Miloslav Hampl

Řešeni algebraické rovnice čtvrtého stupně

Aplikace matematiky, Vol. 4 (1959), No. 6, 463–465

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102685`

ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÉ ROVNICE ČTVRTÉHO STUPNĚ

MILOSLAV HAMPL

(Došlo dne 23. března 1959.) DT: 512.393: 512.37

Lineární transformací se převede rovnice čtvrtého stupně na rovnici stupně třetího tak, že kterýkoliv z kořenů této rovnice vede na úplné řešení rovnice původní.

Do rovnice

$$f(x) = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0 \tag{1}$$

zaveďme novou neznámou y substitucí

$$x = y + k\,. \tag{2}$$

Tak dostaneme pro y rovnici:

$$f_1(y) = f(y + k) = f(k) + f'(k)\,y + \tfrac{1}{2}f''(k)\,y^2 + \tfrac{1}{6}f'''(k)\,y^3 + y^4 = 0\,. \tag{3}$$

Dělením této rovnice y^2 dostaneme po úpravě:

$$y^2 + \frac{f}{y^2} + \frac{1}{6}f'''\left(y + \frac{f'}{\frac{1}{6}f'''}\frac{1}{y}\right) + \tfrac{1}{2}f'' = 0 \tag{4}$$

(argument k pro jednoduchost vynecháme).

Označme

$$p = \frac{f'}{\frac{1}{6}f'''}\,. \tag{5}$$

Zvolíme-li dosud neznámé k tak, aby vedle rovnice (5) platilo současně

$$p^2 = f\,, \tag{5'}$$

tj. aby k hovělo rovnici

$$ff'''^2 = 36f'^2\,, \tag{6}$$

přejde rovnice (4) do tvaru

$$z^2 + \tfrac{1}{6}f'''z + \tfrac{1}{2}f'' - 2p = 0\,, \tag{7}$$

kde

$$z = y + \frac{p}{y}\,. \tag{8}$$

Rovnice (6) po dosazení a úpravě vede na rovnici třetího stupně pro k

$$A_1k^3 + A_2k^2 + A_3k + A_4 = 0\,, \tag{9}$$

kde

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1^3 - 4a_1a_2 + 8a_3\,, \\ A_2 &= a_1^2a_2 + 2a_1a_3 - 4a_2^2 + 16a_4\,, \\ A_3 &= a_1^2a_3 + 8a_1a_4 - 4a_2a_3\,, \\ A_4 &= a_1^2a_4 - a_3^2\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Výraz (5) pro p se pomocí rovnice (9) dá psáti

$$p = \frac{1}{A_1}(3A_1k^2 + 2A_2k + A_3)\,, \tag{11}$$

pokud je

$$A_1 = a_1^3 - 4a_1a_2 + 8a_3 \neq 0\,.$$

(Případ $A_1 = 0$ je triviální, neboť volbou $k = -\frac{a_1}{4}$ přejde původní rovnice (1) na rovnici, která obsahuje pouze sudé mocniny y a dá se tedy snadno řešiti.)

Postup řešení:

Z koeficientů a_i rovnice (1) stanovíme podle (10) koeficienty A_i kubické rovnice (9) pro neznámou k a dále výraz pro p podle rovnice (11).

Kterýkoli kořen k rovnice (9) dosadíme do kvadratické rovnice (7) pro z. Tato rovnice po vyjádření f''', f'' a p se dá psáti

$$z^2 + (4k + a_1)\,z + \frac{1}{A_1}\{(3a_1A_1 - 4A_2)\,k + a_2A_1 - 2A_3\} = 0\,. \tag{12}$$

Řešení této rovnice se dá pomocí rovnice (9) upraviti takto:

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2}\left\{4k + a_1 \pm \sqrt{\frac{A_1}{4k + a_1}}\right\}. \tag{13}$$

Z kvadratické rovnice (8)

$$y^2 - z_{1,2}y + p = 0$$

dostaneme dva páry kořenů $y_{1,2,3,4}$, a dosazením do rovnice (2) všechny čtyři kořeny

$$x_{1,2,3,4} = y_{1,2,3,4} + k\,.$$

Резюме

РЕШЕНИЕ АЛЬГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

МИЛОСЛАВ ГАМПЛ (Miloslav Hampl)

(Поступило в редакцию 23/III 1959 г.)

Посредством удобного линейного преобразования (сдвига) получается из общего уравнения четвертой степени уравнение обратное обобщенное которое можно простым способом решить. Надлежащее преобразование определяется по уравнению третьей степени. Какой-либо из трех корней этого уравнения в сложении с двумья парами корней упомянутого обратного уравнения даст полное решение первоначально заданного уравнения степени.

Summary

THE SOLUTION OF BIQUADRATIC EQUATIONS

MILOSLAV HAMPL

(Received March 23rd, 1959.)

The general biquadratic equation is transformed into a generalized reciprocal equation by a linear substitution (a translation); the solution of the reciprocal equation is then simple. The translation is determined by a cubic equation; any one of its three roots together with two pairs of roots of the reciprocal equation yields the complete solution of the original biquadratic.