Aplikace matematiky

Václav Doležal

Über einige Kriterien der Monotonie von Eigenschwingvorgängen in Linearsystemen

Aplikace matematiky, Vol. 5 (1960), No. 1, 45–62

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102693

ÜBER EINIGE KRITERIEN DER MONOTONIE VON EINSCHWINGVORGÄNGEN IN LINEARSYSTEMEN

VÁCLAV DOLEŽAL

(Eingegangen am 1. Dezember 1958.)

In diesem Artikel sind einige Bedingungen für die Laplace'sche Transformierte, für welche die betreffende Originalfunktion monoton bzw. nichtnegativ ist, abgeleitet. Daneben werden Linearsysteme, die die Eigenschaft haben, daß ihre Reaktion eine nichtnegative nichtabnehmende Funktion der Zeit ist, wenn die Störung von demselben Typus ist, charakterisiert.

In der Theorie der linearen Wechselstromschaltungen und insbesondere in der Theorie der selbsttätigen Regelung muß oft festgestellt werden, ob die durch Wirkung der gegebenen Störung erregte Systemreaktion eine monotone Funktion der Zeit ist. Dabei ist die Reaktion gewöhnlich durch ihre Laplace'sche Transformierte gegeben. Diese Transformierte kann jedoch unmittelbar aus der Struktur, Elementengrößen des betrachteten Systems und der Transformierten der zugeführten Störung ermittelt werden. Deshalb, vom praktischen Standpunkt aus gesehen, ist es zweckmäßig, solche Kriterien abzuleiten, die es gestatten, direkt aus der Transformierten über das Verhalten der Originalfunktion Schlüsse zu ziehen, ohne die Originalfunktion ausrechnen zu müssen.

In diesem Artikel werden einige solche Kriterien angegeben, die unmittelbar angewendet werden können. Dabei werden nur Linearsysteme mit konzentrierten Parametern betrachtet, d. h. Systeme, deren Übertragungsfunktion eine rationale Funktion ist. Es wird nicht notwendig sein, die einschränkende Voraussetzung zu machen, daß das System passiv ist, d. h. daß alle Pole der Übertragungsfunktion in der linken komplexen Halbebene liegen.

In der Praxis ist der Fall von größter Wichtigkeit, in welchem die Störung „normiert" ist, d. h. wenn sie durch den „Einheitssprung" oder durch die Dirac'sche Distribution dargestellt ist. Infolgedessen werden vorwiegend Transformierte, die rationale Funktionen sind, betrachtet. Außerdem werden auch Systeme, die die Eigenschaft besitzen, daß ihre Reaktion auf eine beliebige monotone Störung wieder monoton ist, charakterisiert.

Nach einigen Hilfsüberlegunen im ersten Teil des Artikels werden zuerst Transformierte, die ausschließlich reelle Pole besitzen, studiert, im zweiten Teil werden auch Transformierte, die daneben komplexe Pole haben, untersucht.

Widmen wir uns also jetzt der Lösung der eben festgesetzten Probleme.

HILFSBETRACHTUNGEN

Wir bemerken zuerst, daß die folgende, gut bekannte Behauptung gilt:

Wenn $f(t)$ eine reellwertige Funktion ist, die überall in $\langle 0, \infty)$ die erste Ableitung besitzt, so ist $f(t)$ in $\langle 0, \infty)$ dann und nur dann nichtabnehmend, wenn in $\langle 0, \infty)$ $f'(t) \geqq 0$ ist.

Offenbar gilt eine analoge Behauptung für die nichtwachsenden Funktionen.

Aus dem Folgenden wird ersichtlich sein, daß es einfacher sein wird, die Bedingungen zu untersuchen, bei welchen die Originalfunktion zu der gegebenen Bildfunktion nichtnegativ ist. Weil die Originalfunktionen, welche betrachtet werden, die erste Ableitung besitzen, wird diese Aufgabe der Bestimmung von Bedingungen der Monotonie ekvivalent.

Wir führen folgende Bezeichnung ein: Die Funktion $F(p)$ soll auf dem Intervall (σ, ∞) *vollmonoton* heißen, wenn $F(p)$ in (σ, ∞) alle Ableitungen besitzt und dort $(-1)^k F^{(k)}(p) \geqq 0$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ ist. (Hier und auch im Folgenden wird $F^{(0)}(p) = F(p)$ gesetzt.) Die Menge aller solcher Funktionen wird mit $\mathfrak{M}(\sigma)$ bezeichnet.

Aus dieser Definition ist ersichtlich, daß wenn $F(p) \in \mathfrak{M}(\sigma)$ ist, so ist $F(p) \in \in \mathfrak{M}(\sigma')$ für jedes $\sigma' > \sigma$; außerdem kann man sich leicht überzeugen, daß folgende Behauptung gilt:

Es sei α irgendeine reelle Zahl; notwendig und hinreichend dafür, daß $F(p) \in \mathfrak{M}(\sigma)$, ist daß $F(p - \alpha) \in \mathfrak{M}(\sigma + \alpha)$.

Für unsere weiteren Betrachtungen ist folgender Satz wichtig:

Satz 1. *Es seien* $F_1(p) \in \mathfrak{M}(\sigma_1)$, $F_2(p) \in \mathfrak{M}(\sigma_2)$; $\alpha_1, \alpha_2 \geqq 0$; *dann gilt:*

1) $\alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p) \in \mathfrak{M}(\sigma)$,

2) $F_1(p) F_2(p) \in \mathfrak{M}(\sigma)$, *wo* $\sigma = \max [\sigma_1, \sigma_2]$.

Beweis: Die Behauptung 1) ist ersichtlich, deshalb beweisen wir 2). Infolgedessen, daß $F_1(p)$, $F_2(p)$ in (σ, ∞) sämtliche Ableitungen besitzen, gilt für jedes $n \geqq 1$

$$(F_1(p) F_2(p))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_1^{(n-k)}(p) F_2^{(k)}(p) .$$

Da aber $(-1)^{n-k} F_1^{(n-k)}(p) \geqq 0$ für $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ ist und gleichzeitig $(-1)^k F_2^{(k)}(p) \geqq 0$, so ist $(-1)^n F_1^{(n-k)}(p) F_2^{(k)}(p) \geqq 0$ und folglich auch $(-1)^n (F_1(p) F_2(p))^{(n)} \geqq 0$, w. z. b. w.

Jetzt kann schon der Satz, der die Lösung der in der Einführung des Artikels festgesetzten Fragen ermöglicht, ausgesprochen werden.

Satz 2. *Wenn $f(t)$ eine in $\langle 0, \infty)$ stetige reelle Funktion ist, für welche das Laplace'sche Integral in der Halbebene* $\operatorname{Re} p > \sigma$ *konvergiert, und wenn mit $F(p)$ die betreffende Bildfunktion bezeichnet ist, so gilt: notwendig und hinreichend dafür, daß $f(t) \geqq 0$ in $\langle 0, \infty)$ ist, ist daß $F(p) \in \mathfrak{M}(\sigma)$.*

Außerdem gilt: wenn $F(p)$ die Bildfunktion irgendeiner stetigen nichtnegativen Originalfunktion ist und $F(p) \not\equiv 0$, so gilt $(-1)^k F^{(k)}(p) > 0$ für $p \in (\sigma, \infty)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Beweis: Beweisen wir zuerst die Notwendigkeit. Es ist bekannt (vergl. [1], S. 144), daß für $\operatorname{Re} p > \sigma$ und jedes ganze $n \geqq 0$

$$F^{(n)}(p) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-pt}\, t^n f(t)\, dt \tag{1}$$

gilt; da $f(t) \geqq 0$ ist, so folgt daraus, daß $(-1)^n F^{(n)}(p) \geqq 0$ für jedes $p \in (\sigma, \infty)$ ist.

