při praktické realizaci lze vztahu (2,12*) použít už při $A > 10^4$ (u velmi dobrých počítačích obvodů se počítá se ziskem $A \approx 10^5$).

Při vhodné volbě vstupní a zpětnovazební impedance se tento obvod chová jako generátor některých (jednoduchých) funkcí, případně jako integrační (derivační) jednotka. V tomto odstavci uvedeme schémata základních a nejdůležitějších počítačích obvodů.

Obvod pro násobení konstantou: Zvolme ve schématu na obr. 13 za impedance ohmické odpory $Z_z = R$, $Z_v = kR$, k je konstanta; dostaneme pak z rovnice (2,12*) vztah

$$(2,13) \quad e_2 = - k e_1.$$

⁶⁾ Ve skutečnosti zesilovačem teče tzv. „mřížkový proud“, který však je u dobře konstruovaných zesilovačů zanedbatelně malý.

Ve zvláštním případě, jestliže $k = 1$, nazývá se toto zapojení reversním (změna polaritv vstupního napětí).

Sčítací obvod: Zvolme ve schématu 13 jako zpětnovazební impedanci $Z_z = R$ a jako vstupní impedanci uvažujme ohmické odpory R_1, R_2, \dots, R_n , zapojené podle obrazu 14. Výstupní napětí e_2 závisí na vstupních napětích e_{1j} ($j = 1, 2, \dots, n$) vztahem

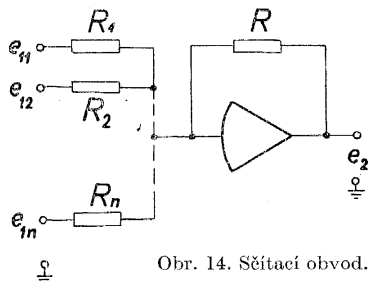
$$e_2 = - \sum_{j=1}^n \frac{R}{R_j} e_{1j};$$

jestliže

$$(2,14) \quad R_1 = R_2 = \dots = R_n = \frac{1}{k} R,$$

pak

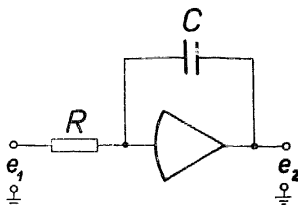
$$(2,14^*) \quad e_2 = - k \sum_{j=1}^n e_{1j}.$$



Obr. 14. Sčítací obvod.

2.4. INTEGRAČNÍ OBVOD

Zvolme ve schématu na obr. 13 jako vstupní impedanci ohmický odpor R a jako zpětnovazební impedanci kapacitu C (obr. 15); odvodíme rovnici, popisující funkci takového obvodu, přičemž budeme předpokládat pro jednoduchost ideální elementy a zanedbáme vliv „driftu“ (tj. samovolného pomalého posunu výstupního napětí) a poklesu zisku A při vyšších kmitočtech u stejnosměrného zesilovače; budeme předpokládat neomezenou diferencovatelnost $e_1(t)$ podle t .



Obr. 15. Integrační obvod.

Proud i_1 , tekoucí přes ohmický odpor R , je

$$i_1 = \frac{e_1 - e}{R} = \frac{e_1}{R} + \frac{e_2}{AR},$$

když jsme za e dosadili ze vztahu (2,9).

Proud i_2 , tekoucí ve zpětné vazbě — uvaží-

me-li platnost vztahů

$$i_2 = \frac{dQ}{dt} \quad \text{a} \quad Q = C(e_2 - e) = \frac{A+1}{A} C e_2$$

je dán rovnicí

$$i_2 = \frac{A+1}{A} C \frac{de_2(t)}{dt}.$$

Podle vztahu (2,11) pak (po vynásobení činitelem $\frac{1}{C} \cdot \frac{A}{A+1}$ a vyloučení

proudů i_1 a i_2) máme vztah mezi vstupním napětím $e_1(t)$ a výstupním napětím $e_2(t)$ popsán diferenciální rovnicí

$$(2,15) \quad \frac{de_2(t)}{dt} + \frac{e_2(t)}{RC(A+1)} = -\frac{A}{RC(A+1)} e_1(t),$$

jejíž partikulární řešení při počáteční podmínce $e_2(0) = 0$ je

$$(2,16) \quad e_2(t) = -\frac{A}{A+1} \cdot \frac{1}{RC} \cdot \exp\left[-\frac{t}{RC(A+1)}\right] \int_0^t \exp\left[\frac{t}{RC(A+1)}\right] e_1(t) dt.$$

Rozvineme-li funkci (2,16) v okolí bodu $t = 0$ v Maclaurinovu řadu, dostaneme

$$e_2(t) = -\frac{A}{A+1} \cdot \frac{1}{RC} \left[\int_0^t e_1(t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} a^k \omega_k(t) \right],$$

kde

$$a = \frac{1}{RC(A+1)}, \quad \omega_k = (-1)^k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e_1^{(i)}(0)}{(i+k+1)!} t^{i+k+1},$$

pokud uvedené řady konvergují. Uvážíme-li, že při velkém A je s velkou přesností $\frac{A}{A+1} \doteq 1$, máme

$$(2,17) \quad e_2(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t e_1(t) dt + \vartheta \left(\frac{t}{RC(A+1)} \right).$$

Poslední výsledek přehledně vyjadřuje okolnost, že obvod na obr. 15 s jistou chybou⁷⁾ integruje podle času t vstupní napětí $e_1(t)$; při daných hodnotách R a C a při dané funkci $e_1(t)$ lze určit při požadované přesnosti časový interval, během něhož lze integrovat, aniž chyba ϑ převýší přípustnou hodnotu, eventuálně při daném čase, během něhož se má integrace provádět, lze určit hodnoty odporu R a kapacity C tak, aby chyba ϑ nepřevýšila dovolenou hodnotu (součin RC se nazývá „časová konstanta“).

