Ludvík Janoš

Extremální princip pro první vlastní frekvenci příčných kmitů pružného kontinua

Aplikace matematiky, Vol. 4 (1959), No. 6, 456–462

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102684

EXTREMÁLNÍ PRINCIP PRO PRVNÍ VLASTNÍ FREKVENCI PŘÍČNÝCH KMITŮ PRUŽNÉHO KONTINUA

Ludvík Janoš

(Došlo dne 8. července 1958.) DT: 534.13.011

V práci je dovozen extremální princip pro první vlastní číslo jisté soustavy dvou integrálních rovnic. Je ukázáno, že soustava popisuje příčné kmity pružného kontinua s libovolně rozloženou hmotou a s libovolně proměnným momentem setrvačnosti.

Budeme se zabývat soustavou dvou integrálních rovnic

$$\begin{aligned} \int_0^1 K(x, t)\, y(t)\, \mu(t)\, \mathrm{d}t &= \alpha z(x)\,, \\ \int_0^1 K(x, t)\, z(t)\, p(t)\, \mathrm{d}t &= \alpha y(x)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

kde jádro $K(x, t)$ je definováno vztahy

$$K(x, t) = \begin{cases} x(1 - t)\,, & x \leqq t\,, \\ (1 - x)t\,, & x \geqq t\,, \end{cases} \tag{2}$$

a funkce $\mu(t)$ a $p(t)$ jsou spojité a nezáporné na $\langle 0, 1 \rangle$.

Soustava (1) nabízí určité zobecnění funkcí $\mu(t)$ a $p(t)$ přechodem k integrálu Lebesque-Stieltjesovou.

K tomu cíli utvořme množinu všech neklesajících funkcí na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a označme ji $\boldsymbol{\gamma}$.

Pro libovolné její dva prvky $m(x) \in \boldsymbol{\gamma}$, $P(x) \in \boldsymbol{\gamma}$ můžeme napsat soustavu integrálních rovnic

$$\begin{aligned} \int_0^1 K(x, t)\, y(t)\, \mathrm{d}m(t) &= \alpha z(x)\,, \\ \int_0^1 K(x, t)\, z(t)\, \mathrm{d}P(t) &= \alpha y(x)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

V případě, že funkce $m(t)$, $P(t)$ mají všude spojité derivace $m'(t) = \mu(t)$, $P'(t) = p(t)$, bude soustava (3) identická se soustavou (1).

Ve svých úvahách budeme proto vycházet z obecnějšího problému (3) a naším úkolem bude dokázat, že pro největší vlastní číslo α soustavy (3) platí nerovnost

$$\alpha \geqq \frac{\int_0^1 \int_0^1 K(x, t)\, \varphi(x)\, \psi(t)\, \mathrm{d}m(x)\, \mathrm{d}P(t)}{\sqrt{\int_0^1 \varphi^2\, \mathrm{d}m \int_0^1 \psi^2\, \mathrm{d}P}}, \tag{4}$$

kde funkce $\varphi(x)$ resp. $\psi(x)$ probíhají množiny funkcí, pro něž integrály na pravé straně nerovnosti mají smysl a jmenovatel je nenulový.

To znamená

$$\varphi(x) \in L_2^{(m)}, \quad \psi(x) \in L_2^{(P)},$$

kde $L_2^{(m)}$ resp. $L_2^{(p)}$ jsou množiny reálných funkcí integrovatelných s kvadrátem vzhledem k m resp. P ve smyslu Lebesque-Stieltjese. Množiny $L_2^{(m)}$, $L_2^{(P}$ tvoří Hilberův prostor, zavedeme-li do nich skalární součiny vztahy

$$\varphi_1, \varphi_2 \in L_2^{(m)}, \qquad \psi_1, \psi_2 \in L_2^{(P)},$$

$$(\varphi_1, \varphi_2)_m = \int_0^1 \varphi_1\varphi_2\, \mathrm{d}m, \qquad (\psi_1, \psi_2)_P = \int_0^1 \psi_1\psi_2\, \mathrm{d}P.$$

Utvořme nyní kartézský součin $L_2^{(m)} \times L_2^{(P)}$. Prostor $L_2^m \times L_2^P$ se stane Hilbertovým prostorem, zavedeme-li skalární součin takto:

$$[\varphi_1, \psi_1] \in L_2^{(m)} \times L_2^{(P)}; \quad [\varphi_2, \psi_2] \in L_2^{(m)} \times L_2^{(P)},$$

$$([\varphi_1, \psi_1] \cdot [\varphi_2, \psi_2]) = (\varphi_1\varphi_2)_m + (\psi_1\psi_2)_P = \int_0^1 \varphi_1\varphi_2\, \mathrm{d}m + \int_0^1 \psi_1\psi_2\, \mathrm{d}P.$$