Beachten wir gleichzeitig die Tatsache, daß wenn $F(p)$ die Bildfunktion einer stetigen nichtnegativen Funktion ist und $F(p) \not\equiv 0$, so ist auch $f(t) \not\equiv 0$ und infolgedessen $\int_0^\infty e^{-pt} t^n f(t)\, dt > 0$ für $p \in (\sigma, \infty)$ (vergl. z. B. [2], S. 46). Damit ist die letzte Behauptung des Satzes 2 bewiesen. Um die Hinlänglichkeit zu beweisen, wird von dem folgenden Inversionssatz Gebrauch gemacht:

Es sei $F(p)$ in der Halbebene $\operatorname{Re} p > \sigma$ die Bildfunktion der stetigen Originalfunktion $f(t)$; dann gilt für jedes $t > 0$:

$$f(t) = \lim_{k \to \infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} F^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right). \tag{2}$$

(Bezügl. des Beweises dieses Satzes siehe [1], S. 290.)

Da in unserem Falle für jedes $t > 0$ und alle genügend große k $(-1)^k \,.\, F^{(k)}(k/t) \geqq 0$ ist, gilt nach (2), daß $f(t) \geqq 0$ ist, w. z. b. w.

Wir bemerken, daß aus der letzten Behauptung des eben bewiesenen Satzes folgt, daß im Falle, in welchem die Bildfunktion $F(p)$ irgendeiner Funktion $f(t)$ eine Nullstelle auf der reellen Achse in der Kovergenzhalbebene des Laplace'schen Integrals besitzt, so kann $f(t)$ in $\langle 0, \infty)$ nicht nichtnegativ sein. Beispielsweise, $(p + 1)/(p + 2)(p + 3)$ ist offenbar die Bildfunktion einer Funktion, für welche das Laplace'sche Integral in der Halbebene $\operatorname{Re} p > -2$ konvergiert; da die Nullstelle $-1 \in (-2, \infty)$, so ist die Originalfunktion in $\langle 0, \infty)$ nicht nichtnegativ. Infolgedessen können also solche Bildfunktionen aus unseren Betrachtungen ausgeschlossen werden.

Wir beachten jetzt die physikalische Bedeutung des Begriffes der vollmonotonen Funktion. Zu diesem Zwecke erweist sich der folgende Satz als erforderlich:

Satz 3. *Es seien $P(p)$, $Q(p)$ teilfremde Polynome mit reellen Koeffizienten, der Grad von $P(p)$ sei höchstens gleich dem Grade von $Q(p)$; ferner sei $P(p)/Q(p) \in \mathfrak{M}(\sigma)$. Wenn $F(p)$ die Bildfunktion einer in $\langle 0, \infty)$ nichtnegativen nichtabnehmenden Funktion darstellt,*[1]) *so stellt $P(p)\,F(p)/Q(p)$ wieder die Bildfunktion einer in $\langle 0, \infty)$ nichtnegativen nichtabnehmenden Funktion dar.*

Eine ähnliche Behauptung gilt, wenn $F(p)$ die Bildfunktion einer nichtpositiven nichtwachsenden Funktion ist.

Beweis: Wenn $Q(p) \equiv$ const ist, so ist die Behauptung des Satzes offenbar richtig. Es sei also $Q(p) \not\equiv$ const. Dann kann man schreiben

$$\frac{P(p)}{Q(p)} = \mu + \frac{P^*(p)}{Q(p)}\,, \tag{3}$$

wo der Grad von $P^*(p)$ kleiner als der Grad von $Q(p)$ ist. (Diese Zerlegung ist offenbar eindeutig.) Man überzeugt sich leicht davon, daß $\mu \geqq 0$ ist. Wenn nämlich $\mu < 0$ wäre, so wäre für genügend große reelle p $P(p)/Q(p) < 0$, was mit der Voraussetzung $P(p)/Q(p) \in \mathfrak{M}(\sigma)$ einen Widerspruch bildet.

Ferner sieht man leicht ein, daß $P^*(p)/Q(p) \in \mathfrak{M}(\sigma)$. In der Tat, aus (3) folgt, daß für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\left(\frac{P(p)}{Q(p)}\right)^{(n)} = \left(\frac{P^*(p)}{Q(p)}\right)^{(n)} \tag{4}$$

ist. Das bedeutet, daß $-\,[P^*(p)/Q(p)]' \in \mathfrak{M}(\sigma)$ ist. Nimmt man in Betracht, daß die Funktion $P^*(p)/Q(p) \not\equiv 0$ und eine Laplace'sche Transformierte ist, so folgt aus der letzten Behauptung des Satzes 2, daß $[P^*(p)/Q(p)]' < 0$ in (σ, ∞) ist, d. h. daß $P^*(p)/Q(p)$ in (σ, ∞) eine abnehmende Funktion darstellt. Wenn jetzt ein Punkt $p_0 \in (\sigma, \infty)$ existieren würde, in welchem $P^*(p_0)/Q(p_0) = 0$ wäre, so wäre $P^*(p)/Q(p) \to c < 0$ für $p \to \infty$, was ein Widerspruch ist. Es ist also $P^*(p)/Q(p) > 0$ und nach (4) ist $P^*(p)/Q(p) \in \mathfrak{M}(\sigma)$.

Es sei jetzt $F(p)$ die Bildfunktion irgendeiner nichtnegativen nichtabnehmenden Funktion $f(t)$. Da

$$\frac{P(p)}{Q(p)}\,F(p) = \mu\,F(p) + \frac{P^*(p)}{Q(p)}\,F(p)$$

ist, so gilt nach dem bekannten Faltungssatze (vergl. [1], S. 104—124) für die Originalfunktion $\Phi(t)$ zu der Bildfunktion $P(p)\,F(p)/Q(p)$

$$\Phi(t) = \mu\,f(t) + \int_0^t f(t - \tau)\,\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \tag{5}$$

wo mit $\varphi(t)$ die stetige Originalfunktion zu $P^*(p)/Q(p)$ bezeichnet ist. Wählt

[1]) Eine solche Funktion ist beispielsweise $2e^t$, $1 - e^{-t}$, $H_T(t)$, wo $H_T(t) = 1$ für $t > T$, $H_T(t) = 0$ für $t \leqq T$ ist, usw.

man die Zahlen t_1, t_2, $0 \leqq t_1 < t_2$ beliebig und bildet man die Differenz $\Phi(t_2) - \Phi(t_1)$, so bekommt man

$$\Phi(t_2) - \Phi(t_1) = \mu[f(t_2) - f(t_1)] + \int_{t_1}^{t_2} f(t_2 - \tau)\,\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \tag{6}$$
$$+ \int_0^{t_1} [f(t_2 - \tau) - f(t_1 - \tau)]\,\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Da $P^*(p)/Q(p) \in \mathfrak{M}(\sigma)$, ist $\varphi(t) \geqq 0$, und weil $f(t) \geqq 0$ nichtabnehmend ist, sind alle Glieder der rechten Seite der Gl. (6) nichtnegativ und infolgedessen ist $\Phi(t_2) - \Phi(t_1) \geqq 0$. Endgültig folgt unmittelbar aus (5), daß $\Phi(t) \geqq 0$ in $\langle 0, \infty)$ ist, und hiermit ist der Satz vollkommen bewiesen.