Závěrem tohoto odstavce zdůrazňujeme, že pomocí integračního obvodu lze na rozdíl od mechanického integrátoru integrovat pouze podle lineární funkce času.

3. ANALGOVÝ DIFERENCIÁLNÍ ANALYSÁTOR

Diferenciální analysátor je matematický stroj, funkčně specialisovaný na řešení soustav diferenciálních rovnic. Kromě této funkce lze jej úspěšně použít k řešení jiných úloh, které ovšem lze převést na řešení diferenciální rovnice, jak bude ukázáno např. v odst. 3,6.

⁷⁾ U integračních obvodů se počítá s relativní chybou asi $0,5 \div 5\%$.

3.1. KLASIFIKACE DIFERENCIÁLNÍCH ANALYSÁTORŮ

V současné době existuje několik typů analogových diferenciálních analyzátorů; povšechně je lze rozdělit do těchto základních skupin:

1. Mechanický diferenciální analyzátor má mechanické funkční jednotky a integrátory; vzájemné spojení jednotek je realizováno mechanickými vazbami (polohové transformátory, založené na mechanických principech [2], [4]). Tím vysvětlíme jeho značné rozměry a váhu (desítky tun) a poměrně malou operační rychlost. Teorii mechanického diferenciálního analyzátoru podal prvně A. N. Krylov v letech 1904—1911 a v roce 1912 sestrojil pokusný model. Prakticky použitelný mechanický diferenciální analyzátor prvně konstruoval V. Bush (stavba Bushova diferenciálního analyzátoru byla dokončena v roce 1930 v Massachusetts Institut of Technology); dosahuje vysoké přesnosti — asi $0,1-1^{\circ}/_{00}$. Přesnost mechanického diferenciálního analyzátoru je dána především přesností integračních jednotek.

2. Elektromechanický diferenciální analyzátor s mechanickými funkčními jednotkami a integrátory; vzájemné spojení jednotek je realizováno elektromechanickými vazbami (elektromechanické polohové servomechanismy). Jeho rozměry jsou podstatně menší nežli rozměry mechanického diferenciálního analyzátoru, uvedeného v bodě 1, a jeho operační rychlost je zpravidla vyšší. Je v provozu značně stabilní a dosahuje prakticky téže přesnosti jako diferenciální analyzátor z předešlého bodu. Tento typ byl konstruován v hojné míře kolem roku 1950 a následujících letech. Takový typ se též staví v Ústavu pro automatisaci a telemechaniku ČSAV a ve Výzkumném ústavu matematických strojů.⁸⁾

3. Elektromechanický diferenciální analyzátor s elektromechanickými funkčními jednotkami a integrátory (potenciometry, tachogenerátory atd.). Elektromechanické funkční jednotky jsou v provozu méně stabilní a dosahují poměrně nižší přesnosti — asi $0,1\%$ — až 1% . Tento typ není příliš rozšířen.

4. Elektronický analogový diferenciální analyzátor. Je zpravidla vybaven řadou počítačích stejnosměrných zesilovačů a dalšími manipulačními zařízeními, která umožňují snadnou obsluhu a kontrolu počítače. Počítačí obvody se zapojují (z vestavěných elementů) na „programové desce“, na niž jsou vyvedeny vstupy a výstupy počítačích zesilovačů a dalších elementů počítače. Rozměry tohoto typu diferenciálního analyzátoru jsou ve srovnání s výše uvedenými typy zcela malé; dosahuje se však na něm poměrně menší přesnosti — asi $0,5\%$ až 5% (je to způsobeno nejčastěji nepřesnostmi pasivních elementů, po případě driftem zesilovačů); je méně stabilní, nicméně však pro aplikace velmi efektivní. U nás byly postaveny ve Výzkumném ústavu telekomunikací a v Ústavu pro výzkum radiotechniky.

⁸⁾ V současné době jsou uvedené stroje ve zkušebním provozu.

Do nedávné doby se s hlediska přesnosti a rozměrů jevil nejvýhodnějším elektromechanický diferenciální analysátor s elektromechanickými vazbami. V současné době nabývají stále více na významu elektronické číslicové diferenciální analysátory (s polovodičovými elementy), které operují na principu numerické kvadratury [14]; dosahují vysoké přesnosti při vysoké operační rychlosti.

3.2. MATEMATICKÝ PRINCIP ANALOGOVÉHO DIFERENCIÁLNÍHO ANALYSÁTORU

Diferenciální analysátor sestává ze soustavy funkčních jednotek a integrátorů⁹⁾, které lze navzájem propojit podle určitého schématu, které dále uvedeme.

