Aplikace matematiky

Miroslav Brdička

Poznámka k pojednání Františka Nožičky „O jednom modelu v klasickém problému dvou těles"

Aplikace matematiky, Vol. 5 (1960), No. 1, 30–39

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102691

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1960

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

POZNÁMKA K POJEDNÁNÍ FRANTIŠKA NOŽIČKY „O JEDNOM MODELU V KLASICKÉM PROBLÉMU DVOU TĚLES“

MIROSLAV BRDIČKA

(Došlo dne 22. května 1959.)

V článku je ukázáno, jak přistupuje ke „Keplerovské problematice“ a jak dospívá k hlavním výsledkům, uvedeným v citované práci F. NOŽIČKY, teoretická mechanika.

V uvedeném pojednání [1] přistupuje autor k problému dvou hmotných těles působících na sebe gravitačními silami především z hlediska geometrického. Jeho obecné závěry jsou pochopitelně v naprostém souhlasu s výsledky teoretické mechaniky (resp. nebeské mechaniky). Tam, vzhledem k vzdálenostem a rozměrům kosmických těles, zpravidla stačí uvažovat hmotné body místo hmotných těles. S tímto předpokladem však nevystačíme, studujeme-li pohyb raket a umělých družic v gravitačním poli např. Země, kdy musíme vzít v úvahu její rozměry; přitom matematická stránka uvažovaného problému nebude podstatně ovlivněna, pokládáme-li Zemi za homogenní kouli, resp. za kouli složenou z homogenních soustředných kulových vrstev (slupek). Druhé těleso (raketu, družici) považujeme i nyní za hmotný bod. Rozdíl proti případu, kdy považujeme Zemi za hmotný bod, spočívá pak jen v tom, že nyní některé trajektorie druhého tělesa budou procházet oborem zaujatým hmotou Země; tyto křivky nepřicházejí zřejmě v úvahu pro dráhy umělých družic nebo kosmických raket (pokud nepřihlížíme k odporu vzduchu, rotaci Země a celé řadě dalších faktorů; mohou přicházet v úvahu např. při „pozemských“ dálkových raketách).

Otázka, kdy trajektorie druhého tělesa bude probíhat mimo obor zaujatý Zemí, je Nožičkou zodpovězena pomocí mezní v_0-hyperboly, jejíž rovnice je v práci odvozena (rovnice (4,10)). Jelikož Nožička při svém postupu dané kuželosečce, jako trajektorii druhého hmotného bodu, přiřazuje kuželosečku na prostorovém kuželi, nabízí se otázka, je-li tento přechod nutný a není-li možno dospět k rovnici mezní v_0-hyperboly v rámci rovinného problému. I když náš zájem se vztahuje k zodpovězení této otázky, chceme použít této příležitosti k tomu, abychom ukázali podstatu celého problému z hlediska mechanického.

Hmotu prvního tělesa označme m_1, hmotu druhého m_2. Jelikož máme na mysli Zemi ($m_1 = 6 \,.\, 10^{21}$ tun) a raketu nebo družici (m_2 řádově v tunách), můžeme gravitační působení druhého tělesa na těleso první zanedbat, neboť jde nám jen o základní úvahu (a není to jediný faktor, který zanedbáváme). Je-li $\mathbf{r}$ průvodičem hmoty m_2 vzhledem ke středu O hmoty m_1, je na hmotný bod m_2 působící gravitační síla $\mathbf{F}$ centrální a platí pro ni

$$\mathbf{F} = -\frac{\varkappa m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{1}$$

kde $\varkappa$ je gravitační konstanta.

Vzhledem k výše uvedenému předpokladu o prostorovém rozložení hmoty je silové působení hmotné koule na hmotný bod m_2 stejné, jako kdyby celá její hmota byla soustředěna v jejím středu O.