Wir widmen jetzt einige Zeilen der physikalischen Bedeutung des Satzes 3. Wir betrachten zu diesem Zwecke irgendein lineares dynamisches System, welches aus konzentrierten Elementen gebildet ist, und welches sich unter der Wirkung irgendeiner Störung $f(t)$ befindet, die in dem Systeme die Reaktion $v(t)$ hervorruft. Wenn vordem das System im Ruhezustand war, dann besteht bekanntlich zwischen $v(t)$ und $f(t)$ die Beziehung $V(p) = A(p)\,F(p)$, womit $V(p)$, $F(p)$ die Laplace'sche Transformierte der Funktion $v(t)$ bzw. $f(t)$ bezeichnet ist, und wo $A(p)$ die sogenannte „Übertragungsfunktion", die nur von der Struktur und den Elementenwerten des Systems abhängt und die eine rationale Funktion von p ist, darstellt. Wendet man den Satz 3 auf diesen Fall an, so sieht man ein, daß Systeme, die die vollmonotone Übertragungsfunktion besitzen, eine nichtnegative nichtabnehmende Reaktion erweisen, vorausgesetzt, daß die Störung von demselben Typus war. Diese Tatsache ist insbesondere in der Theorie der selbstätigen Regelung von Bedeutung, wo gewöhnlich verlangt wird, die Störung überschwingungslos auszugleichen.

Die eben ausgesprochene Behauptung kann umgekehrt werden. Wenn ein lineares System die Eigenschaft besitzt, daß seine durch jede nichtabnehmende nichtnegative Störung erregte Reaktion von demselben Typus ist, so ist die betreffende Übertragungsfunktion vollmonoton. Es genügt nur, wenn die durch den Einheitssprung hervorgerufene Reaktion nichtnegativ und nichtabnehmend ist. Es gilt nämlich folgender Satz:

Satz 3a. *Es sei $F(p)$ eine rationale Funktion; wenn $F(p)/p$ die Bildfunktion einer in $\langle 0, \infty)$ nichtabnehmenden nichtnegativen Originalfunktion darstellt, so gilt $F(p) \in \mathfrak{M}(\sigma)$.*

Beweis: Es sei $\varphi(t)$ die in $\langle 0, \infty)$ stetige Originalfunktion zu $F(p)/(p)$. Offenbar besitzt $\varphi(t)$ in $\langle 0, \infty)$ alle Ableitungen. Da $F(p)/p$ eine Bildfunktion ist, so kann man schreiben $F(p) = \mu + H(p)$, wo $H(p)$ im Punkte $p = \infty$ eine Nullstelle besitzt. Ferner gilt

$$\varphi(0) = \lim_{p \to \infty} p\,\frac{1}{p}\,F(p) = \lim_{p \to \infty} F(p) = \mu\,.$$

Die Bildfunktion zu $\varphi'(t)$ ist offenbar $F(p) - \mu$. Da $\varphi'(t) \geqq 0$ ist, so gilt $F(p) - \mu \in \mathfrak{M}(\sigma)$. Infolgedessen, daß $\varphi(t)$ in $\langle 0, \infty)$ stetig und nichtnegativ ist, gilt $\mu = \varphi(0) \geqq 0$. Hieraus laut Satz 1 folgt, daß $F(p) \in \mathfrak{M}(\sigma)$ ist, w. z. b. w.

Es sei noch bemerkt, daß aus der Tatsache, daß die durch irgendeine nichtnegative nichtabnehmende Störung erregte Systemreaktion nichtnegativ und nichtabnehmend ist, keineswegs folgt, daß die Übertragungsfunktion vollmonoton sein müßte. In der Tat, für die Transformierten $\Phi_1(p)$, $\Phi_2(p)$ der in $\langle 0, \infty)$ nichtnegativen nichtabnehmenden Funktionen $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = t - \sin t$ gilt, daß $\Phi_2(p) = \Phi_1(p)/(p^2 + 1)$ ist, wobei $1/(p^2 + 1)$ keine vollmonotone Funktion darstellt.

Wir widmen uns jetzt der Ableitung einiger hinreichenden Bedingungen, bei welchen die gegebene rationale Funktion eine vollmonotone ist, d. h. bei welchen sie die Bildfunktion einer nichtnegativen Originalfunktion darstellt. Wir untersuchen zuerst den für die technische Anwendung wichtigsten Fall, in welchem sämtliche Pole der betrachteten Funktion reell sind.

DER FALL VON AUSSCHLIESSLICH REELLEN POLEN

Wir führen folgende Bezeichnung ein: „Der Punkt p_1 liegt rechts von dem Punkte p_0" heißt, daß $\operatorname{Re} p_1 \geqq \operatorname{Re} p_0$ ist. Dann gilt folgender Satz:

Satz 4. *Es seien $P(p)$, $Q(p)$ Polynome mit reellen Koefizienten, der Koefizient bei der höchsten Potenz von $P(p)$ und $Q(p)$ sei positiv; wenn sämtliche Wurzeln von $Q(p)$ reell sind und jede Wurzel p_P des Polynoms $P(p)$ irgendeiner Wurzel p_Q des Polynoms $Q(p)$, die rechts von p_P liegt, in der Weise zugeordnet werden kann, daß jeder Wurzel p_Q höchstens eine Wurzel p_P zugeordnet ist, so ist $P(p)/Q(p)$ auf irgendeinem Intervall vollmonoton. Dabei wird die n-fache Wurzel als n Wurzeln genommen.*

Um den Charakter solcher Wurzelzuordnung, von welcher der Satz spricht, anschaulicher zu machen, ist auf Abb. 1 ein Beispiel angegeben. Die Wurzeln von $P(p)$ sind dort mit Kreischen, Wurzeln von $Q(p)$ mit Kreuzchen bezeichnet.

Beweis: Beachten wir zuerst, daß $a/(p + b) \in \mathfrak{M}(-b)$ ist, falls $a \geqq 0$, woraus auch $(p + c)/(p + b) \in \mathfrak{M}(-b)$ für $c \geqq b$ folgt. Für die rationale Funktion $P(p)/Q(p)$ kann man schreiben

$$\frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{A \prod\limits_i (p + \alpha_i) \prod\limits_j [(p + \beta_j)^2 + \gamma_j^2]}{\prod\limits_k (p + \delta_k)}, \tag{7}$$

wo $A > 0$, $\gamma_j > 0$ und wo α_i, β_j, δ_k reelle Zahlen sind (im Allgemeinen brauchen sie notwendigerweise nicht alle verschieden zu sein). Nach der Voraussetzung des Satzes kann man solche Nummerierung aller Wurzel finden, daß man (7) in folgender Form schreiben kann

$$\text{(8)} \qquad \frac{P(p)}{Q(p)} = A \prod_{k=1}^{r} \frac{1}{p+\xi_k} \prod_{i=1}^{n} \frac{p+\alpha_i}{p+\varrho_i} \prod_{j=1}^{m} \frac{(p+\beta_j)^2+\gamma_j^2}{(p+\sigma_j)(p+\varkappa_j)} \, ,$$

wobei r, n, $m \geqq 0$, $\alpha_i \geqq \varrho_i$, $\beta_j \geqq \sigma_j$, $\beta_j \geqq \varkappa_j$ ist. Außerdem gilt

$$\text{(9)} \qquad \Phi_j(p) = \frac{(p+\beta_j)^2+\gamma_j^2}{(p+\sigma_j)(p+\varkappa_j)} = \frac{p+\beta_j}{p+\sigma_j} \cdot \frac{p+\beta_j}{p+\varkappa_j} + \frac{\gamma_j^2}{(p+\sigma_j)(p+\varkappa_j)} \, .$$

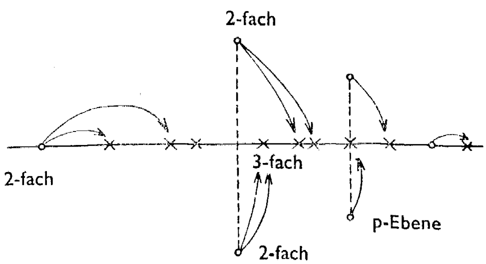

Abb. 1.

