J. Boesler

Binomické řady jako náhrada diferenciálních rovnic

Aplikace matematiky, Vol. 5 (1960), No. 3, 216–224

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102708

BINOMICKÉ ŘADY JAKO NÁHRADA DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

J. BOESLER

Předneseno na IV. konferenci chemického inženýrství v Praze.
(Došlo dne 22. října 1958.)

V práci je řešeno vypírání benzenu z plynu v systému olejových praček. Matematická formulace problému vede na řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic, jejíž exaktní řešení je z hlediska praxe příliš namáhavé a zdlouhavé. Autor proto v práci navrhuje tabelární metodu, která je obrácením diferenčního postupu a která řeší diferenční problém s uspokojivým výsledkem.

Diferenciální rovnice je nejkratší a nejvýraznější vyjádření fysikálního děje. Jejímu využití stojí však v cestě dosti značné potíže v těch případech, kdy není integrovatelná elementárními prostředky. Přitom jakákoli idealisace umožňující integraci je oprávněná jen tehdy, jestliže podstatně nezkresluje děj popsaný rovnicí. Praxe často žádá rychlé řešení, tj. číselný výsledek, avšak přesné provedení integrace je časově i pracovně nákladné. Je proto výhodné přejíti k rozvoji v řadu, což je většinou výhodnější než diferenční počet. Použití sdružených binomických řad však předpokládá značný matematický aparát, takže tento způsob často neznamená úsporu ve srovnání s integrací v uzavřeném tvaru. Ve většině případů však lze výpočet řady nahradit tabelární formou výpočtu, který mohou při vhodné metodice provádět i matematicky neškolení pracovníci.

V dalším ukážeme na jednom příkladě jednu takovou metodu. Vázané benzenové pračky nejsou právě aktuálním problémem, ale jejich řešení z hlediska matematického postupu, který sleduje průběh technologického procesu, je zajímavé. (Obr. 1.)

Plyn, obsahující benzen, prochází postupně několika pračkami, v nichž se z něho vypírá benzen olejem, přičemž benzen přechází do oleje. Každá pračka má uzavřený olejový oběh. Když se olej v první pračce nasytí, vypustí se a nahradí olejem z druhé pračky, do které se přivede olej z pračky třetí atd.; do poslední pračky se přivede čerstvý olej.

Naší úlohou je určit poměr množství plynu a oleje pro různé pracovní podmínky. Nejčastěji se žádá, aby byl olej co nejvíce nasycen benzenem a aby obsah (tj. ztráty) benzenu v plynu opouštějícím systém, byly co nejmenší. Je-li technologický pochod upraven tak, že se část oleje plynule odvádí z druhé pračky do první, z třetí do druhé atd., jde o čistý protiproud a výpočet může být proveden podobně, jako pro patrovou absorpční kolonu. V našem uspořádání však nejde o protiproud a pokus o zjednodušení na základě teorie protiproudu by mohl vést k vážným chybám. Proto je třeba výpočet přizpůsobit skutečným poměrům.

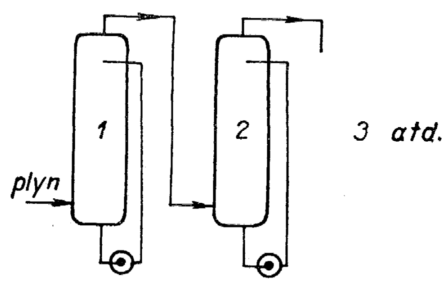
V našich úvahách můžeme předpokládat, že v rovnovážném stavu jsou koncentrace benzenu v plynné a kapalné fázi přímo úměrné, neboť koncentrace v obou fázích jsou nízké. Obyčejně se vyjadřuje obsah benzenu v plynu v g/m^3 a obsah benzenu v oleji ve váhových procentech. Můžeme tedy psát

1 g/m^3 benzenu odpovídá φ% váh.,

kde φ je funkcí teploty.

Pro srovnání uveďme několik číselných hodnot:

t°C	φ% váh.
10	0,156
20	0,1045
30	0,073



Obr. 1.