Moment síly $\mathbf{F}$ vzhledem k bodu O je zřejmě roven nule, takže z Newtonova pohybového zákona ($\mathbf{v}$ je vektor rychlosti bodu m_2)

$$m_2 \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \tag{2}$$

plyne, že moment hybnosti je konstantní vektor, tj.

$$\mathbf{r} \times m_2 \mathbf{v} = \mathbf{C}\,, \tag{3}$$

kde pro vektorový součin jsme zavedli symbol $\times$. Odtud však je vidět, že vektory $\mathbf{r}$ a $\mathbf{v}$ stále leží v téže rovině, čili, že jde o rovinný problém.

V rovině vektorů $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ zvolme bod O za počátek pravoúhlých kartézských souřadnic x, y a polárních souřadnic r, φ; jsou zvoleny tak, že mezi nimi platí relace

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,. \tag{4}$$

Samozřejmě jsou obecně všechny souřadnice funkcemi času t. Derivace podle času budeme značit tečkou, takže např.

$$\dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\,.$$

Z rovnic (4) snadno odvodíme pro čtverec rychlosti $v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ vyjádření

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\,. \tag{5}$$

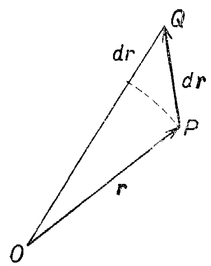
Rovněž není obtížné se přesvědčit, že z vektorové rovnice (3) jen skalární rovnice příslušná z-ovým složkám vektorů stojících na levé a pravé straně je různá od nuly (osa z míří ve směru vektoru $\mathbf{C}$), tj.

$$m_2(x\dot{y} - y\dot{x}) = C_z\,;$$

odtud dostáváme v polárních souřadnicích užitím rovnic (4)

$$r^2\dot{\varphi} = c\,, \tag{6}$$

kde $m_2 c = C_z$. To je první zákon Keplerův (jehož platnost není omezena jen na síly gravitační (1), ale vztahuje se na všechny centrální síly): působí-li na hmotný bod centrální síla, je plošná rychlost konstantní. Přitom plošnou rychlostí nazýváme plochu opsanou průvodičem za jednotku času. Snadno se přesvědčíme, že výraz $r^2\dot{\varphi}$ representuje dvojnásobek této plochy a tedy konstantě c přísluší hodnota dvojnásobné plošné rychlosti.



Obr. 1.

Síla $\boldsymbol{F}$, daná rovnicí (1), je konservativní. To znamená, že práce síly $\boldsymbol{F}$ po libovolné cestě není závislá na této cestě (a tedy je závislá jen na počáteční a konečné poloze). Odtud plyne, že výraz pro elementární práci, totiž skalární součin $\boldsymbol{F} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ musí být úplným diferenciálem určité skalární funkce V kterou nazýváme potenciálem (též potenciální energií), tj.

$$\boldsymbol{F} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\,\mathrm{d}V\,; \tag{7}$$

záporné znamení je zde zavedeno z konvence. Přitom $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ značí elementární změnu vektoru $\boldsymbol{r}$; z obr. 1 je vidět, že je rozdíl mezi velikostí vektoru $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, tj. $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$, a změnou délky průvodiče, kterou značíme $\mathrm{d}r$.

Pišme sílu $\boldsymbol{F}$ ve tvaru

$$\boldsymbol{F} = F(r) \,.\, \frac{\boldsymbol{r}}{r}, \tag{8}$$

kde $\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ je zřejmě jednotkový vektor. Podle (1) je v našem případě

$$F(r) = -\,\frac{\varkappa m_1 m_2}{r^2}\,. \tag{9}$$

Jelikož síla $\boldsymbol{F}$ je kolineární s $\boldsymbol{r}$, je z obr. 1 vidět, že můžeme rovnici (7) psát takto:

$$\boldsymbol{F} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = F(r)\,\mathrm{d}r = -\,\mathrm{d}V\,. \tag{10}$$

Odtud integrací dostáváme, až na aditivní konstantu,

$$V = -\int F(r)\,\mathrm{d}r\,. \tag{11}$$

Dosadíme-li sem za $F(r)$ z rovnice (9), je v našem speciálním případě

$$V = -\,\frac{\varkappa m_1 m_2}{r}\,. \tag{12}$$

Vraťme se nyní k rovnici (2) a násobme ji skalárně $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, přičemž na levé její straně zavedeme za $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ vyjádření