Da die Brüche, die auf der rechten Seite der Gl. (9) stehen, auf irgendeinem Intervall vollmonoton sind, ist nach Satz 1 auch $\Phi_j(p)$ vollmonoton, und deshalb auch $P(p)/Q(p)$, w. z. b. w.

Wir bemerken, daß in dem eben bewiesenen Satze zwei folgende Spezialfälle enthalten sind:

a) *Wenn* $C > 0$ *und* $Q(p) \not\equiv$ const *ein Polynom mit ausschließlich reellen Wurzeln und positiven Koeffizient bei der höchsten Potenz ist, so ist* $C/Q(p)$ *auf irgendeinem Intervall vollmonoton und stellt die Bildfunktion irgendeiner nichtnegativen Originalfunktion dar.*

b) *Es seien* $P(p)$, $Q(p)$ *Polynome mit ausschließlich reellen Wurzeln, die Koeffizienten bei der höchsten Potenz seien positiv, und der Grad von* $P(p)$ *sei um eins kleiner als der Grad von* $Q(p)$. *Wenn zwischen je zwei nebenliegenden Wurzeln von* $Q(p)$ *gerade eine Wurzel von* $P(p)$ *liegt, so ist* $P(p)/Q(p)$ *vollmonoton und stellt die Bildfunktion irgendeiner nichtnegativen Funktion dar.*

Die Behauptung b) bedeutet physikalisch beispielsweise, daß der Scheinwiderstand jedes *RC*-Zweipols eine vollmonotone Funktion ist.

Wir führen jetzt Beispiele, die die Anwendung des Satzes 4 illustrieren, an.

Beispiel 1. Man soll entscheiden, ob die folgende Übertragungsfunktion $F(p)$ vollmonoton ist.

$$F(p) = \frac{p^4 + 12p^3 + 56p^2 + 120p + 100}{p^5 + 11p^4 + 62p^3 + 70p^2 + 53p + 15} \, .$$

Bezeichnet man mit x_i die Wurzeln des Zählers, mit y_i die Wurzeln des Nenners von $F(p)$, so bekommt man leicht folgende Werte:

$$x_1 = x_2 = -3 + i\,, \quad x_3 = x_4 = -3 - i\,, \quad y_1 = y_2 = y_3 = -1\,,$$
$$y_4 = -3\,, \quad y_5 = -5\,.$$

Offenbar kann man jede Wurzel x_i der rechtsliegenden Wurzel y_i folgendermaßen zuordnen $x_1 \to y_1$, $x_2 \to y_2$, $x_3 \to y_3$, $x_4 \to y_4$, und da jeder Wurzel y_k höchstens eine Wurzel x_i zugeordnet ist, so gilt $F(p) \in \mathfrak{M}(-1)$.

Beispiel 2. Man soll feststellen, ob die folgende Funktion $G(p)$ die Bildfunktion irgendeiner monotonen Funktion darstellt.

$$G(p) = \frac{-p^4 - 7p^3 - 14p^2 - 3p + 11}{p^5 + 8p^4 + 22p^3 + 24p^2 + 9p}\,.$$

Bezeichnet man mit $g(t)$ die Originalfunktion zu $G(p)$, so besitzt $g(t)$ in $\langle 0, \infty)$ bekanntlich alle Ableitungen. Für die Bildfunktion $H(p)$ der ersten Ableitung $g'(t)$ gilt $H(p) = p\,G(p) - g(0)$. Nach dem Tauber'schen Satze (vergl. [1]) gilt jedoch $g(0) = \lim\limits_{p \to \infty} p\,G(p) = -1$. Durch das Einsetzen bekommt man

$$H(p) = p\,G(p) + 1 = \frac{p^3 + 8p^2 + 21p + 20}{p^4 + 8p^3 + 22p^2 + 24p + 9}\,.$$

Wie schon oben erwähnt wurde, hinreichend dafür, daß $g(t)$ nichtabnehmend ist, ist $g'(t) \geqq 0$, und deshalb genügt es die Funktion $H(p)$ in Betracht zu nehmen. Nach einigen Zwischenrechnungen bekommt man folgende Wurzeln des Zählers $-2 \pm i$; -4 und Nenners -1; -1; -3; -3. Ordnet man $-2 + i \to -1$, $-2 - i \to -1$, $-4 \to -3$ zu, so handelt es sich offebar um die im Satze 4 besprochene Zuordnung und deshalb ist $g'(t) \geqq 0$. Folglich ist $g(t)$ in $\langle 0, \infty)$ eine nichtabnehmende Funktion.

Wir bemerken, daß die in Satz 4 enthaltenen hinreichenden Bedingungen keineswegs notwendige sind. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß beispielsweise $(p + 1)(p + 2)/p(p + 3) \in \mathfrak{M}(0)$ ist. In diesem Falle ist Satz 4 keiner Entscheidung fähig. Wir leiten also noch ein anderes Kriterium ab. Es gilt folgender Satz:

Satz 5. *Es sei*

$$F(p) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_i^{(k)}}{(p + \beta_i)^k}\,, \quad \alpha_0 \geqq 0\,, \quad \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \ldots < \beta_n\,;$$

wenn für $k = 1, 2, \ldots, m$ folgende Ungleichungen

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{(k)} \geqq 0 \quad \textit{für} \quad r = 1, 2, \ldots, n \tag{10}$$

befriedigt sind, so gilt $F(p) \in \mathfrak{M}(-\beta_1)$.

Zum Beweis machen wir von dem gut bekannten Abel'schen Lemma Gebrauch:

Wenn λ_i, ε_i reelle Zahlen sind, $\varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 \geqq \varepsilon_3 \geqq \ldots \geqq \varepsilon_n \geqq 0$ und für $k = 1, 2, \ldots, n$ die Ungleichungen $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k \geqq A$ erfüllt sind, so gilt $\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n \geqq A\varepsilon_1$.

In der Tat, für $n = 1$ ist das Lemma richtig. Wenn $n > 1$ und man $s_k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k$ setzt, so kann man schreiben

$$s = \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n = s_1\varepsilon_1 + (s_2 - s_1)\,\varepsilon_2 + (s_3 - s_2)\,\varepsilon_3 + \ldots + (s_n - s_{n-1})\,\varepsilon_n = s_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + s_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \ldots + s_{n-1}(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) + s_n\varepsilon_n\,.$$

Hieraus folgt

$$s \geqq A(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + A(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \ldots + A(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) + A\varepsilon_n = A\varepsilon_1\,,$$

w. z. b. w.

Wir beweisen jetzt Satz 5. Für jedes $p > -\beta_1$ und jedes $k = 1, 2, \ldots, m$ gilt

$$\frac{1}{(p+\beta_1)^{k+r}} > \frac{1}{(p+\beta_2)^{k+r}} > \ldots > \frac{1}{(p+\beta_n)^{k+r}} > 0\,; \quad r \geqq 0\,.$$

Nach der Voraussetzung (10) und nach dem Lemma gilt für $k = 1, 2, \ldots, m$ und jedes $r \geqq 0$, daß

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_i^{(k)}}{(p+\beta_i)^{k+r}} \geqq 0 \quad \text{ist}\,.$$

Addiert man diese Ungleichungen für $k = 1, 2, \ldots, m$ und für $r = 0$, bekommt man

$$F(p) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^{(k)}}{(p+\beta_i)^{k}} \geqq 0\,;$$

durch Multiplikation der k-ten Ungleichung mit der Zahl $k(k+1)\ldots(k+r-1)$ und durch Addition ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \frac{(k+r-1)!}{(k-1)!} \cdot \frac{\lambda_i^{(k)}}{(p+\beta_i)^{k+r}} = (-1)^r F^{(r)}(p) \geqq 0\,,$$

und deshalb ist $F(p) \in \mathfrak{M}(-\beta_1)$, w. z. b. w.

