Miloš Jílek; Otakar Líkař

Toleranční meze pro normální rozdělení

Aplikace matematiky, Vol. 5 (1960), No. 4, 239–246

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102712`

ČLÁNKY

TOLERANČNÍ MEZE PRO NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ

Miloš Jílek, Otakar Líkař

(Došlo dne 23. března 1959.)

V článku je podán přehled o různých tvarech tzv. statistických tolerančních mezí v případě jednorozměrného normálního rozdělení.

1. ÚVOD

Požadavky na jakost průmyslových výrobků bývají zpravidla vyjadřovány pomocí tolerančních mezí. Výrobky, jejichž hodnota sledovaného jakostního znaku leží vně tolerančních mezí, považujeme z těch či oněch důvodů za výrobky nevyhovující jakosti. Tak např. u strojírenských výrobků je nutno dbát o to, aby hodnoty jakostních znaků nepřekročily jisté meze, mají-li být výrobky schopny spolehlivě sloužit svému účelu. U konservovaných hotových jídel je nutno stanovit horní hranici pro obsah sole, aby konserva nebyla chuťově závadná. U léků stanovujeme dolní a horní mez obsahu účinného jedu, abychom na jedné straně zajistili účinnost léku a na druhé straně se vystříhali případného předávkování apod. Jde tedy vesměs o hlediska spotřebitelská. Při stanovení tolerančních mezí by však bylo chybou omezovat se pouze na tato hlediska. Je nutno také přihlédnout k reálným možnostem výroby a při tvorbě tolerančních mezí je respektovat.

Toleranční meze, které budou brát zřetel na reálné možnosti výroby, je možno stanovit pomocí teorie *statistických tolerančních mezí*, jejíž počátky lze vidět ve Wilksově práci [10]. Statistické toleranční meze jsou meze, stanovené na základě náhodného výběru a ohraničující tzv. *toleranční oblast*, o níž lze pronést jistý pravděpodobnostní soud.

V tomto článku se budeme zabývat tolerančními mezemi resp. tolerančními oblastmi, o nichž platí jedno z těchto dvou tvrzení:

(A) Uvnitř toleranční oblasti $\boldsymbol{T}$ leží *alespoň* podíl p základního souboru, a to s pravděpodobností P.

(B) Uvnitř toleranční oblasti $\boldsymbol{T}$ leží *průměrně* podíl p základního souboru.

Budeme při tom vycházet z předpokladu, že sledovaný znak se řídí normálním rozdělením; tento předpoklad bývá velmi často alespoň přibližně splněn.

Podle toho, zda je toleranční oblast ohraničena z obou stran nebo pouze z jedné, budeme rozlišovat toleranční meze *oboustranné* a *jednostranné* (*dolní* nebo *horní*). Tyto toleranční meze mají tvar

$m - k \,.\, d$ (dolní toleranční mez) ,
$m + k \,.\, d$ (horní toleranční mez),

kde m je známá nebo odhadnutá střední hodnota, d je známá nebo odhadnutá směrodatná odchylka a k je tzv. toleranční koeficient.

Otázkou stanovení tolerančních mezí pro normální rozdělení se prvně zabývali WALD a WOLFOWITZ [9], a to tolerančních mezí oboustranných pro případ, že neznáme žádný z parametrů normálního rozdělení a o toleranční oblasti chceme učinit tvrzení (A).

2. OZNAČENÍ

V dalších odstavcích budeme užívat tohoto označení:

μ střední hodnota normálního rozdělení,
σ směrodatná odchylka normálního rozdělení,
n rozsah náhodného výběru,
$\bar{x}$ výběrový průměr,

$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$ odhad směrodatné odchylky,

$s_\mu = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}$ odhad směrodatné odchylky při známém μ,

K_a hodnota, pro kterou platí, že

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-K_a}^{K_a} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = a ,$$

$\chi^2_{a,f}$ $100a\%$-ní kritická hodnota χ^2-rozdělení o f stupních volnosti,
$t_{a,f}$ $100a\%$-ní kritická hodnota t-rozdělení o f stupních volnosti,
$t(f, \delta, a)$ $100a\%$-ní kritická hodnota necentrálního t-rozdělení s parametrem necentrality δ o f stupních volnosti.

