Aplikace matematiky

Ivo Babuška; Miroslav Fiedler

Über Systeme linearer Gleichungen vom Typ der Rahmentragwerke

Aplikace matematiky, Vol. 4 (1959), No. 6, 441–455

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102683`

ÜBER SYSTEME LINEARER GLEICHUNGEN VOM TYP DER RAHMENTRAGWERKE

IVO BABUŠKA, MIROSLAV FIEDLER

(Eingegangen am 3. Januar 1959.) DT: 624.072.33

In dieser Arbéit wird die notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, dass zu einem gegebenen System linearer Gleichungen ein Rahmentragwerk mit unverschiebbaren Rahmenknoten existiert, dessen Deformationsgleichungssystem das gegebene System ist.

I. EINLEITUNG

Eines der grundlegenden Probleme der Baumechanik ist das Problem der Rahmentragwerke. Dieses Problem stand eine Reihe von Jahren im Mittelpunkt des wissenschaftlichen Interesses, vor allem in den 30. Jahren dieses Jahrhunderts. Bis heute wird eine Reihe von Arbeiten aus diesem Gebiet veröffentlicht. Eine der wichtigsten ist die Arbeit von OSTENFELD [1] (1926), in welcher die Grundlage für die heute sehr verbreitete Deformationsmethode angegeben wird. Diese Methode, die für die Praxis von TAKABEYA [2] (1930) bearbeitet wurde, führt das Problem der statischen Lösung des Rahmentragwerkes auf das Problem der Lösung eines Systems linearer Gleichungen, der sogenannten Deformationsgleichungen zurück.

Grosse Aufmerksamkeit wurde gleichzeitig den Fragen der einfachsten und schnellsten Ausrechnung der Deformationsgleichungen gewidmet und allgemein auch dem Studium anderer Methoden für die Berechnung von Rahmentragwerken. Führen wir hier einige aus der grossen Reihe von Abhandlungen über diese Problemstellung an. Es sind dies die bekannten Arbeiten von H. CROSS [3], [4], H. CROSS und N. D. MORGAN [5], die Arbeit von M. FORNEROD [6], V. DAŠEK [7], C. KLOUČEK [8], TH. TITZ [9], O. NOVÁK [10], K. GASPAR [11], A. J. SEGAL [12], I. M. RABINOVIČ [13], die Studie von O. LUETKENS [14] und eine Reihe weiterer.

Alle diese Arbeiten benützen grösstenteils rein mechanische Begriffe und Zusammenhänge mit Rücksicht auf die speziellen Eigenschaften der Rahmentragwerke. Weil jedoch die Berechnung des Rahmentragwerkes äquivalent mit der Lösung des Systems seiner Deformationsgleichung ist, so lassen sich alle diese Methoden als Lösungsmethode für ein spezielles Gleichungssystem auffassen.

In dieser Arbeit werden wir uns nur mit einem Typ der Rahmentragwerke befassen, mit dem Rahmentragwerk mit unverschiebbaren, drehbaren starren Knoten. Sofern wir von Rahmentragwerken sprechen werden, werden wir immer diese Art von Tragwerken meinen.

Mit Rücksicht auf das, was schon gesagt wurde, ist leicht zu sehen, dass die Deformationsgleichungen des Rahmentragwerkes einige spezielle Eigenschaften haben. Es hat also auch die umgekehrte Frage einen Sinn: ob wir ein gegebenes System linearer Gleichungen als System der Deformationsgleichungen eines Rahmentragwerkes mit unverschiebbaren Knoten betrachten können.[1]) In dieser Arbeit wird die Beschreibung eines solchen Systems gegeben und die notwendige und hinreichende Bedingung dafür gefunden, dass zu einem gegebenen linearen Gleichungssystem ein Rahmentragwerk existiert, dessen Deformationsgleichungssystem das gegebene System ist.

Wenn ein solches Tragwerk existiert, so lassen sich verschiedene Methoden, mechanische Begriffe und Vorstellungen aus der Rahmentheorie auf diese Systeme linearer Gleichungen übertragen. Es lassen sich dabei auch die experimentellen Lösungsmethoden der Deformation von Rahmentragwerken benützen und das Rahmentragwerk kann als System linearer Gleichungen des gegebenen speziellen Gleichungssystems aufgefasst werden. Am Ende dieser Arbeit zeigen wir noch, dass das Deformationsgleichungssystem des Rahmentragwerkes mit Hilfe elektrischer Netze gebildet aus Vierpolen realisiert werden kann.

II. DAS RAHMENTRAGWERK

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff des Rahmentragwerkes genauer an.

Es seien in der Ebene n Punkt A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ gegeben. Ein einfaches Rahmentragwerk nennen wir ein Tragwerk mit unverschiebbaren drehbaren starren Knoten in den Punkten A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Dabei sind je zwei Knoten A_i, A_j $(i \neq j)$ allgemein durch einen Träger $P_{i,j} = P_{j,i}$ verbunden. Wir setzen die Belastung des Rahmen durch die Momente M_i in den Knoten A_i voraus. Als Unbekannte betrachten wir die Drehung φ_i in den Knoten A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Der Begriff des einfachen Rahmentragwerkes wird am besten durch ein Beispiel (siehe Abb. 1) erläutert. In den Knoten A_1, A_2, A_3, A_4 wird eine starre Ver-

[1]) Wenn ein gegebenes Rahmentragwerk existiert, dessen System der Deformationsgleichungen das gegebene System ist, dann ist es klar, dass auch eine ganze Reihe solcher Tragwerke existiert, die deformativ äquivalent sind, d. h. die auf das gleiche System von Deformationsgleichungen führen.

bindung vorausgesetzt. Die Kreuzung der Stäbe $P_{1,3}$ und $P_{1,4}$ ist bloss scheinbar, d. h. diese Stäbe sind überhaupt nicht verbunden. Das System der Deformationsgleichungen für dieses Tragwerk ist von folgender Form:

$$\varphi_1(p_{1,2} + p_{1,3} + p_{1,4}) + \\ + \varphi_2 q_{1,2} + \varphi_3 q_{1,3} + \varphi_4 q_{1,} = M_{1,4}\,,$$

$$\varphi_1 q_{2,1} + \varphi_2(p_{2,1} + p_{2,3} + \\ + p_{2,4}) + \varphi_3 q_{2,3} + \varphi_4 q_{2,4} = M_2\,,$$

$$\varphi_1 q_{3,1} + \varphi_2 q_{3,2} + \varphi_3(p_{3,1} + \\ + p_{3,2} + p_{3,4}) + \varphi_4 q_{3,4} = M_3\,,$$

$$\varphi_1 q_{4,1} + \varphi_2 q_{4,2} + \varphi_3 q_{4,3} + \\ + \varphi_4(p_{4,1} + p_{4,2} + p_{4,3}) = M_4\,.$$