Wir beachten, daß im Falle, in welchem die Pole der Funktion $F(p)$ einfach sind, die Bedingung (10) der Bedingung

$$\sum_{i=1}^{r} \operatorname*{Res}_{-\beta_i} F(p) \geqq 0 \quad \text{für} \quad r = 1, 2, \ldots, n \tag{11}$$

gleichbedeutend ist.

Für das oben angeführte Beispiel der Funktion $G(p) = (p + 1)(p + 2) / / p(p + 3)$ bekommt man $\alpha_0 = 1$; $\operatorname*{Res}_{0} G(p) = 2/3$, $\operatorname*{Res}_{-3} G(p) = -2/3$, sodaß (11) befriedigt ist und wirklich $G(p) \in \mathfrak{M}(0)$ ist.

Wir bemerken, daß der eben bewiesene Satz keine Verallgemeinerung des Satzes 4 darstellt. Das beweist das Beispiel der Funktion $H(p) = 1/p(p + 1) \cdot . (p + 2)$, die laut Satz 4 vollmonoton ist, für welche jedoch $\operatorname*{Res}_{0} H(p) = 1/2$; $\operatorname*{Res}_{-1} H(p) = -1$; $\operatorname*{Res}_{-2} H(p) = 1/2$, sodaß (11) nicht erfüllt ist und infolgedessen ist Satz 5 keiner Entscheidung fähig.

Anschaulichkeitshalber führen wir ein Beispiel, das die Anwendung des Satzes 5 illustriert, an.

Beispiel 3. Es sei

$$F(p) = 1 + \frac{3}{p+1} - \frac{2}{p+2} - \frac{1}{p+3} + \frac{1}{p+4} + \\ + \frac{2}{(p+1)^2} - \frac{1}{(p+2)^2} - \frac{1}{(p+3)^2} + \\ + \frac{4}{(p+1)^3} - \frac{1}{(p+3)^3} - \frac{3}{(p+4)^3} .$$

Da hier $3 \geqq 0$; $3 - 2 \geqq 0$; $3 - 2 - 1 \geqq 0$, $3 - 2 - 1 + 1 \geqq 0$ ist und analoge Ungleichungen für die Koeffizienten bei den zweiten und dritten Potenzen gelten, ist $F(p) \in \mathfrak{M}(-1)$.

Wir widmen noch einige Worte einem Spezialfall des Satzes 5, der wegen seiner Einfachheit gewisse Bedeutung für die Anwendung hat. Es gilt:

Satz 5a. *Es sei* $P(p) = p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3$; $Q(p) = (p + \beta_1)(p + \beta_2) \cdot . (p + \beta_3)$; $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$. *Wenn* $P(-\beta_1) > 0$, $P(-\beta_2) \leqq 0$ *und* $a_1 \geqq \beta_1 + + \beta_2 + \beta_3$ *ist, so gilt* $P(p)/Q(p) \in \mathfrak{M}(-\beta_1)$.

Beweis: Da $Q(p) > 0$ für $p > -\beta_1$ ist, gilt offenbar $Q'(-\beta_1) > 0$, $Q'(-\beta_2) < 0$; weil

$$\lambda_i = \operatorname*{Res}_{-\beta_i} P(p)/Q(p) = P(-\beta_i)/Q'(-\beta_i) ,$$

so ist $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \geqq 0$. Dem Residuensatz nach gilt weiter

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|p|=r} \left(\frac{P(p)}{Q(p)} - 1\right) \mathrm{d}p ,$$

sobald $r > \max\limits_{i=1,2,3} |\beta_i|$. Da aber $p(P(p)/Q(p) - 1) \to a_1 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3$ für $p \to \infty$ gleichmäßig nach arg p, bekommt man

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|p|=r} \left(\frac{P(p)}{Q(p)} - 1\right) \mathrm{d}p \to a_1 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3$$

für $r \to \infty$, sodaß $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \alpha_1 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 \geqq 0$ ist. Weil $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ ist, gilt laut Satz 5, daß $P(p)/Q(p) \in \mathfrak{M}(-\beta_1)$ ist, w. z. b. w.

Wir widmen uns jetzt der Ableitung von Kriterien für die Fälle, in welchen die betrachtete Funktion auch komplexe Pole besitzt.

DER FALL VON KOMPLEXEN POLEN

Vor Allem ist klar, daß der Fall, in welchem eine vollmonotone Funktion ausschließlich komplexe Pole besitzt, nicht möglich ist. Sinngemäß kann man sich leicht davon überzeugen, daß eine vollmonotone Funktion einen solchen komplexen Pol, von dem rechts kein reeller Pol liegt, nicht haben kann.

Die Richtigkeit dieser Behauptungen kann man beispielsweise folgendermaßen einsehen: Es seien $P(p)$, $Q(p)$ Polynome mit reellen Koeffizienten, deren Koeffizienten bei der Höchstpotenz positiv sind und dabei sei der Grad von $P(p)$ höchstens gleich dem Grade von $Q(p)$. Wenn $P(p)/Q(p) \in \mathfrak{M}(\sigma)$ ist, dann gilt $P(p)/Q(p) = \alpha + P^*(p)/Q(p)$, wo $\alpha \geqq 0$, die Funktion $P^*(p)/Q(p) \in \mathfrak{M}(\sigma)$ und die Bildfunktion irgendeiner in $\langle 0, \infty)$ nichtnegativen Funktion $f(t)$ darstellt. (Die Richtigkeit dessen wurde schon höher erwiesen.) Hätte jetzt die Funktion $P(p)/Q(p)$ mindestens einen solchen einfachen komplexen Pol, von welchem rechts kein reeller Pol liegen würde, so enthielte $f(t)$ das Glied

$$g(t) = \sum_{i=1}^{m} e^{-\xi t}\{A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t\}\,, \quad \omega_i > 0\,, \quad m \geqq 1\,.$$

(Offenbar besitzen $P(p)/Q(p)$ und $P^*(p)/Q(p)$ dieselben Pole.) Dabei wäre für die anderen Glieder von $f(t)$, die die Form

$$t^q e^{-\lambda_k t}\{A_k \cos \Omega_k t + B_k \sin \Omega_k t\}$$

haben, $\lambda_k > \xi$. Das bedeutet jedoch, daß für irgendwelche, genügend große t $f(t) < 0$ wäre, was ein Widerspruch ist.

Beachten wir zuerst zwei einfache Spezialfälle, und dann leiten wir ein allgemeineres Kriterium ab. Mühelos kann folgender elementare Satz bewiesen werden:

Satz 6. *Es sei*

$$F(p) = \frac{a(p+\alpha)^2 + b(p+\alpha) + c}{[(p+\alpha)^2 + \omega^2](p+\alpha^*)}\,,$$

wo $\alpha \geqq \alpha^*$, $\omega > 0$. *Wenn*

$$c \geqq 0\,, \quad 2ac \geqq a^2\omega^2 + b^2\,, \tag{12}$$

ist, so gilt $F(p) \in \mathfrak{M}(-\alpha^*)$.