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t\,.$$

Po jednoduché úpravě levé strany nejprve máme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}m_2v^2\right)\mathrm{d}t = \boldsymbol{F} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,, \tag{13}$$

kde výraz $\frac{1}{2}m_2v^2$ představuje kinetickou energii hmotného bodu m_2; označíme ji T. Na pravé straně můžeme za $\boldsymbol{F} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ dosadit buď $-\mathrm{d}V$ podle rovnice (7), anebo $F(r)\,\mathrm{d}r$ podle rovnice (10). Při prvním postupu nabývá rovnice (13) tvaru

$$\mathrm{d}T = -\,\mathrm{d}V\,;$$

její integrací dostáváme zákon zachování energie

$$T + V = E\,, \tag{14}$$

kde E je konstanta úhrnné (mechanické) energie. Hodnota této konstanty je určena počátečními podmínkami, které udávají polohu $\boldsymbol{r}_0$ a rychlost $\boldsymbol{v}_0$ hmotného bodu m_2 v čase $t = 0$. V našem speciálním případě, tj. při V daném rovnicí (12), můžeme psát

$$\tfrac{1}{2}m_2v^2 - \frac{\varkappa m_1m_2}{r} = \tfrac{1}{2}m_2v_0^2 - \frac{\varkappa m_1m_2}{r_0}\,. \tag{15}$$

Tato rovnice, spolu se zákonem ploch (6) a s použitím vztahu (5), dovoluje již nalézt řešení našeho problému. Příslušný (nikoliv obtížný) postup lze nalézti v celé řadě učebnic teoretické mechaniky i teoretické fysiky (viz např. [2], [3], [4]).

Při druhém postupu vycházíme z rovnice (13) ve tvaru

$$\mathrm{d}\left(\tfrac{1}{2}m_2v^2\right) = F(r)\,\mathrm{d}r\,. \tag{16}$$

Předpokládejme nyní, že trajektorie hmotného bodu m_2 je popsána rovnicí $r = r(\varphi)$; jelikož $\varphi = \varphi(t)$, můžeme považovat r za složenou funkci času. To však znamená, že v^2 vystupující na levé straně rovnice (16) můžeme vyjádřit, vzhledem k (5) a (6), takto:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = \dot{r}^2 + \frac{c^2}{r^2} = c^2\left\{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2}\right\}, \tag{17}$$

neboť

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\,\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = -\,c\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{18}$$

S ohledem na (17) z rovnice (16) plyne

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\tfrac{1}{2}m_2v^2\right) = F(r)\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\,. \tag{19}$$

Místo proměnné $r(\varphi)$ je výhodné zavést novou proměnnou $u(\varphi)$ substitucí

$$u = \frac{1}{r}\,, \tag{20}$$

která se nabízí při pohledu na relaci (17). Pro v^2 tak máme vyjádření

$$v^2 = c^2 \left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + u^2\right]; \tag{21}$$

dále ještě z (20) plyne

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}. \tag{22}$$

Zavedeme-li poslední tři vztahy do rovnice (19) a provedeme-li na levé straně naznačené derivování, dostáváme po jednoduchých úpravách a za předpokladu, že $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} \neq 0$, následující rovnici:

$$F = -m_2 c^2 u^2 \left(\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u\right). \tag{23}$$

To je Binetův vzorec pro centrální sílu. Jeho platnost není podmíněna speciálním tvarem (9) funkce $F(r)$ resp. $F(u)$.