Předpokládejme, že se má řešit obyčejná diferenciální rovnice v explicitním tvaru

$$(3,1) \quad y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

při daných počátečních podmínkách $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$; předpokládejme, že F je spojitá funkce všech svých argumentů, vyhovující v jistém oboru G Lipschitzově podmínce; tím je zaručena existence a jednoznačnost řešení v G [7].

Označme zcela formálně $y^{(k)} = y_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, takže platí $y'_k = y_{k+1}$, $y = y_1$. Rovnici (3,1) pak lze rozložit na soustavu lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu v normálním tvaru, tj.

$$(3,2) \quad \begin{aligned} y'_1 &= y_2, \\ y'_2 &= y_3, \\ &\vdots \\ y'_{n-1} &= y_n, \\ y'_n &= y_{n+1} = F(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{aligned}$$

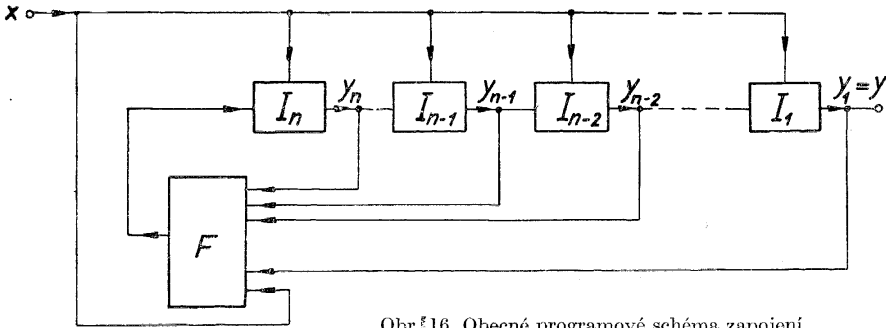
Vzájemné propojení funkčních jednotek a integrátorů analogového diferenciálního analysátoru se odvodí ze systému rovnic (3,2):

Předpokládejme, že známe funkci y_{n+1} ; integrujeme-li pomocí integrátoru I_n diferenciální rovnici $y'_n = y_{n+1}$, dostaneme funkci y_n ; integrováním diferenciální rovnice $y'_{n-1} = y_n$ dostaneme funkci y_{n-1} ; takto postupujeme dále, až dostaneme posloupnost funkcí y_n, y_{n-1}, \dots, y_1 ; zavedme je pak spolu s nezávisle proměnnou x na vstupy generátoru funkce F ; dostaneme, jak plyne ze vztahu (3,2), funkci y_{n+1} . Tím je uzavřen cyklus, který jsme znázornili na obr. 16; takto vytvořené schéma budeme nazývat programovým schématem.

Z obecného programového schématu je patrné, že k řešení diferenciální rovnice n -tého řádu je třeba n integrátorů a funkčního generátoru pro vytváření funkce F . Pro praktickou realizaci analogového diferenciálního analysátoru

⁹⁾ Ostatní části diferenciálního analysátoru nejsou důležité pro výklad jeho funkce.

je zpravidla vhodnější vytvářet funkci F pomocí systému vhodně zapojených jednoduchých funkčních jednotek, které byly popsány ve 2. kapitole; o způsobu jejich zapojení v systém, chovající se navenek jako funkční generátor, pojednáme v odstavci 3.4. Zde jen poznamenáme, že na diferenciální analyzátor bývá kladen požadavek, aby byl vybaven co největším počtem integrátorů a jednoduchých funkčních jednotek; jejich počtem bývá definována kapacita analogového diferenciálního analyzátoru.



Obr. 16. Obecné programové schéma zapojení diferenciálního analyzátoru.

Jakmile jsou zapojeny funkční jednotky diferenciálního analyzátoru podle příslušného programového schématu, nastaví se počáteční podmínky na integrátorech a počítač se uvede v činnost zavedením nezávisle proměnné x , která se zpravidla transformuje na lineární funkci času.

Dodejme, že podobně, jako lze řešit diferenciální rovnici integrací, lze teoreticky navrhnout zcela obdobné programové schéma, odvozené z předpokladu použití derivačních jednotek; pro praktické aplikace však nejsou derivační jednotky (mechanické ani elektrické) z několika důvodů vhodné a proto nemá smysl zabývat se podrobněji touto alternativou; naznačíme jen, jak by se při alternativním způsobu postupovalo: Daná diferenciální rovnice (3,1) by se vyjádřila jako explicitní funkce proměnné y , tj. $y = F_1(x, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$, pokud je to možné; předpokládali bychom znalost funkce y a postupným derivováním funkce y bychom dostali posloupnost funkcí $y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)}$ a pomocí generátoru funkce F_1 pravou stranu diferenciální rovnice.

Sestavování programových schémat pro zapojení jednotek analogového diferenciálního analyzátoru je více méně samostatná disciplína. Zdůrazníme, že programování na mechanickém diferenciálním analyzátoru má některé specifické zvláštnosti na rozdíl od programování na elektronickém analogovém diferenciálním analyzátoru; odlišnost je dána především rozdílem v aplikabilitě mechanického integrátoru a elektronického integrátoru, jak ostatně plyne z doprovodného textu v odst. 2,2 a 2,3. Příklady, uvedené v odstavcích 3,4 a 3,5, jsou programovány pro mechanický diferenciální analyzátor.