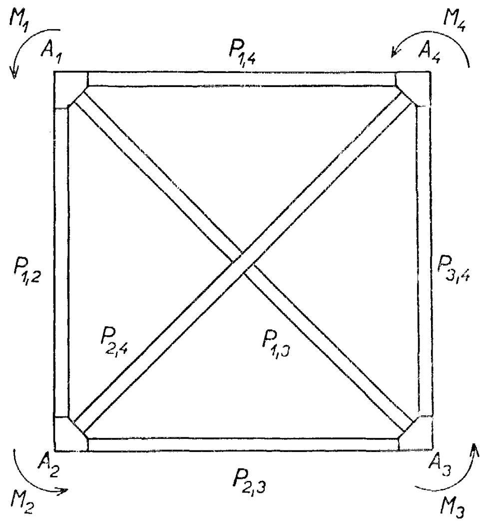

Abb. 1. Das einfache Rahmentragwerk.

Hier bedeutet $p_{i,j}$ resp. $q_{i,j}$, i, $j = 1, 2, \ldots, n$ das Moment in dem Knoten A_i resp. A_j des Stabes $P_{i,j}$, welcher im Punkte A_i die Knotendrehung $\varphi_i = 1$ und im Punkte A_j die Drehung $\varphi_j = 0$ hat, M_i $(i = 1, \ldots, 4)$ ist das Moment, welches im Knoten A_i wirkt (siehe Abb. 2). Die Zeichenverabredung fassen wir so auf wie es allgemein üblich ist: die Knotendrehung ist positiv, wenn sich der Knoten im Uhrzeigersinn dreht. Das Moment M_i im Endpunkt A_i des Stabes $P_{i,j}$ des Tragwerkes ist positiv, wenn es sich im Uhrzeigersinn dreht. Alle Koeffizienten $p_{i,j}$, $q_{i,j}$ $(i \neq j,\ i,\ j = 1, \ldots, 4)$ sind offensichtlich nichtnegativ.

Abb. 2a. Die Durchbiegung.

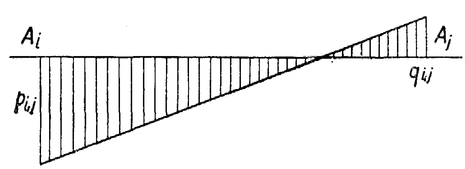

Abb. 2b. Das Moment.

Um auch negative Koeffizienten $q_{i,j}$ realisieren zu können, werden wir das allgemeine Tragwerk studieren, wo die Stäbe $P_{i,j}$ durch durchlaufende Träger von zwei Feldern realisiert werden. Der Begriff wird wieder am besten durch ein Beispiel (siehe Abb. 3) erläutert. Die Deformationsgleichungen für dieses Rahmentragwerk — wenn wir die Drehung der Hilfsknoten $A_{1,4}$, $A_{1,2}$ usw. nicht als Unbekannte betrachten — werden dieselben sein, nur die Koeffizienten $p_{i,j}$ und $q_{i,j}$ haben eine andere Bedeutung. So z. Bspl. für den Stab $P_{1,4}$

wird $p_{1,4}$ resp. $q_{1,4}$ das Moment in den Knoten A_1 resp. A_4 des Stabes $P_{1,4}$ bedeuten, der im Punkte A_1 die Knotendrehung $\varphi_1 = 1$ und im Punkte A_4 die Drehung $\varphi_4 = 0$ hat. (Siehe Abb. 4.) In diesem Fall wird $q_{1,4} \leqq 0$ sein.

Der Unterschied zwischen einem einfachen und allgemeinen Tragwerk besteht also darin, dass das einfache Tragwerk nur einfache Träger von zwei Auflagen in den Knoten enthält, wogegen das allgemeine auch zusammengesetzte Träger, die durch durchlaufende Träger von zwei Feldern gebildet werden, enthalten kann.

Soweit wir im Weiteren von einfachen oder zusammengesetzten Trägern sprechen werden, werden wir immer das, was wir hier erläutert haben, im Sinne haben.

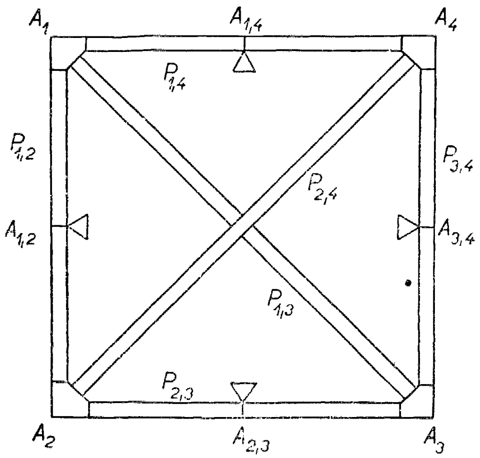

Abb. 3. Das allgemeine Rahmentragwerk.

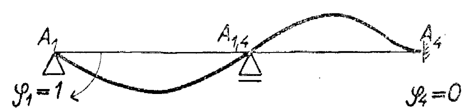

Abb. 4a. Die Durchbiegung.

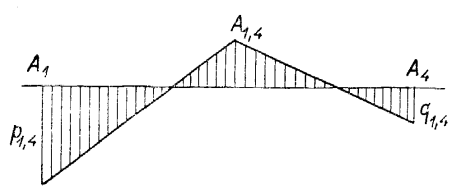

Abb. 4b. Das Moment.

III. DER EINFACHE UND ZUSAMMENGESETZTE TRÄGER

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir den Zusammenhang zwischen einem einfachen und zusammengesetzten Träger und den Zahlen $p_{i,j}$, $q_{i,j}$ gezeigt. Hier wollen wir uns eingehender mit dieser Frage beschäftigen.