Věnujme se nyní již výhradně našemu případu, tj. $F(r)$ budiž dáno rovnicí (9), takže rovnice (23) nabývá po jednoduché úpravě tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u = \frac{\varkappa m_1}{c^2}. \tag{24}$$

Partikulární integrál rovnice nehomogenní je zřejmě

$$u_1 = \frac{\varkappa m_1}{c^2},$$

obecný integrál rovnice homogenní je

$$u_2 = A \cos(\varphi + \gamma),$$

takže obecné řešení rovnice (24) zní

$$u = u_1 + u_2 = \frac{\varkappa m_1}{c^2} + A\cos(\varphi + \gamma). \tag{25}$$

Integrační konstanty A a γ lze určit z počátečních podmínek. Vrátíme-li se od proměnné u k r, můžeme rovnici (25) psát takto:

$$r = \frac{\dfrac{c^2}{\varkappa m_1}}{1 + \dfrac{Ac^2}{\varkappa m_1}\cos(\varphi + \gamma)}. \tag{26}$$

To je polární rovnice kuželosečky; představuje druhý Keplerův zákon, zobecněný i na případy neeliptických drah.

Tento druhý postup pro náš speciální případ problému dvou těles (ve smyslu, jak je uvažován v práci Nožičkově) je v podstatě uveden v TRKALOVĚ *Mechanice* [5]. Binetův vzorec tam však odvozen není. Viz též např. [6], [7], [8], [9].

Nyní musíme určit hodnotu konstanty A. K tomu účelu zaveďme nejprve (25) do pravé strany rovnice (21) a pak při úpravě použijme rovnice (26). Dostáváme

$$v^2 = c^2 \left[A^2 + \frac{2\varkappa m_1}{c^2} \cdot \frac{1}{r} - \frac{\varkappa^2 m_1^2}{c^4} \right],$$

takže pro počáteční hodnoty $v = v_0$, $r = r_0$ plyne odtud pro A^2 vyjádření

(27) $$A^2 = \frac{v_0^2}{c^2} - \frac{2\varkappa m_1}{c^2} \cdot \frac{1}{r_0} + \frac{\varkappa^2 m_1^2}{c^4}.$$

Jak je známo, nedegenerovaná kuželosečka popsaná rovnicí

(28) $$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi + \gamma)}$$

je elipsou, parabolou nebo hyperbolou podle toho, je-li $\varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$ nebo $\varepsilon > 1$. Platí tedy také, podle druhu kuželosečky,

(29) $$\varepsilon^2 \lesseqqgtr 1.$$

Srovnáním (28) s (26) dostáváme

(30) $$\varepsilon = \frac{Ac^2}{\varkappa m_1}.$$

Zavedeme-li tento výsledek do předešlé rovnice a dosadíme-li za A^2 z (27), máme nejprve

$$\frac{c^2}{\varkappa^2 m_1^2} \left(v_0^2 - \frac{2\varkappa m_1}{r_0} + \frac{\varkappa^2 m_1^2}{c^2} \right) \lesseqqgtr 0;$$

odtud plyne

$$v_0^2 - \frac{2\varkappa m_1}{r_0} \lesseqqgtr 1,$$

takže, po vynásobení výrazem $\frac{1}{2}m_2$, dospíváme konečně ke vztahu

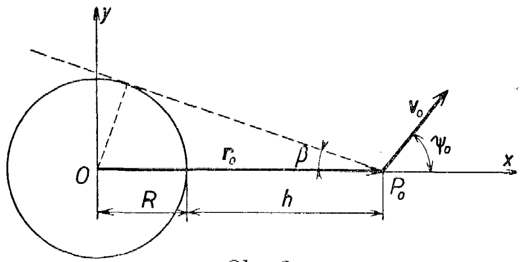
(31) $$\tfrac{1}{2} m_2 v_0^2 - \frac{\varkappa m_1 m_2}{r_0} \lesseqqgtr 0.$$

Výraz na levé straně představuje úhrnnou energii hmotného bodu m_2 v gravitačním poli hmoty m_1. Vztah (31) můžeme též interpretovat takto: trajektorie hmotného bodu m_2 v gravitačním poli hmoty m_1 je elipsou (parabolou nebo hyperbolou), je-li počáteční kinetická energie tohoto bodu menší (rovna nebo větší) než prostá hodnota jeho počáteční energie potenciální. Pokud při výčtu trajektorií mluvíme o hyperbole, máme na mysli pouze jednu její větev.