Je-li v plynu a g/m^3 benzenu, pak rovnovážná koncentrace v kapalině je φa% váh. Označíme-li W množství oleje v g a b množství benzenu v oleji v g, pak je v oleji

$$\frac{b\,.\,100}{W+b}\ \%\ \text{váh. benzenu}\ ,$$

přičemž můžeme malou hodnotu b ve jmenovateli zanedbat proti W. Rovnovážný vztah pak zní

$$\varphi a = \frac{b\,.\,100}{W}\ . \tag{1}$$

Má-li plyn při vstupu do pračky konstantní koncentraci a_0 g/m^3 a dosáhne-li při průchodu pračkou rovnovážné koncentrace a g/m^3, pak je úbytek koncentrace benzenu v plynu, který je roven přírůstku obsahu benzenu v oleji,

$$(a_0 - a)\ \text{g/m}^3\ .$$

Diferenciální rovnice zní

$$(a_0 - a)\,\mathrm{d}G = \mathrm{d}b\ , \tag{2}$$

kde G je prošlé množství plynu v m^3, a_0 koncentrace benzenu v plynu při vstupu do pračky v g/m^3, a koncentrace benzenu v plynu při výstupu z pračky v g/m^3, b koncentrace benzenu v oleji v g po průchodu G m^3 plynu.

Ze vztahu (1) můžeme vyjádřit a pomocí b resp. b pomocí a, takže pro závislost G na b resp. a dostáváme

$$G = \frac{\varphi W}{100} \ln \frac{a_0 \varphi W - 100 b_0}{a_0 \varphi W - 100 b} \tag{3}$$

resp.

$$G = \frac{\varphi W}{100} \ln \frac{a_0 \varphi W - 100 b_0}{a_0 \varphi W - a \varphi W},$$

kde b_0 je obsah benzenu v oleji na počátku děje v g.

Interakce je jednoduchá, je-li a_0 konstantní. To však platí jen pro první pračku. Pro všechny další pračky je koncentrace na vstupu a_0 totožná s výstupní koncentrací předchozí pračky a. Označíme-li pořadí praček indexy $1, 2, \ldots, m$, platí

$$a_{0,m} = a_{m-1},$$

kde $a_{0,m}$ g/m^3 je vstupní koncentrace benzenu v plynu na vstupu m-té pračky a a_m výstupní koncentrace benzenu v plynu opouštějícím m-tou pračku. Protože je a funkcí G a b_0, je diferenciální rovnice pro druhou pračku již složitější a pro další pračky je nutno buď pracovat s vhodnými pomocnými veličinami nebo provést vhodné transformace, což vyžaduje značný matematický aparát. Proto se pokusíme provést výpočet *rozvojem v řady*.

Abychom nahradili diferenciální rovnici (2), vyjdeme z rovnovážného vztahu (1) a zvolíme takové množství oleje, abychom za diferenciální množství plynu dG mohli zvolit 1 m^3. Označme a_1 vstupní koncentraci benzenu v plynu při vstupu do prvé pračky, $a_{m,n}$ g/m^3 výstupní koncentraci benzenu v n-tém m^3 plynu po průchodu m-tou pračkou, b_m vstupní koncentraci benzenu v oleji v m-té pračce, $b_{m,n}$ g koncentraci benzenu v oleji v m-té pračce po průchodu n m^3 plynu touto pračkou. Je tedy a_1 g/m^3 obsah benzenu v plynu při vstupu do první pračky, b_1 g množství benzenu ve W g oleje v první pračce předtím, než jí projde plyn. Po dosažení rovnováhy přejde z jednoho m^3 plynu x g benzenu do oleje, takže obsah benzenu v plynu pak je $a_{11} = a_1 - x$ a množství benzenu v oleji je $b_{11} = b_1 + x$. Vzhledem k rovnovážnému vztahu (1) můžeme psát

$$(a_1 - x)\,\varphi = (b_1 + x)\,\frac{100}{W}.$$

Vypočteme-li z této rovnice x a dosadíme do vztahů pro a_{11} resp. b_{11}, dostáváme

$$a_{11} = \frac{100}{\varphi W + 100}\,(a_1 + b_1),$$

$$b_{11} = \frac{\varphi W}{\varphi W + 100}\,(a_1 + b_1).$$

Označíme-li ještě

$$\frac{100}{\varphi W + 100} = K\,,$$

$$\frac{\varphi W}{100} = L\,,$$

dostaneme

$$a_{11} = K(a_1 + b_1)\,, \qquad (4)$$

$$b_{11} = KL(a_1 + b_1)\,.$$

Rovnice (4) jsou východiskem pro celý výpočet, který lze provest buď systematickým rozvojem v řadu nebo postupným vyčíslením.