Satz 1. *Es seien* $p_{1,2}$, $p_{2,1}$, $q_{1,2}$, $q_{2,1}$ *vier Zahlen. Dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines einfachen Trägers* $P_{1,2}$ *dessen entsprechende Zahlen aus dem vorhergehenden Absatz* $p_{1,2}$, $p_{2,1}$, $q_{1,2}$, $q_{2,1}$ *sind, folgende:*

$$\begin{aligned} &1.\quad p_{1,2} > 0\,,\quad p_{2,1} > 0\,,\quad q_{1,2} \geqq 0\,,\quad q_{2,1} \geqq 0\,; \\ &2.\quad q_{1,2} = q_{2,1}\,; \\ &3.\quad p_{1,2}p_{2,1} - q_{1,2}^2 > 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Beweis. Wir beweisen zuerst, dass die Bedingung notwendig ist. Es sei also ein Träger $P_{1,2}$ vorhanden und die gegebenen Zahlen haben für ihn die Bedeutung aus Abschnitt II. Dann folgt aus dem Satz über die Deformationsarbeit und dem Maxwell'schen Satz sofort, dass

$$p_{1,2} > 0\,, \quad p_{2,1} > 0\,, \quad q_{1,2} = q_{2,1} \quad \text{und} \quad p_{1,2}p_{2,1} - q_{1,2}^2 > 0$$

ist. Die Koeffizienten $q_{1,2}$ und $q_{2,1}$ sind offenbar nichtnegativ.

Wir beweisen nun, dass die Bedingung (1) auch hinreichend ist. Wir unterscheiden zwei Fälle: A) $q_{1,2} > 0$, B) $q_{1,2} = 0$.

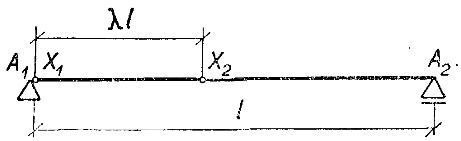

Abb. 5. Der Träger mit den Konstanten $p_{1,2}$, $p_{2,1}$, $q_{1,2}$.

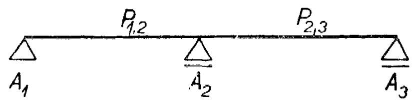

Abb. 6. Der zusammengesetzte Träger.

A) Wir konstruieren direkt den Träger $P_{1,2}$, der die angeführten Eigenschaften hat. Den Träger $P_{1,2}$ wählen wir folgendermassen: Der Träger hat die Länge l und besteht aus zwei vollkommen starren Teilen und zwei elastischen Gelenken K_1, K_2 mit den Starrheiten x_1, x_2 (siehe Abb. 5). Eins von diesen Gelenken K_1 liegt im Stützpunkt A_1, das zweite K_2 in der Entfernung λl $(0 < \lambda < 1)$ von diesem Auflager A_1. Die Starrheit x_1 resp. x_2 bedeutet den Drehwinkel im Gelenk für das Einsermoment. Es muss sichtlich $0 < x_i < \infty$ $(i = 1, 2)$ gelten. Wir behaupten nun, dass sofern wir

$$\lambda = \frac{p_{1,2}}{q_{1,2} + p_{1,2}}\,, \quad \Delta = p_{1,2}p_{2,1} - q_{1,2}^2\,, \quad x_1 = \frac{1-\lambda}{\lambda q_{1,2}}\,, \quad x_2 = \frac{q_{1,2}}{\Delta\lambda(1-\lambda)}$$

setzen, der Träger alle erforderlichen Eigenschaften hat. Da nach Voraussetzung $q_{1,2} > 0$, $\Delta > 0$ ist und $p_{1,2} > 0$ gilt, so ist $0 < \lambda < 1$, $0 < x_1 < \infty$ und $0 < x_2 < \infty$. Es genügt daher zu verifizieren, dass die Deformationsgleichungen (2), (3), (4) und (5) erfüllt sind:

$$(p_{2,1}\lambda - q_{2,1}(1-\lambda))\,x_2\lambda = 1\,, \tag{2}$$

$$-\,q_{2,1}x_1 + (p_{2,1}\lambda - q_{2,1}(1-\lambda))\,x_2(1-\lambda) = 0\,, \tag{3}$$

$$p_{1,2}x_1 + (p_{1,2}(1-\lambda) - q_{1,2}\lambda)\,x_2(1-\lambda) = 1\,, \tag{4}$$

$$(p_{1,2}(1-\lambda) - q_{1,2}\lambda)\,x_2\lambda = 0\,. \tag{5}$$

Durch einsetzen in diese Gleichungen sehen wir leicht ihre Richtigkeit ein.

B) Es sei $q_{1,2} = 0$. Dann setzen wir $\lambda = 1$, $x_1 = \dfrac{1}{p_{1,2}}$, $x_2 = \dfrac{1}{p_{2,1}}$. Wir verifizieren die Gleichungen (2)—(5) leicht. Satz 1 ist hiermit vollkommen bewiesen.

Wir wollen nun zum Studium des zusammengesetzten Trägers übergehen.

Satz 2. *Es seien $p_{1,3}, p_{3,1}, q_{1,3}, q_{3,1}$ vier Zahlen. Dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines zusammengesetzten Trägers $P_{1,3}$, für den die Zahlen $p_{1,3}, p_{3,1}, q_{1,3}, q_{3,1}$ die Bedeutung aus Absatz II haben, folgende:*

$$\begin{aligned} &1.\quad p_{1,3} > 0\,, \quad p_{3,1} > 0\,, \quad q_{1,3} \leqq 0\,, \quad q_{3,1} \leqq 0\,; \\ &2.\quad q_{1,3} = q_{3,1}\,; \\ &3.\quad p_{1,3}p_{3,1} - (3q_{1,3})^2 > 0\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Beweis. 1. Wir beweisen zuerst, dass die Bedingung notwendig ist. Es existiere also ein zusammengesetzter Träger $P_{1,3}$ mit den angeführten Eigenschaften. Es existieren einfache Stäbe $P_{1,2}$ und $P_{2,3}$ (siehe Abb. 6), welche den Träger $P_{1,3}$ bilden. Weil die Träger $P_{1,2}$ und $P_{2,3}$ einfach sind, existieren Zahlen $p_{1,2}, q_{1,2} = q_{2,1}, p_{2,1}$ und $p_{2,3}, q_{2,3} = q_{3,2}, p_{3,2}$ aus Satz 1. Wenn wir nun die Deformationsgleichungen bilden, so gilt