Um diesen Satz zu beweisen, betrachten wir folgende Funktion

$$G(p) = \frac{ap^2 + bp + c}{p(p^2 + \omega^2)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{c}{\omega^2} + \frac{p(a\omega^2 - c) + b\omega^2}{\omega^2(p^2 + \omega^2)}\,. \tag{13}$$

Offenbar stellt $G(p)$ die Bildfunktion der Funktion

$$g(t) = \frac{c}{\omega^2} + \frac{a\omega^2 - c}{\omega^2} \cos \omega t + \frac{b}{\omega} \sin \omega t$$

dar. Ferner gilt

$$\min_{t \in \langle 0, \infty)} \left(\frac{a\omega^2 - c}{\omega^2} \cos \omega t + \frac{b}{\omega} \sin \omega t \right) = - \left[\left(\frac{a\omega^2 - c}{\omega^2} \right)^2 + \frac{b^2}{\omega^2} \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= - \frac{1}{\omega^2} [c^2 + \omega^2(a^2\omega^2 + b^2 - 2ac)]^{\frac{1}{2}} .$$

Wenn die Zahlen a, b, c, ω die Ungleichungen (12) erfüllen, so ist $\min_{t \in \langle 0, \infty)} (\ldots) \geqq$ $\geqq - c/\omega^2$, und deshalb ist $g(t) \geqq 0$. Hieraus folgt laut Satz 2, daß $G(p) \in \mathfrak{M}(0)$ ist und infolgedessen ist

$$\frac{a(p + \alpha)^2 + b(p + \alpha) + c}{[(p + \alpha)^2 + \omega^2](p + \alpha)} \in \mathfrak{M}(- \alpha) ;$$

multipliziert man diesen Ausdruck mit der Funktion $(p + \alpha)/(p + \alpha^*) \in$ $\in \mathfrak{M}(- \alpha^*)$, wo $\alpha \geqq \alpha^*$ ist, bekommt man $F(p)$ und nach Satz 1 gilt $F(p) \in$ $\in \mathfrak{M}(- \alpha^*)$, w. z. b. w.

Weiter gilt folgender Satz:

Satz 7. *Es sei*

$$F(p) = \frac{1}{p + \alpha^*} \prod_{k=1}^{n} \frac{(p + \alpha)^2 + a_k^2}{(p + \alpha)^2 + b_k^2} ;$$

wenn $\alpha \geqq \alpha^*$ *und* $0 < b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \ldots < b_n < a_n$ *ist, so gilt* $F(p) \in$ $\in \mathfrak{M}(- \alpha^*)$.

Beweis: Wir betrachten die Funktion $\Phi(x) = P(x)/Q(x)$, wo $P(x) =$ $= \prod_{k=1}^{n} (x + a_k^2)$, $Q(x) = \prod_{k=1}^{n} (x + b_k^2)$ ist, und wo die Zahlen a_k, b_k der Ungleichung des Satzes 7 genügen. Schreibt man $\Phi(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k/(x + b_k^2)$, sieht man leicht ein, daß $\lambda_k > 0$ ist. In der Tat, es gilt $\lambda_k = P(- b_k^2)/Q'(- b_k^2)$ und da zwischen je zwei nebeneinanderliegenden Wurzeln des Polynoms $Q(x)$ gerade eine Wurzel des Polynoms $P(x)$ liegt, gilt $P(- b_{k+1}^2)\, P(- b_k^2) < 0$ für $k = 1, 2, \ldots, n - 1$. Aus dem Rolle'schen Satz folgt in gleicher Weise, daß $Q'(- b_{k+1}^2)\, Q'(- b_k^2) < 0$ ist, sodaß $\lambda_{k+1} . \lambda_k > 0$, d. h. daß alle λ_k dieselben Vorzeichen besitzen. Da aber $P(x) > 0$ für $x > - a_1^2$, und $Q'(- b_1^2) > 0$ ist, gilt $\lambda_1 > 0$ und infolgedessen auch $\lambda_k > 0$ für $k = 1, 2, \ldots, n$. Es gilt also

$$(14) \qquad \psi(p) = \frac{1}{p} \prod_{k=1}^{n} \frac{p^2 + a_k^2}{p^2 + b_k^2} = \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{p(p^2 + b_k^2)} , \quad \lambda_k > 0 .$$

Setzt man in dem Satze 6 $\alpha = \alpha^* = a = b = 0$, $c = 1$, sind seine Voraussetzungen erfüllt und man hat $1/p(p^2 + \omega^2) \in \mathfrak{M}(0)$. Dem Satze 1 nach gilt also $\psi(p) \in \mathfrak{M}(0)$. Ersetzt man endgültig in (14) p mit $p + \alpha$ und multipliziert mit $(p + \alpha)/(p + \alpha^*)$, erhält man $F(p) \in \mathfrak{M}(-\alpha^*)$, w. z. b. w.

Bemerkung: Es ist klar, daß in konkreten Fällen der Untersuchung von Funktionen alle abgeleiteten Kriterien, nicht nur das eine, angewendet werden können, vorausgesetzt, daß die betrachtete Funktion in dem Sinne passend zerlegt werden kann, daß Satz 1 für eine solche Zerlegung anwendbar ist.

Beispiel 4. Man soll entscheiden, ob folgender Ausdruck $F(p)$ die Bildfunktion einer monotonen Funktion darstellt.

$$F(p) = \frac{2p^6 - p^5 + 7p^4 - 6p^3 - 8p - 8}{p^3(p^4 + 4p^2 + 3)} .$$

Hier ist $p\,F(p) \to 2$ für $p \to \infty$, sodaß für die Bildfunktion $G(p)$ der Ableitung $f'(t)$ der Originalfunktion zu $F(p)$ gilt

$$G(p) = p\,F(p) - 2 = -\frac{p^5 + p^4 + 6p^3 + 6p^2 + 8p + 8}{p^2(p^4 + 4p^2 + 3)} ;$$

durch Zerlegung folgt

$$-G(p) = \frac{(p + 1)(p^2 + 2)(p^2 + 4)}{p^2(p^2 + 1)(p^2 + 3)} .$$

Da $(p + 1)/p \in \mathfrak{M}(0)$ und da laut Satz 7 $(p^2 + 2)(p^2 + 4)/p(p^2 + 1)(p^2 + 3) \in \mathfrak{M}(0)$ ist, gilt $-G(p) \in \mathfrak{M}(0)$ dem Satze 1 nach, und infolgedessen ist $f'(t) \leqq 0$. Die Funktion $f(t)$ ist also in $\langle 0, \infty)$ nichtwachsend.

Für die Ableitung des allgemeineren Kriteriums führen wir folgende Bezeichnung ein:

Es sei $\mathfrak{P}(\alpha)$ das System sämtlicher Funktionen $G(p)$, die folgende Eigenschaften besitzen:

1) $G(p)$ ist eine rationale Funktion mit reellen Koeffizienten, die in der Halbebene $\operatorname{Re} p > \alpha$ keine Pole hat,

2) $\operatorname{Re} G(p) > 0$ für $\operatorname{Re} p > \alpha$.

Dem Leser ist gewiß klar, daß für $\alpha = 0$ das System $\mathfrak{P}(0)$ mit dem Systeme der aus der Netzwerktheorie gut bekannten *„positiv reellen Funktionen“* identisch ist.