Nyní se věnujeme již odvození rovnice mezní v_0-hyperboly. Těleso o hmotě m_1 je homogenní anebo po vrstvách homogenní koulí o poloměru R (případně o efektivním poloměru R, kdybychom chtěli přihlédnout k odporu vzduchu ap.). Za tohoto předpokladu zůstávají všechny hoření úvahy v platnosti, pouze z trajektorií musíme vyloučit ty, které při našem rovinném problému mají jeden nebo více bodů společných s kružnicí o poloměru R.

Je-li $r_0 = R + h$ počáteční vzdálenost hmotného bodu m_2 od středu kruhu O a svírá-li vektor počáteční rychlosti $\mathbf{v}_0$ úhel ψ_0 se směrem průvodiče $\mathbf{r}_0$ (tj. osou x v obr. 2), máme pro konstantu c jako dvojnásobnou plošnou rychlost (nebo jako hodnotu momentu vektoru $\mathbf{v}_0$ vzhledem k počátku O) vyjádření

$$c = v_0(R + h) \sin \psi_0 \,. \tag{32}$$



Obr. 2.

To je ihned vidět z obr. 2.

Pro průsečíky kružnice $r = R$ s kuželosečkou (26) máme podmínku

$$R = \frac{\dfrac{c^2}{\varkappa m_1}}{1 + \dfrac{Ac^2}{\varkappa m_1} \cos (\varphi + \gamma)} \,. \tag{33}$$

Z této rovnice můžeme určit úhly φ, příslušné uvažovaným průsečíkům. Aby byly tyto průsečíky reálné, přicházejí v úvahu jen reálné úhly φ a tedy $\cos (\varphi + \gamma)$ může nabývati nejvýše hodnot ± 1; to dává mezní podmínku $\cos^2 (\varphi + \gamma) = 1$.

Z rovnice (33) nejprve plyne

$$\cos^2 (\varphi + \gamma) = \frac{\varkappa^2 m_1^2}{A^2 c^4 R^2} \left(\frac{c^2}{\varkappa m_1} - R \right)^2 ;$$

levou stranu nyní položíme rovnu 1 a pak celou rovnici upravujeme s přihlédnutím k relacím (27), (32) a k $r_0 = R + h$; po jednoduchých úpravách a vykrácení c^2 (případ $c^2 = 0$ je celkem nezajímavý) dostáváme rovnici

$$v_0^2 (R + h)^2 \sin^2 \psi_0 = R^2 v_0^2 + \frac{2 \varkappa m_1 R h}{R + h} \,. \tag{34}$$

V bodě P_0 zaveďme si pravoúhlé kartézské souřadnice ξ a η tak, že osa ξ splývá s osou x a osa η je s osou y rovnoběžná. Pak pro souřadnice koncového bodu vektoru $\mathbf{v}_0$ platí

$$\xi = v_0 \cos \psi_0 \,, \quad \eta = v_0 \sin \psi_0$$

a samozřejmě i

$$v_0^2 = \xi^2 + \eta^2 .$$

Zavedeme-li tyto relace do rovnice (34), dostáváme po snadné úpravě

$$\frac{(R + h)(2R + h)}{2\varkappa m_1 R}\,\eta^2 - \frac{R(R + h)}{2\varkappa m_1 h}\,\xi^2 = 1 . \tag{35}$$

To je rovnice mezní v_0-hyperboly (viz rovnici (4,10) v citovaném pojednání Nožičkově).

Je-li dráha hmotného bodu m_2 parabolická, takže podle (31) platí

$$v_0^2 = \frac{2\varkappa m_1}{R + h} ,$$

snadno odvodíme z rovnice (34) vztah

$$\sin^2 \psi_0 = \frac{R}{R + h} = \sin \beta ;$$

význam úhlu β je zřejmý z obr. 2. Tento výsledek odpovídá relaci (5,4) v práci Nožičkově.