Zavedeme nyní na $L_2^m \times L_2^P$ operátor R definicí

$$R[\varphi, \psi] = [\int_0^1 K(x, t)\, \psi(t)\, \mathrm{d}P(t), \quad \int_0^1 K(x, t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}mt].$$

Snadno nahlédneme, že R je totálně spojitý operátor, zobrazující $L_2^m \times L_2^P$ do sebe (viz např. [1], str. 216). Pomocí operátoru R můžeme soustavu (3) napsat ve tvaru

$$R[y, z] = \alpha[y, z]. \tag{5}$$

Nyní dokážeme, že operátor R je samoadjungovaný, to znamená, že platí

$$([\varphi_1, \psi_1] \cdot R[\varphi_2, \psi_2]) = ([\varphi_2, \psi_2] \cdot R[\varphi_1, \psi_1]),$$
$$[\varphi_1, \psi_1], \ [\varphi_2, \psi_2] \in L_2^m \times L_2^P.$$

Vyčíslíme např. levou stranu

$$([\varphi_1, \psi_1] . R[\varphi_2, \psi_2]) = ([\varphi_1, \psi_1] . [\int_0^1 K(x, t)\, \psi_2(t)\, \mathrm{d}P(t)\, ,\ \int_0^1 K(x, t)\, \varphi_2(t)\, \mathrm{d}m(t)] =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 K(x, t)\, \varphi_1(x)\, \psi_2(t)\, \mathrm{d}m(x)\, \mathrm{d}P(t) + \int_0^1\int_0^1 K(x, t)\, \varphi_2(t)\, \psi_1(x)\, \mathrm{d}m(t)\, \mathrm{d}P(x)\, ,$$

což po snadné úpravě dá

$$\int_0^1\int_0^1 K(x, t)\, [\varphi_1(x)\, \psi_2(t) + \varphi_2(x)\, \psi_1(t)]\, \mathrm{d}m(x)\, \mathrm{d}P(t)\, .$$

Protože však tento výraz je souměrný vzhledem k záměně indexů, je roven i pravé straně, čímž je samoadjungovanost operátoru R dokázána.

Protože R je totálně spojitý samoadjungovaný operátor, platí pro první vlastní číslo α problému (5) a tedy též (3) vztah

$$\alpha = \sup \frac{([\varphi, \psi] . R[\varphi, \psi])}{([\varphi, \psi] . [\varphi, \psi])}$$

pro $[\varphi, \psi] \neq 0$ (viz [2], str. 185).

Položíme-li v rovnici, kterou jsme dokazovali samoadjungovanost, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, $\psi_1 = \psi_2 = \psi$, má čitatel na pravé straně hodnotu $2\int_0^1\int_0^1 K(x, t)\, .\, \varphi(x)\, \psi(t)\, \mathrm{d}m(x)\, \mathrm{d}P(t)$, a jmenovatel má hodnotu $\int \varphi^2\, \mathrm{d}m + \int \psi^2\, \mathrm{d}P$. Platí tedy pro libovolné φ, ψ, takové, že $0 \neq [\varphi, \psi] \in L_2^m \times L_2^P$, nerovnost

$$\alpha \geqq \frac{2 \int_0^1\int_0^1 K(x, t)\, \varphi(x)\, \psi(t)\, \mathrm{d}m(x)\, \mathrm{d}P(t)}{\int_0^1 \varphi^2\, \mathrm{d}m + \int_0^1 \psi^2\, \mathrm{d}P}\, .$$

Nechť nyní a, b jsou libovolná čísla $a > 0$, $b > 0$. Pak poslední nerovnost zůstane správná, dosadíme-li do ní $a\varphi(x)$ místo $\varphi(x)$ a $b\psi(x)$ místo $\psi(x)$. Tím dostaneme nerovnost

$$\alpha \geqq \frac{2\, ab \int_0^1\int_0^1 K(x, t)\, \varphi(x)\, \psi(t)\, \mathrm{d}P(t)}{a^2 \int_0^1 \varphi^2\, \mathrm{d}m + b^2 \int_0^1 \psi^2\, \mathrm{d}P}\, ,$$

závislou na dvou parametrech a, b. Při pevných $\varphi(x)$, $\psi(x)$ dosáhne pravá strana svého maxima, položíme-li

$$a^2 = \int \psi^2\, \mathrm{d}P\, , \quad b^2 = \int \varphi^2\, \mathrm{d}m\, ,$$

což dosazeno do hořejší nerovnosti dává výslednou nerovnost

$$\alpha \geqq \frac{\int\limits_0^1\int\limits_0^1 K(x, t)\, \varphi(x)\, \psi(t)\, \mathrm{d}m(x)\, \mathrm{d}P(t)}{\sqrt{\int\limits_0^1 \varphi^2\, \mathrm{d}m \int \psi^2\, \mathrm{d}P}} .$$

Poznamenejme, že náš postup je určitou specialisací Ritzovy metody určení vlastního čísla samoadjungovaného problému.