Aus der eben ausgesprochenen Definition ergeben sich unmittelbar folgende einfache Behauptungen:

a) *Wenn $G(p) \in \mathfrak{P}(\alpha)$ ist, so gilt $G(p) \in \mathfrak{P}(\beta)$ für $\beta > \alpha$.*

b) *Notwendig und hinreichend dafür, daß $G(p) \in \mathfrak{P}(\alpha)$, ist daß $G(p + \alpha) \in \mathfrak{P}(0)$.*

Jetzt kann schon das Kriterium angeführt werden:

Satz 8. *Wenn $G(p) \in \mathfrak{P}(\alpha)$ ist, dann ist $G(p)/(p-\alpha)^2 \in \mathfrak{M}(\alpha)$ und $G(p)/(p-\alpha)^2$ ist die Laplace'sche Transformierte.*[2])

Zum Beweis dieser Behauptung wird von folgendem Hilfssatze Gebrauch gemacht:

Wenn $H(p) \in \mathfrak{P}(0)$ ist, so gibt es Zahlen $\lambda_\infty, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geqq 0$, $0 < \omega_1 < < \omega_2 < \ldots < \omega_n$ und eine reelle Funktion $R(\omega)$, sodaß für $\mathrm{Re}\, p > 0$

$$H(p) = \lambda_\infty p + \frac{\lambda_0}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i p}{p^2 + \omega_i^2} + \frac{2p}{\pi} \int_0^\infty \frac{R(\omega)\, \mathrm{d}\omega}{p^2 + \omega^2} \tag{15}$$

gilt, wobei

1) $R(\omega) = \mathrm{Re}\, H(i\omega)$ *für jedes* $\omega \neq 0, \omega_i$,

2) $R(\omega) \geqq 0$,

3) *das Integral in der Gl.* (15) *konvergiert absolut und gleichmäßig nach p in jeder abgeschlossenen Menge, die innerhalb der Halbebene* $\mathrm{Re}\, p > 0$ *liegt.*

(Bezüglich des Beweises dieses Satzes vergl. [3], S. 781.)

Beweisen wir jetzt Satz 8. Setzt man $H(p) = G(p+\alpha) \in \mathfrak{P}(0)$, so kann man mit Hilfe der Gl. (15) schreiben

$$\frac{H(p)}{p^2} = \frac{\lambda_\infty}{p} + \frac{\lambda_0}{p^3} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{p(p^2 + \omega_i^2)} + \Phi(p)\,; \quad \Phi(p) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{R(\omega)\, \mathrm{d}\omega}{p(p^2+\omega^2)}\,. \tag{16}$$

Bekanntlich gilt λ_∞/p, λ_0/p^3, $\lambda_i/p(p^2+\omega_i^2) \in \mathfrak{M}(0)$. Man überzeugt sich leicht davon, daß auch $\Phi(p) \in \mathfrak{M}(0)$ ist. Es gilt nämlich

$$\frac{\mathrm{d}^k \Phi(p)}{\mathrm{d}p^k} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}p^k} \left(\frac{1}{p(p^2+\omega^2)} \right) R(\omega)\, \mathrm{d}\omega\,, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{17}$$

In der Tat, für jedes $k \geqq 1$ konvergiert das Integral auf der rechten Seite der Gl. (17) gleichmäßig in jeder abgeschlossenen Menge, die innerhalb der Halbebene $\mathrm{Re}\, p > 0$ liegt, da

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}p^k} \left(\frac{1}{p(p^2+\omega^2)} \right) = \frac{P_k(p, \omega)}{p^{k+1}(p^2+\omega^2)^{k+1}}$$

ist, wo $P_k(p, \omega)$ das Polynom, das in p sowie in ω höchstens $2k$-ten Grades ist, darstellt.

Da aber

$$(-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}p^k} \left(\frac{1}{p(p^2+\omega^2)} \right) \geqq 0$$

[2]) Handelt es sich in den Anwendungen um die Untersuchung von passiven Systemen, so haben die betrachteten Funktionen keine Pole in der Halbebene $\mathrm{Re}\, p > 0$. Werden jedoch Systeme mit aktiven Elementen, z. B. mit Elektronenröhren, Transistoren usw., untersucht, ist dies nicht der Fall und deshalb wurde das allgemeinere System $\mathfrak{P}(\alpha)$ anstatt $\mathfrak{P}(0)$ eingeführt.

für jedes $\omega \geqq 0$, $p > 0$ ist und außerdem $R(\omega) \geqq 0$ gilt, ergibt sich unmittelbar, daß $\Phi(p) \in \mathfrak{M}(0)$ ist, woraus $H(p)/p^2 \in \mathfrak{M}(0)$ folgt. Hieraus ist $H(p - \alpha) \mathbin{/} (p - \alpha)^2 = G(p) \mathbin{/} (p - \alpha)^2 \in \mathfrak{M}(\alpha)$, w. z. b. w.

Wir widmen jetzt die Aufmerksamkeit der Frage, wie man am einfachsten feststellen kann, ob irgendeine Funktion dem Systeme $\mathfrak{P}(\alpha)$ angehört. Da die Ekvivalenz $G(p) \in \mathfrak{P}(\alpha) \Leftrightarrow G(p + \alpha) \in \mathfrak{P}(0)$ gilt, kann man sich nur auf das System $\mathfrak{P}(0)$ beschränken. Was des Systems $\mathfrak{P}(0)$ anbelangt, kann man folgenden Satz beweisen:

Satz 9. *Es sei* $F(p) = P(p)/Q(p) \not\equiv \text{const}$, *wo* $P(p)$, $Q(p)$ *reelle Polynome sind, welche positive Koeffizienten bei der höchsten Potenz besitzen, und der Grad von* $P(p)$ *sei höchstens um eins größer als der Grad von* $Q(p)$. *Wenn*

1) $F(p)$ *keine Pole in der Halbebene* $\operatorname{Re} p > 0$ *besitzt,*

2) *etwaige auf der Imaginärachse liegende Pole von* $F(p)$ *einfach mit reellen Residuen sind,*

3) $\operatorname{Re} F(i\omega) \geqq 0$ *für jedes reelles* ω, $i\omega \neq$ *der Wurzel von* $Q(p)$ *ist, so gilt* $F(p) \in \mathfrak{P}(0)$.

Beweis: Für $F(p)$ kann man offenbar folgende Zerlegung schreiben

$$F(p) = h_\infty p + \frac{h_0}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{2h_i p}{p^2 + \omega_i^2} + G(p)\,, \tag{18}$$

wo $h_\infty, h_0, h_i \geqq 0$ und wo $G(p)$ keine Pole in der Halbebene $\operatorname{Re} p \geqq 0$ und im Punkte $p = \infty$ besitzt. Weiter ist $\operatorname{Re} G(i\omega) = \operatorname{Re} F(i\omega)$, $\omega \neq 0, \omega_i$. Da $G(p)$ in der Halbebene $\operatorname{Re} p > 0$ regulär und in der abgeschlossen Halbebene $\operatorname{Re} p \geqq 0$ stetig ist, gilt nach dem Maximumprinzip, daß $\operatorname{Re} G(p) > 0$ für $\operatorname{Re} p > 0$ ist, d. h. $G(p) \in \mathfrak{P}(0)$. Ferner ist klar, daß auch die anderen Glieder der rechten Seite der Gl. (18) dem Systeme $\mathfrak{P}(0)$ angehören, womit der Satz bewiesen ist.

Wir machen den Leser noch darauf aufmerksam, daß die Feststellung der Gültigkeit der Bedingung 3) in Satz 9 vorzugsweise durch Ermittlung der Wurzeln eines gewissen Polynoms geschehen kann, was für die Lösung von konkreten Fällen wichtig ist. Es gilt nämlich folgender Satz:

Satz 10. *Es seien* $P(p)$, $Q(p)$ *teilfremde Polynome mit reellen Koeffizienten,* $m_1(p)$, $m_2(p)$ *die geraden Teile,* $n_1(p)$, $n_2(p)$ *die ungeraden Teile von* $P(p)$ *bzw. von* $Q(p)$. *Es sei* $K(p) = m_1(p)\, m_2(p) - n_1(p)\, n_2(p)$, *(was ein gerades Polynom ist). Wenn* 1) $K(p) \equiv 0$ oder 2) $K(p) > 0$ *für* $p^2 \to -\infty$ *ist und wenn* $K(p)$, *als Polynom von* p^2 *betrachtet, keine negativen Wurzeln ungerader Multiplizität besitzt, so gilt* $\operatorname{Re} P(i\omega) \mathbin{/} Q(i\omega) \geqq 0$ *für jedes reelle* ω, $i\omega \neq$ *der Wurzel von* $Q(p)$.