ROZVOJ V ŘADU

Po průchodu 1 m³ plynu je

$$a_{11} = K(a_1 + b_1)\,,$$

$$b_{11} = KL(a_1 + b_1)\,.$$

Při průchodu druhého m³ zůstává pro první pračku a_1 konstantní a koncentrace benzenu v oleji je b_{11}. Tedy

$$a_{12} = K(a_1 + b_{11})\,,$$

$$b_{12} = KL(a_1 + b_{11})\,.$$

Dosadíme-li za b_{11} z (4), dostaneme

$$a_{12} = Ka_1 + K^2L(a_1 + b_1)\,,$$

$$b_{12} = KLa_1 + (KL)^2(a_1 + b_1)\,.$$

Je zřejmé, že je účelnější sestrojit pouze řadu pro b a příslušné a vypočítat ze vztahu $a = \frac{b}{L}$.

V druhé pračce je v oleji b_2 g benzenu před průchodem plynu a množství oleje W g je na základě technologického pochodu stejné jako v první pračce. Takže

$$b_{21} = KL(a_{11} + b_2) = KL\left(\frac{b_{11}}{L} + b_2\right),$$

$$b_{22} = KL(a_{12} + b_{21})\,.$$

V naznačeném postupu je třeba pokračovat asi do pátého až šestého m³ plynu a čtyř až pěti praček, abychom získali schéma pro určení koeficientů. Výpočet je rozsáhlý a obtížný, takže vzniká možnost chyb. I když tím vlastně získáváme podklad pro numerické řešení problému, je tento postup značně namáhavý. Konečný tvar

$$
(5) \qquad b_{m,n} = a_1 L \left\{ 1 - (KL)^n \left[1 + \binom{n}{1} K + \binom{n+1}{2} K^2 + \binom{n+2}{3} K^3 + \right. \right.
$$

$$
\left.\left. + \ldots + \binom{m+n-2}{m-1} K^{m-1} \right] \right\} + (KL)^n \left[b_m + \binom{n}{1} K b_{m-1} + \right.
$$

$$
\left. + \binom{n+1}{2} K^2 b_{m-2} + \ldots + \binom{m+n-2}{m-1} K^{m-1} b_1 \right]
$$

není sice složitý, cesta k němu je však těžká. Také vyčíslení tohoto výrazu není zvláště jednoduché.

NUMERICKÝ PŘÍKLAD

Tento příklad má ukázat na těžkosti spojené s numerickým výpočtem.

Plyn obsahuje při vstupu do soustavy praček 30 g/m³ benzenu. Žádá se, aby se prací olej co nejvíce nasytil a ztráty benzenu v odcházejících plynech byly co nejmenší. Čerstvý prací olej obsahuje 0,3% váh. benzenu. Má se určit počet praček a koncentrace plynu v oleji. Teplota je přibližně 20 °C a tedy $\varphi = 0{,}1045\%$ váh.

Nejdříve se musí zjistit maximální nasycení oleje

$$
a \cdot \varphi = \frac{b \cdot 100}{W} .
$$

Zvolíme-li $W = 10\,000$ g, pak pro $a = 30$ g/m³ je $b = 313{,}5$ g. Protože olej však nelze prakticky nasytit až k rovnováze, předpokládáme 90% nasycení, což dává pro olej odtahovaný ze systému koncentraci $b = 282$ g. Jelikož má olej přiváděný do systému $b_0 = 30$ g, čemuž odpovídá podle rovnováhy $a = 2{,}9$ g/m³ v odcházejících plynech, pojme 10 000 g oleje 282 — 30 = 252 g benzenu. Protože se z 1 m³ plynu absorbuje 30 — 2,9 = 27 g/m³, je možno vyprat přibližně 9 m³ plynu. Výpočet konstant:

$$
K = \frac{100}{\varphi W + 100} , \quad L = \frac{\varphi W}{100} .
$$

Dosadíme-li, jako dříve, $W = 10\,000$ g, dostaneme pro výpočet nepohodlné číslo. Zvolíme proto $W = 8612$ g a pak

$$
\begin{aligned}
W &= 8612 \text{ g} , \\
K &= 0{,}1 , \\
L &= 9 , \\
KL &= 0{,}9 .
\end{aligned}
$$

Počet praček nelze předem odhadnout, je proto nutno ho nejprve volit. Pro $m = 4$ dostáváme z rovnice (5)

$$2{,}581b_{1,9} = 696{,}9 - 270 + b_1\,,$$
$$2{,}581b_{2,9} = 696{,}9 - 270\,.\,1{,}9 + 0{,}9b_1 + b_2\,,$$
$$2{,}581b_{3,9} = 696{,}9 - 270\,.\,2{,}35 + 0{,}45b_1 + 0{,}9b_2 + b_3\,,$$
$$2{,}581b_{4,9} = 696{,}9 - 270\,.\,2{,}515 + 0{,}165b_1 + 0{,}45b_2 + 0{,}9b_3 + b_4\,.$$