$$-\frac{q_{1,2}q_{2,3}}{p_{2,3}+p_{2,1}} = q_{1,3} = q_{3,1}\,, \tag{7}$$

$$p_{3,2} + \frac{q_{2,3}^2}{p_{2,3}+p_{2,1}} = p_{3,1}\,, \tag{8}$$

$$p_{1,2} + \frac{q_{1,2}^2}{p_{2,3}+p_{2,1}} = p_{1,3}\,. \tag{9}$$

Da nach Satz 1 $q_{1,2} \geqq 0$, $q_{2,3} \geqq 0$, $p_{1,2} > 0$, $p_{2,1} > 0$, $p_{2,3} > 0$, $p_{3,2} > 0$ ist, so gilt $q_{1,3} \leqq 0$, $p_{3,1} > 0$, $p_{1,3} > 0$ und $q_{1,3} = q_{3,1}$. Es bleibt die dritte Beziehung aus (6) zu beweisen. In der Tat ist

$$\begin{aligned} p_{1,3}p_{3,1} - (3q_{1,3})^2 &= \left(p_{3,2} + \frac{q_{2,3}^2}{p_{2,3}+p_{2,1}}\right)\left(p_{1,2} + \frac{q_{1,2}^2}{p_{2,3}+p_{2,1}}\right) - \\ &- \frac{9q_{1,2}^2q_{2,3}^2}{(p_{2,3}+p_{2,1})^2} = \frac{1}{(p_{2,3}+p_{2,1})^2}\,[p_{1,2}p_{3,2}(p_{2,3}+p_{2,1})^2 + \\ &+ (p_{1,2}q_{2,3}^2 + p_{3,2}q_{1,2}^2)(p_{2,3}+p_{2,1}) - 8q_{1,2}^2q_{2,3}^2] = \\ &= \frac{1}{(p_{2,3}+p_{2,1})^2}\,[p_{1,2}p_{3,2}(p_{2,3}-p_{2,1})^2 + q_{2,3}^2(p_{1,2}p_{2,1} - q_{1,2}^2) + \\ &+ q_{1,2}^2(p_{2,3}p_{3,2} - q_{2,3}^2) + (q_{2,3}\sqrt{p_{1,2}p_{2,3}} - q_{1,2}\sqrt{p_{3,2}p_{2,1}})^2 + \\ &+ 2(\sqrt{p_{1,2}p_{2,1}p_{2,3}p_{3,2}} - q_{1,2}q_{2,3})(2\sqrt{p_{1,2}p_{2,1}p_{2,3}p_{3,2}} + 3q_{1,2}q_{2,3})] > 0\,, \end{aligned}$$

denn in der eckigen Klammer sind (wie aus (1) folgt) alle Summanden nichtnegativ und der letzte sogar positiv.

2. Wir beweisen nun, dass die Erfüllung des Systems (6) auch eine hinreichende Bedingung ist. Wir bilden einen zusammengesetzten Träger mit den erforderlichen Eigenschaften. Mit Rücksicht auf Satz 1 genügt es, die Zahlen $p_{1,2}, p_{2,1}, q_{1,2} = q_{2,1}$ und $p_{2,3}, p_{3,2}, q_{2,3} = q_{3,2}$ so zu bestimmen, dass sie die Glei-

chung des Systems (1) und gleichzeitig die Gleichungen (7), (8), (9) erfüllen. Wir setzen zuerst voraus, dass $-q_{1,3} = q > 0$ ist. Wir setzen

$$p_{1,2} = p_{1,3} - \frac{q}{\psi}, \quad \psi p_{2,1} = p_{3,1} - q\psi,$$

wo

$$\psi = \frac{3q}{p_{1,3}}, \quad p_{2,3} = \psi p_{1,2}, \quad p_{3,2} = \psi p_{2,1},$$

$$q_{1,2}^2 = \frac{p_{1,3}}{9q}(p_{3,1}p_{1,3} + 3q^2), \quad q_{2,3} = \psi q_{1,2}$$

ist.

Wir überzeugen uns leicht, dass die Gleichungen (7), (8) und (9) erfüllt sind. Ausserdem ist ersichtlich, dass $p_{1,2} > 0$ ist. (In der Tat ist $p_{1,2} = \frac{2}{3}p_{1,3} > 0$, $p_{2,1} = \frac{p_{3,1}\,p_{1,3}}{3q} - q > 0$.) Es genügt daher die Ungleichungen

$$p_{1,2}p_{2,1} - q_{1,2}^2 > 0 \quad \text{und} \quad p_{2,3}p_{3,2} - q_{2,3}^2 > 0$$

zu verifizieren. Es ist jedoch

$$p_{1,2}p_{2,1} - q_{1,2}^2 = \frac{p_{1,3}}{9q}(2p_{3,1}p_{1,3} - 6q^2 - p_{3,1}p_{1,3} - 3q^2) =$$

$$= \frac{p_{1,3}}{9q}(p_{3,1}p_{1,3} - 9q^2) > 0, \quad p_{2,3}p_{3,2} - q_{2,3}^2 = \psi^2(p_{1,2}p_{2,1} - q_{1,2}^2) > 0.$$

Wir setzen nun den zweiten Fall voraus, den, dass $-q_{1,3} = q = 0$ gilt. Dann genügt es $p_{1,2} = p_{1,3}$, $p_{3,1} = p_{3,2}$, $q_{1,2} = q_{2,3} = 0$ zu setzen und $p_{2,3} > 0$, $p_{2,1} > 0$ beliebig zu wählen und Satz 2 ist bewiesen.

IV. DIE DEFORMATIONSGLEICHUNGEN DES RAHMENTRAGWERKES

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit den Eigenschaften der Systeme von Deformationsgleichungen eingehender beschäftigen. Wir führen folgende Definition ein.