3.3. PODMÍNKA ŘEŠITELNOSTI DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE NA ANALOGOVÉM DIFERENCIÁLNÍM ANALYSÁTORU S JEDNODUCHÝMI FUNKČNÍMI JEDNOTKAMI

Při návrhu programového schématu pro danou diferenciální rovnici se vždy snažíme vystačit pokud možno s jednoduchými funkčními jednotkami; to jsou sčítací jednotky a jednotky pro násobení konstantou; k nim je přirozeně třeba připočítat integrátory. Vzniká pak otázka, jaké typy diferenciálních rovnic lze pomocí vyjmenovaných počítacích jednotek řešit.

Vyšetříme nejprve případ zapojení jednoho mechanického integrátoru s reduktory a sčítačkami všemi v úvahu připadajícími způsoby; ty lze získat z jediného zapojení, naznačeného na obr. 17; provedeme jeho rozbor.

1. Nejprve uvažujme případ, kdy jsou všechny konstanty nerulové: Jestliže x je nezávisle a y závisle proměnná, pak y je dáno podle (2,5) výrazem

$$y - y_0 = \int_{x_0}^x (b_1 x + b_2 y) d(c_1 x + c_2 y),$$

resp. po diferencování a úpravě

$$(3,3) \quad (b_1 c_1 x + b_2 c_1 y) dx + (b_1 c_2 x + b_2 c_2 y - 1) dy = 0.$$

Z toho plyne, že pomocí naznačeného zapojení lze řešit diferenciální rovnici prvního řádu s konstantními koeficienty, typu

$$(A_1 \xi + A_2 \eta + A_3) d\xi + (B_1 \xi + B_2 \eta + B_3) d\eta = 0,$$

která se dá jednoduchou substitucí transformovat na tvar (3,3).

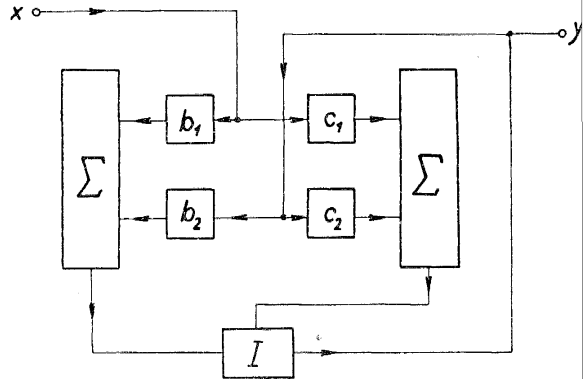
Dále vyšetříme takové kombinace zapojení, které vzniknou vynecháním některých větví ve schématu na obr. 17, tzn. volbou některých nulových konstant:

2. $b_1 = 0$: Zapojení odpovídá řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{b_2 c_1 y}{1 - b_2 c_2 y};$$

3. $b_2 = 0$: Zapojení odpovídá řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{b_1 c_1 x}{1 - b_1 c_2 x};$$



Obr. 17. Schéma zapojení mechanického integrátoru se sčítačkami a reduktory.

4. $c_2 = 0$: Zapojení odpovídá řešení diferenciální rovnice

$$y' - b_2 c_1 y = b_1 c_1 x;$$

5. $b_1 = c_2 = 0$: Zapojení odpovídá řešení diferenciální rovnice

$$y' - b_2 c_1 y = 0;$$

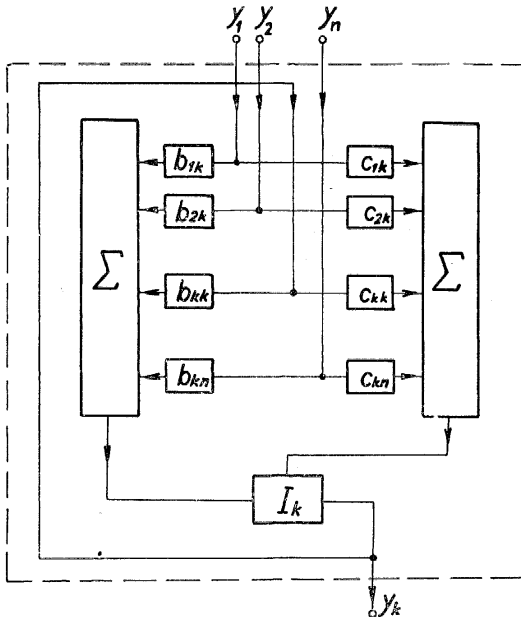
6. $b_2 = c_2 = 0$: Zapojení odpovídá řešení diferenciální rovnice

$$y' = b_1 c_1 x.$$

V případě, že bychom ve schématu na obr. 17 uvažovali elektronický integrátor, který, jak bylo řečeno v odst. 2,4 integruje pouze podle lineární funkce času, museli bychom vyloučit ty případy, kde $c_2 \neq 0$, takže by pro řešení připadaly v úvahu jen poslední tři typy diferenciálních rovnic.

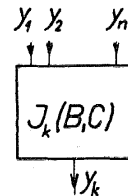
V zapojení základních počítačích jednotek podle schématu na obr. 17 nejsme v případě použití mechanického integrátoru omezeni, pokud jde o vstup, jen na nezávisle proměnnou x , nýbrž můžeme uvažovat nějakou její (po částech spojitou) funkci; tento případ v obecném tvaru rozebereme dále.