Hodnoty b_1, b_2, b_3 jsou koncentrace benzenu v oleji před průchodem plynu. Protože se v provozu olej nasycený v druhé věži převádí do první, je

$$b_1 \equiv b_{2,9}\,,$$
$$b_2 \equiv b_{3,9}\,,$$
$$b_3 \equiv b_{4,9}\,.$$

Tím dostáváme

$$2{,}581b_{1,9} = 426{,}9 + b_{2,9}\,,$$
$$1{,}681b_{2,9} = 183{,}9 + b_{3,9}\,,$$
$$1{,}681b_{3,9} = 62{,}4 + 0{,}45b_{2,9} + b_{4,9}\,,$$
$$1.681b_{4,9} = 17{,}9 + 0{,}165b_{2,9} + 0{,}45b_{3,9} + b_4\,.$$

Je tedy $$b_4 = 7{,}9293b_{1,9} - 1871{,}22$$

nebo $$b_{1,9} = 0{,}126b_4 + 236.$$

Obsahuje-li tedy vstupující olej $b_4 = 26$ g benzenu (= 0,3% váh.), je $b_{1,9} =$ = 239,7 g nasycení, jakého dosáhne olej v první pračce.

Nás výsledek ukazuje, že nasycení oleje bude o něco vyšší než předpokládaných 90% a že lze tedy v daných poměrech skutečně vyprat 9 m^3 plynu 4 pračkami, tj. že volba počtu praček ($m = 4$) byla správná.

JEDNODUCHÁ METODA

Třebaže rozvinutí v řadu vyžaduje kromě značné matematické zběhlosti také mnoho námahy, nezískáme tak výsledek ve formě vhodné k rozpoznání funkcionálních závislostí mezi jednotlivými proměnnými. Inženýr v praxi požaduje číselné výsledky v krátké době, což předem vylučuje možnost zabývat se komplikovanými matematickými vzorci. Musíme proto hledat jednodušší postup, který se z vědeckého hlediska může zdát primitivní.

Vyjděme z rovnice (4) pro první pračku

$$b_{11} = KL(a_1 + b_1)\,,$$

kde b_{11} je koncentrace benzenu v oleji po průchodu 1 m^3 plynu s koncentrací a_1 g/m^3 benzenu. Dosadíme-li za b_{11} konečnou hodnotu, na kterou chceme olej nasytit, pak před průchodem 1 m^3 plynu je koncentrace benzenu v oleji

$$b_1 = \frac{b_{11}}{KL} - a_1\,.$$

Počítáme-li nyní tak, že postupně dosazujeme vždy znovu b_1 za b_{11}, získáme konečně hodnotu b_1 před průchodem devátého kubického metru plynu, která je koncentrací benzenu, se kterým byl přiveden olej z druhé pračky do první. Koncentraci a_{11}, která zůstává v plynu, dostaneme odečtením $b_{11} - b_1$ od a_1.

Odvoďme tímto způsobem nejprve výsledek, který jsme získali předešlou metodou. Předpokládejme, že chceme dosáhnout nasycení 239,7 g v oleji v prvé pračce.

Pračka 1		Pračka 2		Pračka 3		Pračka 4		
a	b 239,7	a	b 190,75	a	b 136,77	a	b 81,74	a
30	235,89	26,58	185,36	21,19	130,78	15,20	75,62	9,08
30	232,10	26,21	179,74	20,59	124,72	14,53	69,49	8,40
30	227,89	25,78	173,93	19,97	118,61	13,86	63,35	7,72
30	223,21	25,32	167,93	19,32	112,47	13,18	57,21	7,04
30	218,01	24,80	161,79	18,66	106,31	12,50	51,07	6,36
30	212,32	24,22	155,54	17,97	100,15	11,81	44,93	5,67
30	205,81	23,58	149,24	17,28	94,00	11,13	38,79	4,99
30	198,68	22,86	142,96	16,58	87,86	10,44	32,66	4,31
30	190,75	22,07	136,77	15,88	81,74	9,76	26,53	3,63

Touto jednoduchou metodou jsme obdrželi konečnou hodnotu $b_4 = 26,53$ nejen rychleji a snáze, než vyčíslením binomické řady, ale dostali jsme kromě toho ještě všechna mezistadia.

Použití tabelární metody nám kromě toho umožní stanovit počet praček nutných k vyprání daného počtu m³ plynu v daných poměrech.