Definition 1. *Wir werden sagen, dass die Matrix $A = (a_{i,j})$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ die Eigenschaft $\mathfrak{A}$ hat, wenn die Matrizen*

$$B_{i,j} = \begin{pmatrix} p_{i,j}, & q_{i,j} \\ q_{j,i}, & p_{j,i} \end{pmatrix}, \quad i \neq j, \ i, j = 1, 2, \ldots, n$$

so existieren, dass

a) *die Matrizen $B_{i,j}$ symmetrische positiv definite Matrizen sind oder alle Elemente gleich Null haben;*

b) $a_{i,j} = q_{i,j}$ $(i \neq j)$;

c) $a_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} p_{i,j}$ *ist.*

Wir beweisen nun folgenden Satz.

Satz 3. *Es sei*

$$\begin{aligned} a_{1,1}\varphi_1 + a_{1,2}\varphi_2 + \ldots + a_{1,n}\varphi_n &= b_1\,, \\ a_{2,1}\varphi_1 + a_{2,2}\varphi_2 + \ldots + a_{2,n}\varphi_n &= b_2\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}\varphi_1 + a_{n,2}\varphi_2 + \ldots + a_{n,n}\varphi_n &= b_n \end{aligned} \tag{10}$$

ein lineares Gleichungssystem und $a_{i,j} \geqq 0$ für alle i, j. Dann existiert ein einfaches Rahmentragwerk, dessen Deformationsgleichungen dann und nur dass das gegebene System sind, wenn die Matrix $A = (a_{i,j})$ dieses Systems die Eigenschaft $\mathfrak{A}$ hat.

Beweis. Es sei ein einfaches Rahmentragwerk mit unverschiebbaren Knoten gegeben. Wir beweisen, dass die Matrix des Systems der Deformationsgleichungen die Eigenschaft $\mathfrak{A}$ hat. Wir bezeichnen A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ die Knoten dieses Tragwerkes und $P_{i,j}$ $(i \neq j)$ seine Träger. Nach Satz 1 lässt sich zu jedem Träger $P_{i,j}$ die Matrix $B_{i,j}$ mit allen nichtnegativen Elementen zuordnen, die positiv definit und symmetrisch ist. Das System der Deformationsgleichungen dieses Tragwerkes ist ein System mit einer Matrix, deren Elemente wie in Definition 1 gebildet sind. Im Falle, dass die Knoten A_i und A_j nicht durch einen Träger verbunden sind, setzen wir $B_{i,j}$ gleich der Nullmatrix.

Es sei ein Gleichungssystem gegeben, dessen Matrix die Eigenschaft $\mathfrak{A}$ hat. Dann existieren symmetrische positiv definite Matricen $B_{i,j}$ mit nichtnegativen Elementen, für die ein Zusammenhang mit den Elemente der Matrix der Deformationsgleichungen nach Definition 1 besteht. Für $B_{i,j} \neq 0$ existiert nach Satz 1 ein Träger $P_{i,j}$ mit den Koeffizienten $p_{i,j}$, $q_{i,j} = q_{j,i}$, $p_{j,i}$, welche die Eigenschaft aus Abschnitt II haben. Das entsprechende Rahmentragwerk hat dann n Knoten A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, wobei die Knoten durch Träger $P_{i,j}$ verbunden werden, wenn $B_{i,j} \neq 0$ ist, und nicht verbunden werden, wenn $B_{i,j} = 0$ ist. Der Satz ist bewiesen.

Bisher haben wir vorausgesetzt, dass alle Elemente der Matrix $A = (a_{i,j})$ nichtnegativ sind. Weiter werden wir uns mit dem Fall, der dies nicht voraussetzt, beschäftigen. Es ist dann notwendig vom einfachen Tragwerk zum zusammengesetzten allgemeinen überzugehen.

Satz 4. *Es sei*

$$\begin{aligned} a_{1,1}\varphi_1 + a_{1,2}\varphi_2 + \ldots + a_{1,n}\varphi_n &= b_1\,, \\ a_{2,1}\varphi_1 + a_{2,2}\varphi_2 + \ldots + a_{2,n}\varphi_n &= b_2\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}\varphi_1 + a_{n,2}\varphi_2 + \ldots + a_{n,n}\varphi_n &= b_n \end{aligned} \tag{11}$$

ein lineares Gleichungssystem, $A = (a_{i,j})$ sei die Matrix dieses Systems. Es sei $\hat{A} = (\hat{a}_{i,j})$ die auf folgende Art zu A zogeordnete Matrix:

a) *sofern* $a_{i,j} \geqq 0$ *ist, sei* $\hat{a}_{i,j} = a_{i,j}$;

b) *sofern* $a_{i,j} < 0$, *dann sei* $\hat{a}_{i,j} = 3a_{i,j}$.

Das System (11) *ist dann und nur dann das System der Deformationsgleichungen eines allgemeinen Rahmentragwerkes, wenn die Matrix* $\hat{A}$ *die Eigenschaft* $\mathfrak{A}$ *hat.*

Beweis. Es sei ein allgemeines Rahmentragwerk mit n Knoten A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) gegeben. Dann lässt sich zu jedem einfachen Träger $P_{i,j}$ eine positiv definite symmetrische Matrix $B_{i,j}$ zuordnen, deren Elemente alle nichtnegativ sind. (Siehe Satz 1.) Im Fall, dass es sich um einen zusammengesetzten Träger handelt, ist die Matrix $B_{i,j}$ so wie die zugehörige Matrix $\widehat{B}_{i,j}$ eine symmetrische positiv definite Matrix. (Siehe Satz 2.) Sofern die Knoten A_i, A_j nicht verbunden sind, setzen wir $B_{i,j} = 0$. Nun ist es klar, dass das System der Deformationsgleichungen die Matrix A hat, deren Elemente auf gleiche Weise wie jene der Definition 1 gebildet werden und dass $\hat{A}$ die Eigenschaft $\mathfrak{A}$ hat.[2])

Ganz analog wie im Satz 3 können wir beweisen, dass die Eigenschaft $\mathfrak{A}$ der Matrix $\hat{A}$ auch eine hinreichende Bedingung ist.