3. TOLERANČNÍ MEZE NORMÁLNÍHO ROZDĚLENÍ, JEHOŽ OBA PARAMETRY ZNÁME

Řešení problému — ostatně v praxi velmi vzácného — stanovit toleranční meze normálního rozdělení, jehož oba parametry známe, je triviální:

S pravděpodobností 1 bude ležet právě podíl p rozdělení v toleranční oblasti, jejíž meze mají tvar

$$\mu - k_1 \,.\, \sigma\,, \quad \mu + k_1 \,.\, \sigma$$

v případě oboustranného ohraničení toleranční oblasti nebo

$$\mu - k_2 \,.\, \sigma \text{ resp. } \mu + k_2 \,.\, \sigma$$

v případě jednostranného ohraničení toleranční oblasti, přičemž

$$k_1 = K_p \quad \text{a} \quad k_2 = K_{2p-1}\,.$$

Tabulka 1. Hodnoty koeficientů k_1 a k_2

p	0,90	0,95	0,99
k_1	1,645	1,960	2,576
k_2	1,282	1,645	2,326

4. TOLERANČNÍ MEZE NORMÁLNÍHO ROZDĚLENÍ, JEHOŽ JEDEN NEBO OBA PARAMETRY NEZNÁME — (A)

V tomto a následujícím odstavci uvedeme řešení problému stanovit toleranční meze pro normální rozdělení, jehož jeden nebo oba parametry neznáme. Nejprve se budeme zabývat tolerančními mezemi, vymezujícími toleranční oblasti, o nichž platí tvrzení (A), vyslovené v odst. 1, v následujícím odstavci tolerančními mezemi, vymezujícími toleranční oblasti, o nichž platí tvrzení (B). Tato řešení uvedeme v přehledné formě, aby nebylo nutno se neustále opakovat, a připojíme tabulky tolerančních koeficientů pro vybraná n, vybraná p a v tomto odstavci i pro vybraná P.

Oboustranné meze

Neznáme μ, známe σ:

$$\bar{x} - k_3 \,.\, \sigma, \bar{x} + k_3 \,.\, \sigma\,,$$

kde [8] k_3 musí splňovat vztahy

$$L_1 = \mu + \left(\frac{K_p}{\sqrt{n}} - k_3\right)\sigma\,,$$

$$L_2 = \mu + \left(\frac{K_p}{\sqrt{n}} + k_3\right)\sigma\,,$$

přičemž L_1 a L_2 jsou čísla, pro která platí, že

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{L_1}^{L_2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = p\,.$$

Jednostranné meze

$$\bar{x} - k_4 \,.\, \sigma \quad \text{resp.} \quad \bar{x} + k_4 \,.\, \sigma\,,$$

kde [5]

$$k_4 = K_{2p-1} + \frac{K_p}{\sqrt{n}}\,.$$

Tabulka 2. Hodnoty tolerančních koeficientů pro normální rozdělení — (A)