Zobecníme schéma zapojení na obr. 17 vycházejíce z předpokladu, že je dáno $n - 2$ funkcí $y_2, y_3, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_n$ nezávisle proměnné y_1 a uvažujme zapojení integrátoru I_k s reduktory a sčítačkami podle schématu na obr. 18a; toto zapojení můžeme považovat jako celek za počítač jednotku se vstupy



Obr. 18a. Obecné schéma zapojení mechanického integrátoru se sčítačkami a reduktory.

$y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_n$, s parametry $b_{1k}, b_{2k}, \dots, b_{nk}$, $c_{1k}, c_{2k}, \dots, c_{nk}$ a výstupem y_k ; označme ji zjednodušeně symbolem na obr. 18b. Uvažujme $n - 1$ počítačích jednotek $I_k(B, C)$ ($k = 2, 3, \dots, n$), vzájemně propojených podle schématu na obr. 19. Tímto propojením se dosáhne toho, že každá z $n - 1$ funkcí y_k ($k = 2,$



Obr. 18b. Schematické označení na obr. 18a nakresleného zapojení.

3, ..., n) je vytvářena pouze integrátory, sčítačkami a reduktory, vzájemně spojenými všemi v úvahu přicházejícími způsoby. Popíšeme toto zapojení.

Vraťme se ke schématu počítaací jednotky $I_k(B, C)$ při určitém k a předpokládejme, že funkce $y_2, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_n$ známe; y_1 je nezávisle proměnná. Pak počítaací jednotka $I_k(B, C)$, uvažujeme-li počáteční nastavení integrátoru I_k a položíme-li formálně $y_0 = 1$, se dá jednoduše popsat diferenciální rovnicí

$$(3,4) \quad dy_k = \sum_{i=0}^n b_{ik} y_i d\left(\sum_{j=0}^n c_{jk} y_j\right) = \sum_{i,j,k} a_{ijk} y_i dy_j,$$

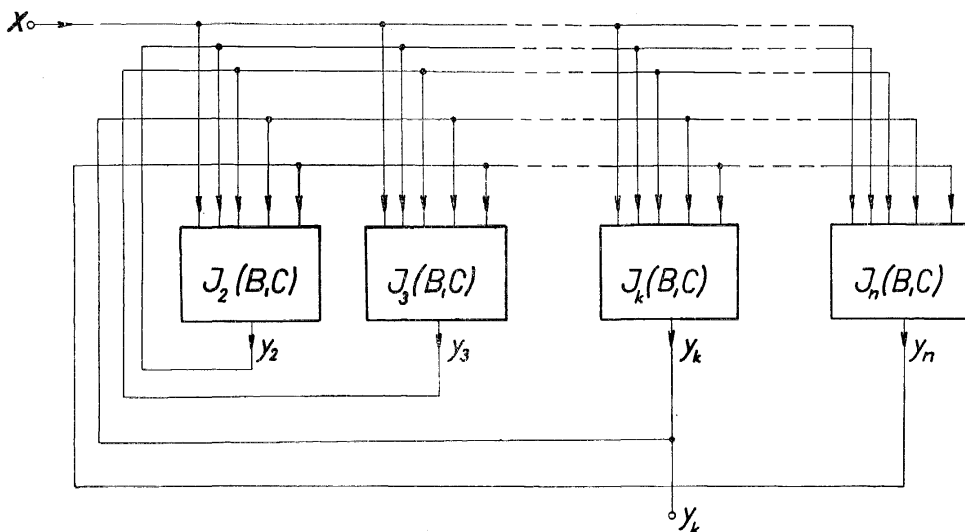
kde

$$a_{ijk} = b_{ik} c_{jk}, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Poněvadž jsme při odvození vztahu (3,4) uvažovali libovolné k , platí tento vztah pro každou počítaací jednotku a jejich vzájemné propojení podle schématu na obr. 19 odpovídá systému $(n - 1)$ diferenciálních rovnic (3,4). Uvážíme-li možnost transformace souřadného systému a nahradíme-li z čistě formálních důvodů nezávisle proměnnou y_1 za x , dostaneme po rozepsání a úpravě systém diferenciálních rovnic

$$(3,4^*) \quad dy_k = a_{01k} + a_{11k}x + a_{21k}y_2 + \dots + a_{n1k}y_n + \\ + (a_{02k} + a_{12k}x + a_{22k}y_2 + \dots + a_{n2k}y_n) dy_2 + \\ \dots + (a_{0nk} + a_{1nk}x + a_{2nk}y_2 + \dots + a_{nnk}y_n) dy_n$$

pro $k = 2, 3, \dots, n$ a libovolné konstanty a_{ijk} .



Obr. 19. Obecné programové schéma zapojení diferenciálního analyzátoru při použití $n - 1$ mechanických integrátorů a sčítaček a reduktorů.

Ve zvláštním případě, kdybychom ve schématu na obr. 19 uvažovali vesměs elektronické integrátory, museli bychom všechny konstanty c_{jk} položit rovny nule pro $j = 2, 3, \dots, n$, tzn. $a_{ijk} = 0$ pro $j = 2, 3, \dots, n$. Systém (3,4*) by se pak redukoval na jednoduchý tvar

$$(3,4^{**}) \quad \begin{aligned} dy_k &= a_{01k} + a_{11k}x + a_{21k}y_2 + \dots + a_{n1k}y_n, \\ k &= 2, 3, \dots, n. \end{aligned}$$

Jestliže lze danou diferenciální rovnici vyjádřit systémem diferenciálních rovnic (3,4*), pak ji lze řešit na diferenciálním analysátoru při použití pouze mechanických integrátorů v základním zapojení, sčítaček a reduktorů; je to podmínka nutná a postačující [10]. Obdobně — danou diferenciální rovnici lze řešit na elektronickém analogovém diferenciálním analysátoru s použitím pouze integračních, sčítačích a násobících elektrických obvodů, jestliže je možno vyjádřit ji systémem diferenciálních rovnic typu (3,4**).