V. ÜBER DIE EIGENSCHAFT $\mathfrak{A}$ EINER QUADRATISCHEN MATRIX

In diesem Abschnitt wollen wir diese Eigenschaft ausführlicher studieren. Wir beschränken uns auf den Fall, wo in jeder Reihe der Matrix $A = (a_{ij})$ wenigstens ein von Nullverschiedenes Element existiert.[3]) Unter dieser Voraussetzung ist die Eigenschaft $\mathfrak{A}$ der Matrix A äquivalent mit folgender Eigenschaft $\mathfrak{A}'$:

Es existieren positive Zahlen $s_{i,k}$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq k$, so, dass

$$a_{i,i} > \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} s_{i,k} ,$$

$$s_{i,k} s_{k,i} > a_{i,k}^2 \quad (i \neq k,\ i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

gilt. Wenn nämlich die Matrix A die Eigenschaft $\mathfrak{A}$ hat, so existieren Zahlen $p_{i,k}$ ($i \neq k, i, k = 1, 2, \ldots, n$) derart, dass

$$a_{i,i} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} p_{i,k}$$

gilt und weiter $p_{i,k} p_{k,i} \geqq a_{i,k}^2$ ist; wenn $p_{i,k} p_{k,i} = a_{i,k}^2$ ist, so gilt $a_{i,k} = p_{i,k} =$

[2]) Wir bemerken, dass das System der Deformationsgleichungen des gegebenen Rahmentragwerkes ein System mit der Matrix A ist. Das System mit der Matrix $\hat{A}$ hat jedoch keinen mechanischen Zusammenhang mit dem gegebenen Tragwerk.

[3]) Wir beschränken uns auf diesen Fall, weil Matrizen, die in der ganzen Reihe lauter Nullen haben, praktisch ohne Bedeutung sind.

$= p_{k,i} = 0$. Wir zeigen, dass für jedes $i = 1, 2, \ldots, n$ ein Index $l_i \neq i$ so existiert, dass $p_{i,l_i} p_{l_i,i} > a^2_{i,l_i}$ ist; wenn für jedes $k \neq i$ das Gleichheitszeichen gelten würde, wäre (für $n \geqq 2$) $a_{i,k} = 0$ und $p_{i,k} = 0$ für $k \neq i$, d. h. auch $a_{i,i} = 0$ und die i-te Reihe wäre aus lauter Elementen gleich Null gebildet, das entgegen unserer Voraussetzung ist.

Nun definieren wir für $i = 1, 2, \ldots, n$ die Zahlen $s_{i,k}$ wie folgt: s_{i,l_i} wählen wir derart, dass $0 < s_{i,l_i} < p_{i,l_i}$ ist, aber dabei so, dass $s_{i,l_i} p_{l_i,i} > a^2_{i,l_i}$ gilt; wenn $s_{l_i,i}$ schon definiert wurde, so fordern wir noch die Erfüllung von $s_{i,l_i} s_{l_i,i} > a^2_{i,l_i}$. Die weiteren $s_{i,k}$ erhalten wir durch eine kleine Vergrösserung der entsprechenden $p_{i,k}$ und zwar so, dass noch $a_{i,i} > \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} s_{i,k}$ ist. Es ist nun klar, dass diese $s_{i,k}$ die Bedingungen der Eigenschaft $\mathfrak{A}'$ erfüllen.

Hat nun umgekehrt A die Eigenschaft $\mathfrak{A}'$, so setzen wir alle $p_{i,k}$ $(i \neq k)$ gleich den entsprechenden $s_{i,k}$, mit Ausnahme eines p_{i,k_i} $(k_i \neq i)$ für jedes i, welches wir so wählen, dass $\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} p_{i,k} = a_{i,i}$ ist (sodass $p_{i,k_i} > s_{i,k_i}$ gilt). Setzen wir $q_{i,k} = a_{i,k}$ für $i \neq k$, so werden die Bedingungen der Eigenschaft $\mathfrak{A}$ erfüllt.

Wir beweisen nun folgenden Satz.

Satz 5. *Es sei $A = (a_{i,k})$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ eine symmetrische Matrix $(n \geqq 2)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *jede symmetrische Matrix $B = (b_{i,k})$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, für die $b_{i,i} \geqq a_{i,i}$, $|b_{i,k}| \leqq |a_{i,k}|$ $(i \neq k)$ gilt, ist positiv definit;*

(b) *die Matrix $C = (c_{i,k})$, $c_{i,i} = a_{i,i}$, $c_{i,k} = -|a_{i,k}|$ $(i \neq k)$, ist positiv definit;*

(c) *es existieren Zahlen $d_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ so, dass*

$$a_{i,i} d_i > \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} |a_{i,k}|\, d_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ist;

(d) *es existieren positive Zahlen $s_{i,k}$ $(i \neq k,\ i, k = 1, 2, \ldots, n)$ so, dass*

$$a_{i,i} > \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} s_{i,k} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ist (oder A hat die Eigenschaft $\mathfrak{A}'$).

Beweis. I. Aus (a) folgt (b). Es genügt $B = C$ zu wählen.

II. Aus (b) folgt (c). Von der Matrix C können wir voraussetzen, dass sie unzerlegbar ist, denn der Beweis der Implikation (b) $\Rightarrow$ (c) für eine zerlegbare

Matrix folgt leicht aus der Gültigkeit dieser Implikation für eine unzerlegbare Matrix.

Es seien $\gamma_1 \leqq \gamma_2 \leqq \ldots \leqq \gamma_n$ (reelle und positive) Eigenwerte der Matrix C. Dann ist die Matrix $\gamma_n E - C$, wo E die Einheitsmatrix ist, eine nichtnegativ definite Matrix mit den Eigenwerten $\gamma_n - \gamma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Die Matrix $\gamma_n E - C$ ist jedoch auch nichtnegativ (sie hat in der Diagonale nichtnegative Zahlen, denn sie ist nichtnegativ definit, ausserhalb der Diagonale hat sie die Elemente $|a_{i,k}|$) und unzerlegbar. Nach dem Satz von Frobenius[4]) existiert ein positiver Eigenwert λ und ein positiver Eigenvektor d (Spalte) mit den Koordinaten $d_1, d_2, \ldots, d_n$ derart, dass

$$(\gamma_n E - C)\, d = \lambda d$$

gilt, wobei

$$\lambda = \max_{i=1,2\ldots,n} |\gamma_n - \gamma_i| = \gamma_n - \gamma_1$$

ist. Hieraus folgt

$$Cd = \gamma_1 d < 0\,,$$

oder durch Umformung mit Hilfe der $a_{i,k}$

$$a_{i,i} d_i > \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} |a_{i,k}|\, d_k\,,$$

wie wir beweisen wollten.