k	n	P								
		0,90			0,95			0,99		
		p								
		0,90	0,95	0,99	0,90	0,95	0,99	0,90	0,95	0,99
k_3	5	2,033	2,389	3,067	2,165	2,525	3,204	2,434	2,797	3,478
	10	1,854	2,198	2,860	1,932	2,283	2,953	2,106	2,464	3,144
	20	1,753	2,086	2,732	1,796	2,134	2,789	1,897	2,245	2,912
	30	1,718	2,045	2,684	1,747	2,079	2,725	1,818	2,158	2,816
	50	1,689	2,012	2,642	1,707	2,033	2,669	1,751	2,083	2,729
	100	1,667	1,986	2,610	1,676	1,997	2,624	1,699	2,023	2,657
k_4	5	2,017	2,380	3,062	2,158	2,521	3,203	2,434	2,797	3,478
	10	1,802	2,165	2,846	1,901	2,265	2,946	2,096	2,459	3,141
	20	1,649	2,013	2,694	1,720	2,083	2,765	1,858	2,221	2,902
	30	1,582	1,945	2,627	1,639	2,003	2,684	1,752	2,115	2,797
	50	1,514	1,878	2,559	1,559	1,922	2,604	1,646	2,009	2,691
	100	1,446	1,809	2,491	1,478	1,841	2,522	1,539	1,902	2,584
k_5	5	3,189	3,800	4,995	3,902	4,650	6,111	6,035	7,192	9,451
	10	2,417	2,880	3,785	2,706	3,225	4,238	3,415	4,069	5,347
	20	2,100	2,503	3,289	2,254	2,686	3,530	2,595	3,092	4,064
	30	1,992	2,374	3,120	2,105	2,508	3,296	2,346	2,796	3,674
	50	1,898	2,262	2,972	1,977	2,355	3,096	2,140	2,550	3,352
	100	1,814	2,161	2,840	1,865	2,222	2,920	1,967	2,344	3,080
k_6	5	2,485	3,189	4,511	3,040	3,902	5,519	4,702	6,035	8,536
	10	1,883	2,417	3,418	2,109	2,706	3,827	2,660	3,415	4,829
	20	1,637	2,100	2,971	1,756	2,254	3,188	2,022	2,595	3,670
	30	1,552	1,992	2,818	1,640	2,105	2,977	1,828	2,346	3,318
	50	1,479	1,898	2,684	1,540	1,977	2,796	1,668	2,140	3,027
	100	1,413	1,814	2,565	1,453	1,865	2,637	1,533	1,967	2,782
k_7	5	3,494	4,152	5,423	4,275	5,079	6,634	6,612	7,855	10,260
	10	2,535	3,018	3,959	2,839	3,379	4,433	3,582	4,265	5,594
	20	2,152	2,564	3,368	2,310	2,752	3,615	2,659	3,168	4,161
	30	2,025	2,413	3,170	2,140	2,549	3,350	2,385	2,841	3,733
	50	1,916	2,284	3,001	1,996	2,379	3,126	2,162	2,576	3,385
	100	1,822	2,172	2,854	1,874	2,233	2,934	1,977	2,355	3,096
k_8	5	2,745	3,402	4,665	3,413	4,209	5,746	5,399	6,632	9,035
	10	2,066	2,569	3,531	2,355	2,911	3,981	3,050	3,740	5,075
	20	1,766	2,205	3,051	1,926	2,396	3,294	2,276	2,805	3,830
	30	1,657	2,080	2,883	1,778	2,220	3,063	2,030	2,515	3,446
	50	1,560	1,965	2,734	1,646	2,065	2,862	1,822	2,269	3,124
	100	1,471	1,861	2,600	1,527	1,927	2,684	1,639	2,056	2,849

Známe μ, neznáme σ:

$$\mu - k_5 \,.\, s, \quad \mu + k_5 \,.\, s\,, \qquad \mu - k_6 \,.\, s \text{ resp. } \mu + k_6 \,.\, s\,,$$

kde [8] $k_5 = \dfrac{K_p}{\sqrt{\dfrac{\chi^2_{P,n-1}}{n-1}}}$. kde [5] $k_6 = \dfrac{K_{2p-1}}{\sqrt{\dfrac{\chi^2_{P,n-1}}{n-1}}}$.

Neznáme ani μ ani σ:

$$\bar{x} - k_7 \,.\, s \,,\; \bar{x} + k_7 \,.\, s \,,$$

kde [9]

$$k_7 \doteq \frac{R}{\sqrt{\dfrac{\chi^2_{P,n-1}}{n-1}}}$$

a pro R platí rovnice

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{n}}-R}^{\frac{1}{\sqrt{n}}+R} e^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x = p \,.$$

$$\bar{x} - k_8 \,.\, s \text{ resp. } \bar{x} + k_8 \,.\, s \,,$$

kde [6]

$$k_8 = \frac{1}{\sqrt{n}} t(n-1, K_p\sqrt{n}\,,\ 1-P) \,.$$

5. TOLERANČNÍ MEZE NORMÁLNÍHO ROZDĚLENÍ, JEHOŽ JEDEN NEBO OBA PARAMETRY NEZNÁME — (B)

Oboustranné meze

Neznáme μ, známe σ:

$$\bar{x} - k_9 \,.\, \sigma \,,\quad \bar{x} + k_9 \,.\, \sigma \,,$$

kde [2], [8]

$$k_9 = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\, K_p \,.$$

Známe μ, neznáme σ:

$$\mu - k_{11} \,.\, s_\mu \,,\quad \mu + k_{11} \,.\, s_\mu \,,$$

kde [2]

$$k_{11} = t_{1-p,n} \,.$$

Neznáme ani μ ani σ:

$$\bar{x} - k_{13} \,.\, s \,,\quad \bar{x} + k_{13} \,.\, s \,,$$

kde [2]

$$k_{13} = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\, t_{1-p,\,n-1} \,.$$