Abychom nahlédli fysikální smysl výsledku, připomeňme, že příčné kmity nosníku jsou popsány rovnicí

$$[EI(x)\, y''(x)]'' = \omega^2 y(x)\, \mu(x)\,, \quad 0 \leqq x \leqq l\,,$$

v níž

$y(x)$ značí průhyb v místě x [cm],
$I(x)$ moment setrvačnosti v místě x [cm^4],
$\mu(x)$ hustotu hmoty v místě x [$\mathrm{kg\ cm^{-2}\ sec^2}$],
E modul pružnosti [$\mathrm{kg\ cm^{-2}}$],
l značí délku nosníku [cm],
ω je frekvence, s jakou nosník kmitá [$\mathrm{sec^{-1}}$]
[rozměry jsou udány v technických jednotkách].

Výraz $EI(x)\, y''(x)$ je záporně vzatý ohybový moment v místě x, který označíme $M(x)$ [kg cm]. Uvedená rovnice je tedy ekvivalentní soustavě

$$M''(x) = -\, \omega^2 y(x)\, \mu(x)\,,$$

$$y''(x) = -\, M(x)\, \frac{1}{Ey(x)}\,.$$

Výraz $\frac{1}{EI(x)}$ se někdy nazývá hustotou „poddajnosti" v místě x, má rozměr $\mathrm{kg^{-1}cm^{-2}}$, a označuje se $p(x)$. Položíme-li

$$\alpha = \frac{1}{\omega}\,, \quad z(x) = \frac{M(x)}{\omega}\,,$$

převedeme naši soustavu na souměrný tvar

$$\alpha z''(x) + y(x)\, \mu(x) = 0\,,$$

$$\alpha y''(x) + z(x)\, p(x) = 0\,.$$

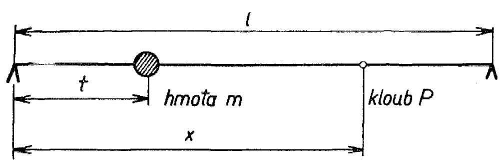
Je-li uvažovaný nosník na obou koncích volně podepřený, tedy jsou-li tam průhyby i momenty nulové, mají krajové podmínky tvar

$$y(0) = y(l) = 0\,, \qquad z(0) = z(l) = 0\,.$$

Přímou integrací uvedené soustavy s ohledem na krajové podmínky dostaneme soustavu dvou integrálních rovnic (1), kde jádro $K(x, t)$ je dáno vztahy

$$K(x, t) = \begin{cases} x\left(1 - \dfrac{t}{l}\right), & x \leqq t \\ t\left(1 - \dfrac{x}{l}\right), & x \geqq t \end{cases}.$$

Na jednoduchém případě ukážeme použití odvozeného principu.



Obr. 1.

Budeme uvažovat nekonečně tuhý nosník, který má v místě x pružný kloub o celkové poddajnosti P [$\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{cm}^{-2}$]. Veličinu P můžeme definovat limitním přechodem takto: Představme si, že na malé délce h je konstantní poddajnost p. Pak celková poddajnost elementu h je $p \cdot h = P$. Zmenšujeme-li h k nule a současně p zvětšujeme do nekonečna tak, aby hodnota součinu zůstala zachována, dospějeme k pojmu „kloubu" o poddajnosti P. Nosník nechť je nehmotný, jen v místě t má koncentrovanou hmotu m [$\mathrm{kg}\,\mathrm{cm}^{-1}\,\mathrm{sec}^2$]. Nechť např. $t \leqq x$, jak ukazuje schéma na obr. 1.

Odvozený princip nyní říká, že

$$\alpha = \sup \frac{\int_0^1\int_0^1 K(x, t)\, \varphi(x)\, \psi(t)\, \mathrm{d}m(x)\, \mathrm{d}P\, t}{\sqrt{\int \varphi^2\, \mathrm{d}m \int \psi^2\, \mathrm{d}P}}.$$

Čitatel má však v našem případě hodnotu $K(t, x)\, \varphi(t)\, \psi(x)\, mP$ a jmenovatel $\varphi(t) \sqrt{m} \cdot \psi(x) \sqrt{P}$. Je vidět, že neznámé libovolné funkce φ a ψ se v tomto případě vykrátí a my obdržíme dokonce exaktní výsledek

$$\alpha = K(t, x) \sqrt{mP}.$$

Pro $t \leqq x$ dostaneme $K(t, x) = t\left(1 - \dfrac{x}{l}\right)$,

a tedy

$$\omega = \frac{1}{\alpha} = \frac{l}{t(l - x)\sqrt{mP}}.$$

Literatura

[1] *Л. А. Люстерник, В. И. Соболев:* Элементы функционального анализа. ГИТТЛ, Москва-Ленинград 1951.