Abychom rozhodli, máme-li dát numerickému postupu přednost, položme si ještě jinou otázku: Jak bude vypadat systém, má-li se dosáhnout nasycení 250 g benzenu v oleji? Pracujeme-li s rovnicí (5), musíme nutně provést celý výpočet pro 5,6 a 7 praček. Počítáme-li od počátku tabelárně, dostaneme:

Pračka 1		Pračka 2		Pračka 3		Pračka 4		Pračka 5		Pračka 6		Pračka 7	
a	b 250,0	a	b 217,99	a	b 182,48	a	b 146,30	a	b 110,06	a	b 73,88	a	b 37,76
30	247,75	27,75	214,44	24,20	178,54	20,26	142,28	16,24	106,04	12,22	69,86	8,20	33,75
30	245,25	27,50	210,74	23,80	174,56	19,82	138,25	15,79	102,02	11,77	65,84	7,75	29,75
30	242,47	27,22	206,91	23,39	170,55	19,38	134,22	15,35	97,99	11,32	61,83	7,31	25,74
30	239,38	26,91	202,97	22,97	166,51	18,93	130,19	14,90	93,97	10,88	57,81	6,86	
30	235,95	26,57	198,93	22,53	162,46	18,48	126,16	14,45	89,95	10,43	53,80	6,42	
30	232,14	26,19	194,82	22,08	158,41	18,03	122,13	14,00	85,93	9,98	49,79	5,97	
30	227,91	25,77	190,68	21,63	154,36	17,58	118,11	13,56	81,91	9,54	45,78	5,53	
30	223,21	25,30	186,55	21,17	150,32	17,13	114,09	13,11	77,89	9,09	41,77	5,08	
30	217,99	24,78	182,48	20,71	146,30	16,69	110,06	12,66	73,88	8,65	37,76	4,64	

Protože se olej přivádí s koncentrací 26 g benzenu, vidíme z tabulky, že se při sedmi pračkách dosáhne ve vystupujícím oleji o něco vyšší obsah než 250 g, při šesti pračkách obsah o něco nižší.

Uvedený příklad numerického postupu při řešení komplikovaných problémů měl ukázat, že jednoduchý výpočet může být výhodnější než přesný matematický výpočet, nehledě na úsporu práce kvalifikovaného pracovníka, kterou vyžaduje analytické řešení.

Резюме

БИНОМАЛЬНЫЕ РЯДЫ ВЗАМЕН ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. БЕССЛЕР (J. Boesler)

В работе решается задача устранения бензена из газа промывкой в системе масляных скрубберов. Математическая формулировка задачи приводит нас к системе линейных дифференциальных уравнений, решение которой в явном виде является с практической точки зрения слишком утомительным и длительным. На практике оказывается достаточным заменить дифференциальние соотношения разностными соотношениями и последнее решить только в нескольких первых шагах. Автор выводит явное решение разностной задачи и отмечает, что и его применение на практике не дало желательных результатов (в особенности, нельзя при помощи него дать ответ на вопрос сколько скрубберов необходимо при данных обстоятельствах имееть, чтовы решить задачу). Поэтому автор описывает в работе другой численный метод, который является, в некотором смысле, обращением разностного метода и который решает задачу с удовлетворительным результатом. Метод иллюструется на двух численных примерах.

Zusammenfassung

BINOMISCHE REIHEN ALS ERSATZ VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

J. Boesler

In dieser Arbeit wird die Frage des Auswaschens von Benzen in einem System von Waschtürmen gelöst. Die mathematische Formulierung des Problems führt auf ein System von Differentialgleichungen, dessen exakte

Lösung mit Rücksicht auf die praktische Anwendung zu anspruchsvoll und langwierig ist. Für die Praxis ist es vollkommen ausreichend die Differentialgleichungen durch Differenzengleichungen zu ersetzen und diese nur für die ersten Differenzen zu lösen. Der Autor leitet die exakte Lösung des Differenzenproblems ab und führt an, dass nicht einmal diese Vereinfachung und Anwendung den gewünschten Erfolg in der Praxis gehabt hat (es ist zum Beispiel mit Hilfe dieser Methode nicht möglich die notwendige Anzahl von Waschtürmen für die gegebenen Verhältnisse zu bestimmen). Der Autor leitet aus diesem Grunde in seiner Arbeit eine tabelarische Methode ab, welche im gewissen Sinn eine Umkehrung des Differenzenvorganges ist und durch welche das Problem befriedigend gelöst wird. Diese Methode wird durch zwei numerische Beispiele erläutert.