Jednostranné meze

$$\bar{x} - k_{10} \,.\, \sigma \text{ resp. } \bar{x} + k_{10} \,.\, \sigma \,,$$

kde [2]

$$k_{10} = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\, K_{2p-1} \,.$$

$$\mu - k_{12} s_\mu \text{ resp. } \mu + k_{12} \,.\, s_\mu \,,$$

kde [2]

$$k_{12} = t_{2(1-p),n} \,.$$

$$\bar{x} - k_{14} \,.\, s \text{ resp. } \bar{x} + k_{14} \,.\, s \,,$$

kde [2]

$$k_{14} = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\, t_{2(1-p),\,n-1} \,.$$

Tabulka 3. Hodnoty tolerančních koeficientů pro normální rozdělení — (B)

k	n	p			k	n	p		
		0,90	0,95	0,99			0,90	0,95	0,99
k_9	5	1,802	2,147	2,822	k_{12}	5	1,476	2,015	3,365
	10	1,725	2,056	2,702		10	1,372	1,812	2,764
	20	1,685	2,008	2,639		20	1,325	1,725	2,528
	30	1,672	1,992	2,618		30	1,310	1,697	2,457
	50	1,661	1,979	2,601		50	1,299	1,676	2,404
	100	1,653	1,970	2,589		100	1,290	1,660	2,364
k_{10}	5	1,404	1,802	2,548	k_{13}	5	2,335	3,041	5,043
	10	1,344	1,725	2,440		10	1,922	2,372	3,409
	20	1,313	1,685	2,384		20	1,772	2,145	2,932
	30	1,303	1,672	2,365		30	1,727	2,079	2,802
	50	1,294	1,661	2,350		50	1,693	2,029	2,706
	100	1,288	1,653	2,338		100	1,670	1,994	2,639
k_{11}	5	2,105	2,571	4,032	k_{14}	5	1,679	2,335	4,105
	10	1,812	2,228	3,169		10	1,450	1,922	2,959
	20	1,725	2,086	2,845		20	1,361	1,772	2,602
	30	1,697	2,042	2,750		30	1,333	1,727	2,503
	50	1,676	2,008	2,678		50	1,312	1,693	2,429
	100	1,660	1,984	2,626		100	1,296	1,670	2,376

6. POZNÁMKY K TABULKÁM

Z uvedených tabulek je zřejmé, že velikost tolerančních koeficientů záleží na tom, jaké množství informací o rozdělení můžeme při stanovení tolerančních mezí použít (tedy na tom, zda známe či neznáme μ a σ, a na velikosti náhodného výběru), a že čím více informací můžeme použít, tím menší budou hodnoty tolerančních koeficientů; je rovněž zřejmé, že hodnoty tolerančních koeficientů klesají s klesajícím podílem p a (v případě tolerančních mezí (A)) s klesající pravděpodobností P.

V tabulkách jsou uvedeny vybrané hodnoty z dosud napočítaných tabulek tolerančních koeficientů, jež dále jmenujeme; některé hodnoty byly napočítány pro tento článek.

Tabulka 1.

Uvedené hodnoty jsou převzaty z [3], kde jsou tabelovány (v tab. 2) hodnoty koeficientu k_2 pro $p = 0{,}001(0{,}001)0{,}999$ na tři desetinná místa; k_2 jsou rovněž tabelovány např. v [7], a to pro $p = 0{,}0001(0{,}0001)0{,}9999$ na osm desetinných míst.

Tabulka 2.

Koeficienty k_3 jsou převzaty z [5], kde jsou tabelovány pro $p = 0{,}90$; $0{,}95$; $0{,}99$; $P = 0{,}90$; $0{,}95$; $0{,}99$; $0{,}999$ a $n = 2(1)20(5)50(10)100(100)$ 300; 500; 1000; ∞.

Koeficienty k_4 jsou převzaty z [5], kde jsou tabelovány pro $p = 0,90$; 0,95; 0,99; 0,999 a tatáž P a n jako koeficienty k_3.

Koeficienty k_5 a k_6 jsou částečně převzaty z [5], kde jsou tabelovány pro $p = 0,90$; 0,95; 0,99; 0,999; $P = 0,95$; 0,99; 0,999 a $n = 2(1)20(5)50(10)100$.