Nelze-li danou diferenciální rovnici uvést na jeden ze systémů (3,4*) resp. (3,4**), pak je třeba do programového schématu zapojit¹⁰⁾ další generátory funkcí (jedné nebo více proměnných), případně integrátory v inverzním zapojení.

3.4. VYTVÁŘENÍ FUNKČNÍCH VZTAHŮ POMOCÍ ANALOGOVÉHO DIFERENCIÁLNÍHO ANALYSÁTORU

Vytváření funkčních vztahů lze v mnoha konkrétních aplikacích provádět — místo funkčními stoly — pomocí analogového diferenciálního analysátoru. Jde jmenovitě o funkce transcendentní, k jejichž vytváření stačí pouze jednoduché počítačové jednotky, jak plyne z úvah předešlého odstavce. Použití diferenciálního analysátoru k tomuto účelu spočívá na jednoduchém principu: Určí se diferenciální rovnice, jejímž partikulárním integrálem je funkce, která má být vytvářena a tato diferenciální rovnice se pak řeší; metoda stanovení takové diferenciální rovnice je popsána např. v knize [7]. Několika jednoduchými příklady věc ilustrujeme a současně ukážeme několik základních programových schémat (pro mechanický diferenciální analysátor).

$$(3,5) \quad \text{Vytváření funkce } y = ax^2 + b.$$

Funkce (3,5) je partikulárním řešením diferenciální rovnice $y' = 2ax$ při počáteční podmínce $y(0) = b$. Zapojení mechanického diferenciálního analysátoru je patrné ze schématu na obr. 20.

$$(3,6) \quad \text{Vytváření funkce } y = e^{kx} + q.$$

Funkce (3,6) je partikulárním řešením diferenciální rovnice $y' = ky$ při počáteční podmínce $y(0) = 1 + q$. Zapojení diferenciálního analysátoru je patrné ze schématu na obr. 21.

$$(3,7) \quad \text{Vytváření funkce } y = \sin(ax + b).$$

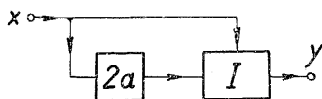
¹⁰⁾ Máme na mysli předpoklad existence řešení.

Funkce (3,7) je partikulárním řešením diferenciální rovnice $y'' + a^2y = 0$, při počátečních podmínkách $y(0) = \sin b$, $y'(0) = a \cos b$. Zapojení diferenciálního analyzátoru je patrné ze schématu na obr. 22.

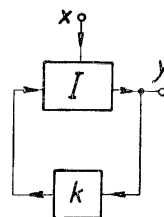
Vytváření součinu: Necht $y = f_1(x) \cdot f_2(x)$, kde f_1 a f_2 jsou po částech spojitě funkce. Tuto funkci lze též vyjádřit takto:

$$(3,8) \quad y = \int_{x_0}^x f_1(t) df_2(t) + \int_{x_0}^x f_2(t) df_1(t) + f_1(x_0) \cdot f_2(x_0),$$

přičemž jde o integrály Stieltjesovy. Funkci (3,8) lze vytvářet pomocí programového schématu na obr. 23; aditivní konstanta se v programovém schématu neprojeví; zvlášť zdůrazníme, že je třeba použít mechanických integrátorů.



Obr. 20. Programové schéma zapojení diferenciálního analyzátoru pro vytváření funkce $y = ax^2 + b$.

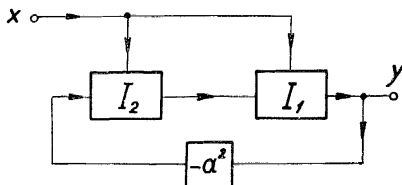


Obr. 21. Programové schéma zapojení diferenciálního analyzátoru pro vytváření funkce $y = e^{kx} + q$.

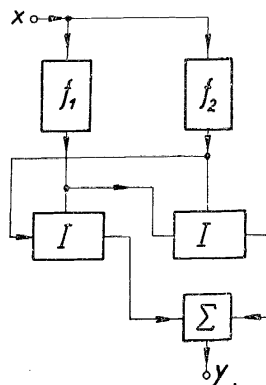
Zcela analogicky se postupuje při sestavování programových schémat zapojení diferenciálního analyzátoru jako generátoru jiných transcendent.

Jestliže použijeme některého schématu jako součásti rozsáhlejšího programového schématu při řešení diferenciální rovnice typu (3,1), pak budeme hovořit o částečném programovém schématu.

Poznámka 1: Funkce na pravé straně diferenciální rovnice (3,1) může být nejen matematická, ale též empirická nebo „zčásti empirická“ (jako na-



Obr. 22. Programové schéma zapojení diferenciálního analyzátoru pro vytváření funkce $y = \sin(ax + b)$.