Závěrem si uveďme ještě jeden fakt, který se vztahuje k drahám eliptickým. Ze srovnání rovnic (28) a (26) plyne

$$p = \frac{c^2}{\varkappa m_1}, \quad \varepsilon = \frac{Ac^2}{\varkappa m_1} ; \tag{36}$$

druhou rovnici jsme si již uvedli dříve (viz rovnici (30)). Jsou-li a a b velká a malá poloosa elipsy, jak je známo, platí

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - a^2\varepsilon^2}{a} = a(1 - \varepsilon^2) .$$

Zavedeme-li sem vztahy (36) a přihlédneme-li k (27), obdržíme

$$\frac{c^2}{\varkappa m_1 a} = \frac{c^2}{\varkappa^2 m_1^2}\left(\frac{2\varkappa m_1}{r_0} - v_0^2\right) ,$$

což lze psát také takto:

$$\tfrac{1}{2} m_2 v_0^2 - \frac{\varkappa m_1 m_2}{r_0} = - \frac{\varkappa m_1 m_2}{2a} . \tag{37}$$

Na levé straně máme úhrnnou enegii hmotného bodu m_2; na pravé straně máme výraz, který je závislý jen na velké poloose elipsy, pokud se geometrických prvků trajektorie týká. Odtud plyne, že všechny eliptické trajektorie o téže velké poloose mají stejnou energii bez ohledu na velikost poloosy malé. Mezi tyto trajektorie je zahrnuta i kružnice.

Literatura

[1] *F. Nožička:* O jednom modelu v klasickém problému dvou těles, Aplikace matematiky 5 (1960), No 1, str. 1.

[2] *А. С. Компанеец:* Теоретическая физика, Москва 1957, стр. 37—43.

[3] *G. Joos*: Lehrbuch der theoretischen Physik, 8. Aufl., Leipzig 1954, S. 78—81.

[4] *R. A. Becker:* Introduction to Theoretical Mechanics, New York-London-Toronto 1954, p. 230—234.

[5] *V. Trkal*: Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa, Praha 1956, str. 159—162.

[6] *R. A. Becker:* Introduction to Theoretical Mechanics, New York-London-Toronto 1954, p. 227—229.

[7] *S. Banach:* Mechanics, Warszawa-Wrocław, 1951, p. 87.

[8] *Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье:* Курс теоретической механики, том II, Москва 1955, стр. 49—53.

[9] *A. Sommerfeld:* Mechanik, 5. Aufl., Leipzig 1955, S. 30—44.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ К СТАТЬЕ ФРАМТИШКА НОЖИЧКИ „ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ В КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДВУХ ТЕЛ“

МИРОСЛАВ БРДИЧКА (Miroslav Brdička)

В цитированной работе Ф. Ножичка занимается задачей о двух телах, из которых одно представляет собой шар, сложенный из однородных концентрических оболочек (Земля), в то время как второе из них (ракета) можно считать материальной точкой. Притом Ф. Ножичка приступает к этой задаче с геометрической точки зрения. В настоящей работе показано, каким образом можно получить те же результаты, поступая способом, обычным в теоретической механике. Наглядно показан вывод основных формул, причем формула Бине (*Binet*) служит исходным пунктом к выводу главных результатов, содержащихся в статье Ф. Ножички.

Zusammenfassung

EINE BEMERKUNG ZUR ABHANDLUNG VON FRANTIŠEK NOŽIČKA „ÜBER EIN MODELL IN DER KLASISCHEN THEORIE DES ZWEIKÖRPER-PROBLEMS“

MIROSLAV BRDIČKA

In der zitierten Arbeit befasst sich F. Nožička mit dem Zweikörper-Problem, wobei einer der Körper eine aus homogenen konzentrischen Schalen bestehende Kugel ist (die Erdkugel), während man den zweiten Körper (die Rakete) als

Massenpunkt betrachten kann. Nožička behandelt dieses Problem vom geometrischen Standpunkte aus. In der vorliegenden Abhandlung wird gezeigt, wie man dieselben Resultate durch einen in der theoretischen Physik üblichen Vorgang erhalten kann. Es werden übersichtlich die Grundformeln abgeleitet, von denen dann die Binetsche Formel den Ausgangspunkt zur Ableitung der Hauptresultate von Nožička's Artikel bildet.