[2] *Н. И. Ахиезер, И. Н. Глазман:* Теория линейных операторов в Гильбертовом пространстве. ГИТТЛ, Москва-Ленинград 1950.

Резюме

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ ПЕРВОЙ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО КОНТИНУУМА

ЛЮДВИК ЯНОШ (Ludvík Janoš)

(Поступило в редакцию 8/VII 1958 г.)

В работе выведена экстремальная формула для первой собственной частоты ω_1 балки.

Рассмотрим балку длины l, свободно уложенную на двух опорах. Пусть распределение массы на балке задано неубывающей функцией $m(x)$, $x \in \langle 0, l\rangle$, общая масса интервала $\langle 0, x\rangle$ численно равна $m(x)$. Аналогично, пусть податливость задана неубывающей функцией $P(x)$, $x \in \langle 0, l\rangle$; число $P(x)$ означает обшую податливость интервало $\langle 0, x\rangle$. Если $m(x)$ имеет производную, то $m'(x)$ означает плотность массы в точке x. Если же функция $P(x)$ имеет производную $P'(x)$, то $P'(x) = \dfrac{1}{EI(x)}$, где E есть модуль эластичности и $I(x)$ — момент инерции в точке x.

В этих обозначениях спектр частот балки дан системой интегральных уравнений

$$\int_0^l K(x, t)\, y(t)\, \mathrm{d}m(t) = \alpha z(x)\,,$$

$$\int_0^l K(x, t)\, z(t)\, \mathrm{d}P(t) = \alpha y(x)\,,$$

где $\alpha = \dfrac{1}{\omega}$, а ядро $K(x, t)$ определено соотношениями

$$K(x, t) = \begin{array}{ll} x\left(1 - \dfrac{t}{l}\right), & x \leqq t\,, \\ t\left(1 - \dfrac{x}{l}\right), & x \geqq t\,. \end{array}$$

Для первого собственного числа $\alpha_1 = \dfrac{1}{\omega_1}$ имеет тогда место

$$\alpha_1 = \sup \frac{\int_0^l \int_0^l K(x, t)\, y(x)\, z(t)\, \mathrm{d}m(x)\, \mathrm{d}P(t)}{\sqrt{\int_0^l y^2\, \mathrm{d}m \int_0^1 z^2\, \mathrm{d}P}}\,.$$

Summary

AN EXTREMUM PRINCIPLE FOR THE FIRST PROPER FREQUENCY OF TRANSVERSE VIBRATIONS OF ELASTIC CONTINUA

LUDVÍK JANOŠ

(Received July 8th, 1958.)

In the paper there is deduced an equation of extremal character for the first proper frequency ω_1 of a beam.

Consider a beam of length l freely resting on two supports. Let the distribution of mass of the beam be described by a non-decreasing function $m(x)$ defined on the interval $\langle 0, l \rangle$ in such a manner that $m(x)$ is the total mass on the interval $\langle 0, x \rangle$. Similarly, let the non-decreasing function $P(x)$ on $\langle 0, l \rangle$ describe the yielding, so that $P(x)$ is the total yielding of the interval $\langle 0, x \rangle$. Thus, if $m(x)$ has a derivative, then $m'(x)$ is the mass-density at x; if $P(x)$ has a derivative, then $P'(x) = \frac{1}{EI(x)}$ where E is Young's modulus and $I(x)$ the moment of inertia at x.

Then the frequency spectrum of the beam is determined by the system of integral equations

$$\int_0^l K(x, t)\, y(t)\, \mathrm{d}m(t) = \alpha z(x)\,,$$

$$\int_0^l K(x, t)\, z(t)\, \mathrm{d}P(t) = \alpha y(x)\,,$$

where $\alpha = \frac{1}{\omega}$, and the kernel $K(x, t)$ is given by

$$K(x, t) = \begin{matrix} x\left(1 - \frac{t}{l}\right), & x \leq t\,, \\ t\left(1 - \frac{x}{l}\right), & x \geqq t\,. \end{matrix}$$

The result is that for the first eigenvalue $\alpha_1 = \frac{1}{\omega_1}$ there holds the extremum principle

$$\alpha_1 = \sup \frac{\int_0^l \int_0^l K(x, t)\, y(x) z(t)\, \mathrm{d}m(x)\, \mathrm{d}P(t)}{\sqrt{\int_0^l y^2\, \mathrm{d}m \int_0^l z^2\, \mathrm{d}P}}\,.$$