III. Aus (c) folgt (d). Es genügt $s_{i,k} = |a_{i,k}| \dfrac{d_k}{d_i} + \varepsilon_{i,k}$ $(i \neq k)$ zu setzen, wo $\varepsilon_{i,k} > 0$ so klein sind, dass

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \varepsilon_{i,k} < \frac{1}{d_i} \Big(a_{i,i} d_i - \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} |a_{i,k}|\, d_k\Big)$$

gilt.

IV. Aus (d) folgt (a). Es ist nämlich für $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$

$$\sum_{i,k=1}^{n} b_{i,k} x_i x_k \geqq \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,k=1\\i<k}}^{n} b_{i,k} x_i x_k > \sum_{\substack{i,k=1\\i<k}}^{n} (s_{i,k} x_i^2 + s_{k,i} x_k^2) -$$

$$- 2 \sum_{\substack{i,k=2\\i<k}}^{n} |b_{i,k}|\, |x_i|\, |x_k| \geqq \sum_{\substack{i,k=1\\i<k}}^{n} (\sqrt{s_{i,k}}|x_i| - \sqrt{s_{k,i}}|x_k|)^2 +$$

$$+ 2 \sum_{\substack{i,k=1\\i<k}}^{n} (\sqrt{s_{i,k} s_{k,i}} - |b_{i,k}|)|x_i|\, |x_k| \geqq 2 \sum_{\substack{i,k=1\\i<k}}^{n} (|a_{ik}| - |b_{ik}|)\, |x_i|\, |x_k| \geqq 0\,.$$

Also ist B positiv definit.

---

[4]) Zum Beispiel [15], S. 323.

Der Satz 5 erlaubt uns zusammen mit dem Sätzen 3 und 4 die Fragen zu beantworten, welche wir in Absatz I gestellt haben. Er löst vollständig die Frage, wann zu einem gegebenen Gleichungssystem ein Rahmentragwerk existiert, dessen Deformationsgleichungen durch das gegebene System repräsentiert werden. Hir geben diesen Satz in seiner endgültigen Form an.

Satz 6. *Es sei*

$$\begin{aligned} a_{1,1}\varphi_1 + a_{1,2}\varphi_2 + \ldots + a_{1,n}\varphi_n &= b_1 , \\ a_{2,1}\varphi_1 + a_{2,2}\varphi_2 + \ldots + a_{2,n}\varphi_n &= b_2 , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n,1}\varphi_1 + a_{n,2}\varphi_2 + \ldots + a_{n,n}\varphi_n &= b_n , \end{aligned} \tag{12}$$

ein lineares Gleichungssystem mit der symmetrischen Matrix $A = (a_{i,j})$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ *und es sei in jeder Reihe der Matrix* A *wenigstens ein von Null verschiedenes Element vorhanden. Das System* (12) *ist dann und nur dann das System der Deformationsgleichungen eines Rahmentragwerkes, wenn die Matrix*

$$B = (b_{i,j}) , \quad b_{i,i} = a_{i,i} , \quad b_{i,j} = - a_{i,j} \quad \textit{für} \quad i \neq j \quad \textit{und} \quad a_{i,j} \geqq 0 ,$$
$$b_{i,j} = 3a_{i,j} \quad \textit{für} \quad i \neq j \quad \textit{und} \quad a_{i,j} < 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n) ,$$

positiv definit ist.

Aus diesem Satz folgt auch, dass nicht jedes System mit einer positiv definiten Matrix die Deformationsgleichungen eines Rahmentragwerkes darstellt, sofern $n > 2$ ist. So ist z. Bspl. die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2, & 1, & 1 \\ 1, & 2, & 1 \\ 1, & 1, & 2 \end{pmatrix}$$

positiv definit, kann aber nicht die Matrix der Deformationsgleichungen eines Rahmentragwerkes sein, denn die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2, & -1, & -1 \\ -1, & 2, & -1 \\ -1, & -1, & 2 \end{pmatrix}$$

ist nicht mehr positiv definit.

VI. EINIGE BEISPIELE

Stellen wir uns die Frage, ob die Deformationsgleichungen eines Rahmentragwerkes mit verschiebbaren Knoten als Deformationsgleichungen eines Rahmen mit nichtverschiebbaren Knoten ausgedrückt werden können. Wir betrachten Rechteckrahmen mit eingebauten Pfosten. Die Stäbe $P_{0,1}$, $P_{1,2}$, $P_{2,3}$ seien von konstantem Durchmesser. Bezeichnen wir $k_{i,j} = \dfrac{EJ_{i,j}}{l_{i,j}}$ die

Starrheiten des Trägers $P_{i,j}$, wobei $J_{i,j}$ resp. $l_{i,j}$ das Trägheitsmoment resp. die Stützweite des Trägers $P_{i,j}$ und E der Elastizitätsmodul ist. Es sei weiter $k_{0,1} = k_{2,3} = k$. Dann ist das System der Deformationsgleichungen dieses Rahmen mit verschiebbaren Knoten nach Abb. 7 folgendes:

$$2(k + k_{1,2})\,\varphi_1 + k_{1,2}\varphi_2 - 3k\psi = M_1\,,$$
$$k_{1,2}\varphi_1 + 2(k + k_{1,2})\,\varphi_2 - 3k\psi = M_2\,,$$
$$-\,3k\varphi_1 - 3k\varphi_2 + 12k\psi = V\,.$$

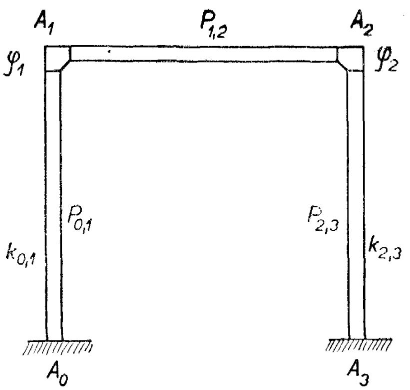

Abb. 7. Der Rahmen mit verschiebbaren Knoten.