Beweis: Für jede von der Wurzel des Polynoms $Q(p)$ verschiedene Zahl p kann man schreiben

$$\frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2} \cdot \frac{m_2 - n_2}{m_2 - n_2} = \frac{(m_1 m_2 - n_1 n_2) + (n_1 m_2 - n_2 m_1)}{m_2^2 - n_2^2}\,.$$

Offenbar ist $K(p) = m_1(p)\, m_2(p) - n_1(p)\, n_2(p)$ ein gerades Polynom. Weiter gilt

$$\operatorname{sign} \operatorname{Re} \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)} = \operatorname{sign}\, (m_1(i\omega)\, m_2(i\omega) - n_1(i\omega)\, n_2(i\omega))\,,$$

ω reell, $i\omega \neq$ der Wurzel von $Q(p)$. ($m_2(i\omega)$ ist nämlich reell, sodaß $m_2^2(i\omega) \geqq 0$, $n_2(i\omega)$ rein imaginär, infolgedessen $-n_2^2(i\omega) \geqq 0$ ist, also $m_2^2(i\omega) - n_2^2(i\omega) > 0$ gilt; sinngemäß ist $n_1(i\omega)\, m_2(i\omega) - n_2(i\omega)\, m_1(i\omega)$ rein imaginär.)

Nach der Voraussetzung des Satzes kann man schreiben

(19)
$$K(p) = \alpha \prod_k (p^2 - \mu_k)^{m_k} \prod_j (p^2 - \nu_j)^{2q_j} \prod_i [(p^2 - \alpha_i - i\beta_i)(p^2 - \alpha_i + i\beta_i)]^{l_i},$$

wo $\mu_k \geqq 0$, $\nu_j < 0$, $\beta_i > 0$ ist.

Wenn $\alpha = 0$, ist der Satz offenbar richtig. Es sei also $\alpha \neq 0$. Es ist aber $-\omega^2 - \mu_k \leqq 0$, $(-\omega^2 - \nu_j)^2 \geqq 0$ für alle reelle ω. Das Glied $(p^2 - \alpha_i - i\beta_i)$ . . $(p^2 - \alpha_i + i\beta_i)$ ist für $p = i\omega$ gleich $(-\omega^2 - \alpha_i)^2 + \beta_i^2 > 0$. Infolgedessen besitzt $K(i\omega)$ immer dasselbe Vorzeichen für alle ω, und da $K(p) > 0$ für $p^2 \to -\infty$ ist, d. h. $K(i\omega) > 0$ für $\omega^2 \to \infty$, so gilt $K(i\omega) \geqq 0$ für alle ω, womit der Satz bewiesen ist.

Zum Schluß führen wir ein Beispiel, das die Ausnutzung der Sätze $8 \div 10$ erläutert, an.

Beispiel 4. Man soll feststellen, ob die folgende Funktion $F(p)$ vollmonoton ist:

$$F(p) = \frac{p^5 + p^4 + 5p^3 + 3p^2 + 5p + 1}{p^2(p^4 + p^3 + 3p^2 + p + 2)}\,.$$

Versuchen wir, ob $G(p) = p^2 F(p) \in \mathfrak{P}(0)$ gilt. Leicht sieht man ein, daß der Nenner von $G(p)$ in $(p^2 + 1)(p^2 + p + 2)$ zerlegbar ist, sodaß $G(p)$ keine Pole in der Halbebene $\operatorname{Re} p > 0$ besitzt, und die Pole in den Punkten $\pm i$ einfach sind. Nach einigen Zwischenrechnungen bekommt man

$$\operatorname*{Res}_i G(p) = \operatorname*{Res}_{-i} G(p) = 1/2 > 0\,.$$

Es bleibt noch übrig festzustellen, ob $\operatorname{Re} G(i\omega) \geqq 0$ ist, was mit Hilfe des Satzes 10 durchgeführt wird. Hier ist

$$K(p) = (p^4 + 3p^2 + 1)(p^4 + 3p^2 + 2) - (p^5 + 5p^3 + 5p)(p^3 + p) = \\ = 2(p^2 + 1)^2\,.$$

Offenbar ist $K(p) > 0$ für $p^2 \to -\infty$, und die einzige Wurzel $p^2 = -1$ ist gerader Multiplizität, sodaß $\operatorname{Re} G(i\omega) \geqq 0$ ist. Laut Satz 9 gilt also $G(p) \in \mathfrak{P}(0)$, und nach Satz 8 ist endgültig $G(p)/p^2 = F(p) \in \mathfrak{M}(0)$.

Literaturverzeichnis

[1] *Doetsch G.:* Handbuch der Laplace-Transformation, Bd. I, Verl. Birkhäuser, Basel 1950.

[2] *Jarník V.:* Úvod do počtu integrálního, NČSAV, Praha 1954.

[3] *Richards P. J.:* A Special Class of Functions with Positive Real Part in a Half-Plane, Duke Journal of Math., Vol. XIV, 1947.

Souhrn

O NĚKTERÝCH KRITERIÍCH MONOTONNOSTI ODEZVY LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

VÁCLAV DOLEŽAL

V článku jsou odvozeny některé postačující podmínky, za kterých odezva lineární soustavy se soustředěnými parametry, vyvolaná daným popudem, je monotonní funkcí resp. nemění své znaménko. Ježto odezva je obvykle dána svým Laplaceovým obrazem, jsou stanoveny podmínky pro obraz, za kterých příslušný originál je neklesající resp. nezáporný. K tomu cíli je zaveden pojem totálně monotonní funkce a je ukázána jeho souvislost s nutnými a postačujícími podmínkami pro nezápornost originálu. Na základě vlastností totálně monotonních funkcí jsou pak odvozena některá bezprostředně použitelná kriteria nezápornosti originálu a zároveň je ukázáno jejich užití pro vyšetření monotonnosti originálu. Přitom je odděleně sledován případ, kdy vyšetřovaný obraz má výhradně reálné póly a případ, kdy přistupují i póly komplexní. Konečně jsou v článku charakterisovány soustavy, jejichž odezvy jsou nezápornými neklesajícími funkcemi, byly-li popudy téhož typu; je dokázáno, že tato vlastnost je ekvivalentní tomu, že jejich přenosová funkce je totálně monotonní. Použití vyložené teorie je ilustrováno numerickými příklady.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ ПРИЗНАКАХ МОНОТОННОСТИ ОТКЛИКА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

ВАЦЛАВ ДОЛЕЖАЛ (Václav Doležal)

В статье выводятся некоторые достаточные условия для того, чтобы отклик линейной системы с сосредоточенными параметрами, вызванный данным возбуждением, был монотонной функцией или же чтобы он не менял знака. Так как отклик обыкновенно задан своим изображением

Лапласа, установлены в работе условия, налагаемые на изображение, при выполнении которых соответствующий оригинал является неубывающим или же неотрицательным. С этой целью вводится понятие полно монотонной функции и показывается его связь с необходимыми и достаточными условиями для неотрицательности оригинала. Исходя из свойств полно монотонных функций, выводит автор некоторые непосредственно приложимые признаки неотрицательности оригинала и одновременно он показывает их применение при исследовании монотонности оригинала. При этом исследуются в отдельности случаи, когда рассматриваемое изображение имеет исключительно действительные полюсы и когда встречаемся и с комплексными полюсами. Наконец, в статье дается характеристика систем, отклики которых являются неотрицательными неубывающими функциями, если только возбуждение было того же типа; доказано, что это свойство систем равносильно тому, что их передаточная функция полно монотонна. Применение изложенной теории иллюстрировано на численных примерах.