Obr. 23. Programové schéma zapojení diferenciálního analyzátoru pro vytváření funkce $y = f_1(x) \cdot f_2(x)$.

př. lineární diferenciální rovnice n -tého řádu, jejíž pravá strana je empirická funkce). Do diferenciálního analyzátoru se taková empirická funkce zavede z výstupu jiného funkčního, případně měřicího zařízení.

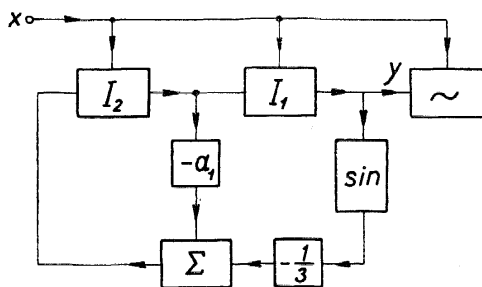
Poznámka 2: Okolnost, že se dá analogového diferenciálního analyzátoru použít k vytváření funkcí, umožňuje jeho použití jako řídicího (ovládacího) orgánu některých automatických zařízení.

3.5. PŘÍKLAD ŘEŠENÍ DIFFERENCIÁLNÍ ROVNICE POMOCÍ ANALOGOVÉHO DIFFERENCIÁLNÍHO ANALYSÁTORU

Reakci jistého asynchronního elektromotoru na daný impuls (zatížení) popisuje diferenciální rovnice

$$(3,9) \quad y'' + a_1 y' + \frac{1}{3} \sin(y + y_0) + a_2(1 - \sin y_0) = 0^{11)},$$

při daných počátečních podmínkách x_0, y_0, y'_0 a konstantách a_1, a_2 .



Obr. 24. Programové schéma zapojení diferenciálního analyzátoru pro řešení diferenciální rovnice $y'' + a_1 y' + \frac{1}{3} \sin(y + y_0) + a_2(1 - \sin y_0) = 0$ při daných počátečních podmínkách x_0, y_0, y'_0 a konstantách a_1, a_2 .

Má se sestavit programové schéma zapojení diferenciálního analyzátoru pro řešení této rovnice.

Při návrhu zapojení diferenciálního analyzátoru postupujeme podle odstavce 3,2: Upravíme diferenciální rovnici (3,9) na tvar

$$y'' = -a_1 y' - \frac{1}{3} \sin(y + y_0) - a_2(1 - \sin y_0)$$

a dále na soustavu lineárních diferenciálních rovnic (píšeme y_1 místo y):

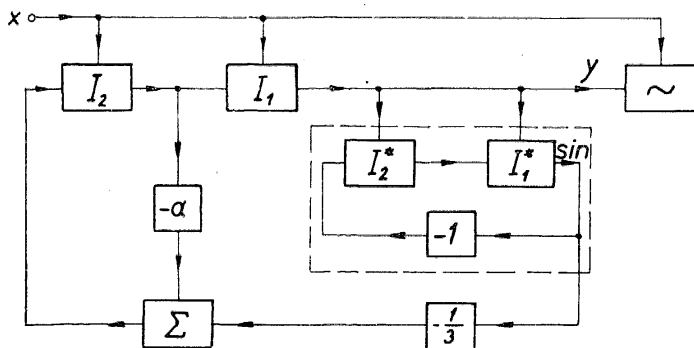
$$(3,10) \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= -a_1 y_2 - \frac{1}{3} \sin(y_1 + y_0) - a_2(1 - \sin y_0). \end{aligned}$$

Za předpokladu, že je mechanický diferenciální analyzátor vybaven alespoň dvěma funkčními stoly (jeden pro generování funkce sinové a jeden pro zápis

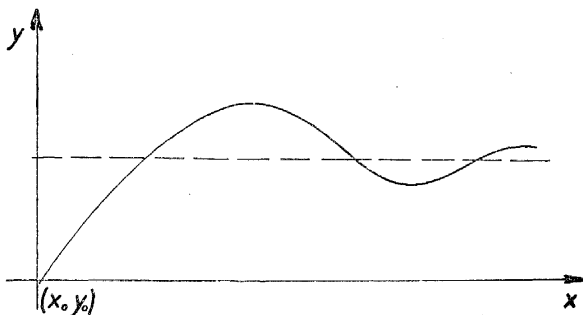
¹¹⁾ Jde o konkrétní úlohu, řešenou na elektromechanickém diferenciálním analyzátoru v Ústavu pro automatizaci a telemekhaniku ČSAV.

grafu hledané funkce y_1), bude rovnici (3,9) resp. (3,10) odpovídat obecné programové schéma zapojení na obr. 24.

Schéma zapojení se dá navrhnout ještě jinak: Funkci sinovou lze vytvářet pomocí dvou integrátorů zapojených podle částečného programového schématu na obr. 22. Modifikované schéma pro řešení diferenciální rovnice (3,9) je za-



Obr. 25. Programové schéma úlohy z obr. 24 bez použití funkčního stolu.



Obr. 26. Zápis partikulárního integrálu úlohy z obr. 24 (obkresleno a zmenšeno asi 1 : 5).

kresleno na obr. 25. Dodejme na vysvětlenou k němu, že ve vyčárkovaném obdélníku je přejato schéma z obrazu 22 jako částečné programové schéma. Konstanta $a_2(1 - \sin y_0)$ se v zapojení neprojevuje; má pouze vliv na nastavení počátečních podmínek na integrátorech.