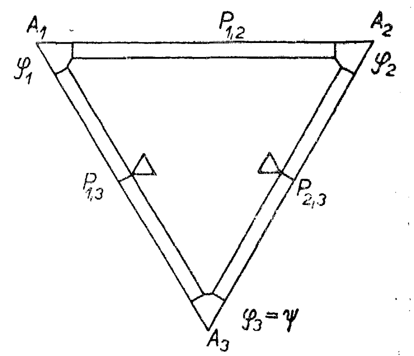

Abb. 8. Das allgemeine Rahmentragwerk mit unverschiebbaren Knoten, welches demjenigen nach Abb. 7 entspricht.

weil die Matrix dieses Systems negative Elemente enthält, existiert ein allgemeines Rahmentragwerk mit unverschiebbaren Knoten, welches dieselben Deformationsgleichung erfüllt, dann und nur dann, wenn die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2(k + k_{1,2},) & -k_{1,2}, & -9k \\ -k_{1,2}, & 2(k + k_{1,2}), & -9k \\ -9k, & -9k, & 12k \end{pmatrix}$$

positiv definit ist. Dazu genügt es in unserem Fall offenbar, dass die Determinante dieser Matrix positiv ist. Bezeichnen wir noch $\dfrac{k_{1,2}}{k} = \lambda$. Nun ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Determinante positiv ist, dass $\lambda > 11{,}5$ ist. Wenn also $\lambda > 11{,}5$ ist, so existiert ein allgemeines Rahmentragwerk mit unverschiebbaren Knoten, das dieselben Deformationsgleichungen hat wie das gegebene Tragwerk nach Abb. 7. Die Verschiebung stellt nun die Drehung des Ersatzknotens vor. Das Rahmentragwerk nach Abb. 8 wird nun dem Rahmen nach Abb. 7 entsprechen.

VII. SCHLUSS

In den vorgehenden Abschnitten wurde die Frage nach der Äquivalenz zwischen den Deformationsgleichungen eines Rahmentragwerkes und einem System linearer Gleichungen endgültig gelöst. Sehr ähnliche Gleichungen, in Bezug auf Bau und Eigenschaften, gelten auch für elektrische Netze, welche aus Vierpolen zusammengesetzt sind. An stelle des Trägers tritt ein Vierpol und die unbekannte Drehung wird durch die Spannung ersetzt. Dabei können wir entweder Vierpole, gebildet aus Spulen ohne Kapazität und Widerstände, betrachten, die von Wechselstrom durchflossen werden, oder Vierpole aus Ohmschen Widerständen gebildet, welche von Gleichstrom durchflossen werden. Mit diesen Fragen wollen wir uns hier jedoch nicht befassen. Über Fragen, welche elektrische Netzwerke, zusammengesetzt aus Vierpolen, vom algebraischen Standpunkt aus behandeln, siehe [16].

Literatur

[1] *Ostenfeld*: Die Deformationsmetode. Berlin 1926.
[2] *Takabeya*: Rahmentafeln. Berlin 1930.
[3] *Cross*: Continuity as a Factor in Reinforced Concrete Design. Proc. of the Amer. Concr. Inst. 1929.
[4] *Cross*: Analysis of continuous frames by distributing fixed-end moments. Proc. of the Amer. Soc. of Civil. Eng. 1930.
[5] *Cross, Morgan*: Continuous Frames of Reinforced Concrets. New York 1932.
[6] *Fornerod*: Berechnung mehrstöckiger kontinuierlicher Rahmen durch die Methode der algebraischen Verteilung. Schw. Bauzeitung 1933.
[7] *Dašek*: Výpočet rámových konstrukcí rozdělováním sil a momentů. Praha 1951.
[8] *Klouček*: Rozvod deformace jako podklad nové početní metody. Praha 1940.
[9] *Titz*: Momentenausgleichsverfahren. Wien 1948.
[10] *Novák*: Patrový rám v theorii a příkladech. Praha 1944.
[11] *Gaspar*: Die Berechnung mehrstöckiger Rahmen. Stuttgart 1948.
[12] *Сегаль*: Высотные сооружения. Москва 1949.
[13] *Рабинович*: Строительная механика стержневых систем. Москва 1946.
[14] *Luetkens*: Die Methoden der Rahmenstatik. Berlin 1949.
[15] *Гантмахер*: Теория матриц. Гостехиздат, Москва 1953.
[16] *Mikusiński*: Sur quelques inégalités pour les determinants. Bull. de l'acad. Pol. sc., cl. III, vol. V (1957), 699—700.

Souhrn

O SOUSTAVÁCH LINEÁRNÍCH ROVNIC TYPU RÁMOVÝCH KONSTRUKCÍ

IVO BABUŠKA, MIROSLAV FIEDLER

(Došlo dne 3. ledna 1959.)

Při výpočtu patrových rámů s neposuvnými styčníky deformační metodou se převádí problém rámu na soustavu lineárních rovnic speciálního typu, na soustavu tzv. deformačních rovnic. Práce udává nutnou a postačující podmínku pro to, aby k dané soustavě lineárních rovnic existovala rámová soustava s neposuvnými styčníky, jejíž systém deformačních rovnic je soustava daná.

Резюме

О СИСТЕМАХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА РАМНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

ИВО БАБУШКА, МИРОСЛАВ ФИДЛЕР (Ivo Babuška, Miroslav Fiedler)

(Поступило в редакцию 3/I 1959 г.)

Расчет этажных рам с неподвижными рамными узлами сводится к решению т. наз. уравнений деформации. Система таких уравнений деформации является системой линейных уравнений специального типа. В статье указывается необходимое и достаточное условие для того, чтобы к данной системе линейных уравнений существовала рамная конструкция с неподвижными рамными узлами, системой уравнений деформации которой является данная система.

В том случае, когда матрица системы имеет лишь положительные элементы, оказывается, что для того, чтобы к данной системе существовала подходящая рамная конструкция, необходимо и достаточно, чтобы матрица осталась положительно определенной и после изменения знака элементов, не лежащих в диагонали.

В работе также показано, каким образом можно произвести реализацию системы с отрицательными, не лежащими в диагонали элементами; также приведено необходимое и достаточное условие для реализации данной системы.

В заключение затрагиваются приложения к проблемам электротехники.