Koeficienty k_7 jsou převzaty z [1] (viz také [3], tab. 35), kde jsou tabelovány pro $p = 0,75$; 0,90; 0,95; 0,99; 0,999; $P = 0,75$; 0,90; 0,95; 0,99 a n 2 = (1) 102(2)180(5)300(10)400(25)750(50)1000; ∞.

Koeficienty k_8 jsou převzaty z [4], kde jsou tabelovány pro $p = 0,90$; 0,95; 0,99; $P = 0,90$; 0,95; 0,99 a $n = 5(1)20(5)50(10)100(100)300$; 500; 1000.

Tabulka 3.

Koeficienty k_9 a k_{10} jsou převzaty z [5], kde jsou tabelovány pro $p = 0,90$; 0,95; 0,99; 0,999 a $n = 2(1)20(5)50(10)100(100)300$; 500; 1000; ∞; v [2] jsou koeficienty k_9 tabelovány pro $p = 0,75$; 0,90; 0,95; 0,975; 0,99; 0,995 a $n = 2(1)31$; 41; 61; 121; ∞.

Koeficienty k_{11} a k_{12} lze najít v různých tabulkách kritických hodnot t-rozdělení (např. [3], tab. 8).

Koeficienty k_{13} jsou částečně převzaty z [8], kde jsou tabelovány pro $p = 0,50$; 0,75; 0,90; 0,95; 0,98; 0,99; 0,999 a $n = 2(1)30$; 40; 60; 120; ∞; v [2] jsou tabelovány pro $p = 0,75$; 0,90; 0,95; 0,975; 0,99; 0,995 a $n = 2(1)31$; 41; 61; 121; ∞.

Koeficienty k_{14} jsou částečně převzaty z [5], kde jsou tabelovány pro $p = 0,75$; 0,90; 0,95; 0,99 a $n = 2(1)30$; 40; 60; 120; ∞.

Autoři děkují ředitelství Ústředního výzkumného ústavu potravinářského průmyslu a ředitelství Výzkumného ústavu ekonomiky potravinářského průmyslu za laskavý souhlas k otištění tohoto článku, který byl vypracován v souvislosti s řešením výzkumného úkolu MPP 01.13/58.

Literatura

[1] *Bowker, A. H.:* Tolerance limits for normal distributions; Selected techniques for statistical analysis (ed. by C. Eisenhart and W. A. Wallis), New York 1947, 95—110.

[2] *Fraser, D. A. S., Guttman, I.:* Tolerance regions; Ann. Math. Stat. 27 (1956), 162 to 179.

[3] *Janko, J.:* Statistické tabulky; Praha 1958.

[4] *Jílek, M., Likař O.:* Coefficients for the determination of one-sided tolerance limits of normal distribution; Ann. Inst. Stat. Math. 11 (1959), 45—48.

[5] *Jílek, M., Likař, O.:* Závěrečná zpráva úkolu MPP 01.13/58.

[6] *Johnson, N. L., Welch, B. L.:* Applications of the non-central t-distribution; Biometrika 31 (1939), 362—389.
[7] *Kelley, T. L.:* The Kelley statistical tables; New York 1938.
[8] *Proschan, F.:* Confidence and tolerance intervals for the normal distribution; Journ. Amer. Stat. Assoc. 48 (1953), 550—564.
[9] *Wald, A., Wolfowitz, J.:* Tolerance limits for a normal distribution; Ann. Math. Stat. 17 (1946), 208—215.
[10] *Wilks, S. S.:* Determination of smaple sizes for setting tolerance limits; Ann. Math. Stat. 12 (1941), 91 —96.

Резюме

ТОЛЕРАНТНЫЕ ПРЕДЕЛЫ ДЛЯ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

МИЛОШ ЙИЛЕК (Miloš Jílek), ОТАКАР ЛИКАРЖ (Otakar Líkař)

В настоящей обзорной статье приводятся различные формы так называемых статистических толерантных пределов в случае одномерного нормального распределения.

Summary

TOLERANCE LIMITS OF A NORMAL DISTRIBUTION

Miloš Jílek, Otakar Líkař

In this article there is given a survey of different forms of the so called statistical tolerance limits in the case of a one-dimensional normal distribution.