Výsledek řešení diferenciální rovnice (3,9) je dán grafem funkce $y = y(x)$ na perforovaném pásu papíru; jeho přetisk v měřítku asi 1 : 5 je na obr. 26; plně vytažená vertikální osa představuje původní rovnovážný stav (před zatížením), vyčárkovaná přímka ustálený stav při zatížení.

Závěrem děkuji C. Sc. Aloisu Markovi za jeho podnětné připomínky k rukopisu.

Literatura

- [1] *Кобрицкий Н. Е.*: Математические машины непрерывного действия. Москва 1954.
- [2] *Hruška V.*: Počet grafický a graficko-mechanický. Praha 1952.
- [3] *Lebedev A. H.*: Счетно-решающие устройства. Москва 1958.
- [4] *Trnka Z.*: Servomechanismy. Praha 1954.
- [5] *Pěnka V., Pichý Č.*: Elektronický analogový počítač. I. a II. díl. Bratislava 1958.
- [6] *Trnka Z.*: Teoretická elektrotechnika. Praha 1956.
- [7] *Stěpanov V. V.*: Kurs diferenciálních rovnic. Praha 1950.
- [8] *Svoboda A.*: Lineární analyzátor v Československu. Československý časopis pro fyziku, 1 (1951), 10. Praha.
- [9] *Černý V., Marek A.*: Použití metody minimisace součtu absolutních hodnot residuí ke kompensaci ztrátových výkonů u lineárního analyzátoru s proudovými měniči. Stroje na zpracování informací, sborník VI, Praha 1958.
- [10] *Shannon C. E.*: Mathematical theory of the differential analyser. Journ. Math. Phys., Vol. XX, 1942.
- [11] *Gait J. J., Nutter J. C.*: Tridac — a research flight simulator. Electronic Engineering, 9 a 10, 1956.
- [12] *Wurzelfeld V.*: Analogový stroj na řešení algebraických rovnic vyšších stupňů. Stroje na zpracování informací, sborník III, Praha 1955.
- [13] *Matyáš J.*: Rozbor přesnosti elektronických diferenciálních analyzátorů. Stroje na zpracování informací, sborník V, Praha 1957.
- [14] Цифровые дифференциальные анализаторы. Сборник переводов с английского. Москва 1959.

Резюме

ОБ ОСНОВНЫХ ПРИНЦИПАХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МАШИН НЕПРЕРЫВНОГО ДЕЙСТВИЯ

СТАНИСЛАВ МАЛОŇ (Stanislav Maloň)

В статье дается обзор и формулировка основных сведений теории математических машин непрерывного действия с учетом современного состояния развития математических машин этого типа в Чехословакии.

В некоторых частях (в особенности в отделах 1, 1; 2, 1 и 2, 3) изложение носит обзорный характер; дело касается тех разделов теории, которые обширно разработаны в доступной литературе и которые хорошо известны из других дисциплин прикладной физики. Напротив, здесь подробнее и обширнее разработаны те партии, которые в стандартных учебниках большей частью недостаточно теоретически обоснованы; в особенности это касается отделов, в которых идет речь об изображении математических величин посредством физических величин и об интегрирующих устройствах. Концепция фрикционного интегрирующего устройства не исходит — как принято — из угловой скорости вращающегося звена интеграла, но из

дифференциального соотношения, справедливого для достаточно малого углового отклонения диска интегрирующего устройства; это позволяет исключить из рассуждений время как независимую переменную величину и высказать весьма общий взгляд на функцию фрикционного интегрирующего устройства. В случае электрического интегрирующего устройства изолирована ошибка интегрирования примененной интегрирующей цепи с усилителем (дрейф, частотная проницаемость усилителей, неточность пассивных элементов и утечка в конденсаторе не учитываются).

Несмотря на то, что при изложении отдельных партий не исчерпывается полностью тематика, статья дает краткие, но достаточно содержательные информации для тех читателей, которые интересуются вопросами, какие математические проблемы можно решать при помощи математических машин непрерывного действия и на каких принципах решение основано.

Summary

FUNDAMENTAL PRINCIPLES OF ANALOGUE COMPUTERS

STANISLAV MALOŇ

This paper summarises and formulates the fundamental results of the theory of analogue computers, with regard to the present state of development of analogue computers in Czechoslovakia.

In certain sections (namely §§ 1,1, 2,1 and 2,3) the treatment of the subject is merely cursory; these are those parts of the theory which either have been treated thoroughly in the available literature, or are familiar from other branches of applied physics. On the other hand, the sections whose exposition in current text-books is not adequate theoretically, are treated in greater detail; namely, the section on analogue representation of mathematical quantities and on integrators. The notion of a mechanical integrator is not based on the angular velocity of a rotating integrating wheel — as is standard — but rather on the differential relation for small deviations of the integrator discus; this eliminates time as an independent variable and enables us to obtain a very general view of the function of a mechanical integrator. For electronic integrators, the error of integration is isolated; drift, frequency selectivity of d. c. amplifiers, imprecisions due to passive elements, conductance of condensers are ignored.

Although the individual sections do not exhaust the subject, nevertheless the paper forms a coherent whole and informs, concisely but thoroughly enough, on the type of problem suitable for analogue computers and on the underlying principles.