Václav Doležal

O použití distribucí v teorii lineárních dynamických soustav

Aplikace matematiky, Vol. 4 (1959), No. 6, 405–440

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102682

ČLÁNKY

O POUŽITÍ DISTRIBUCÍ V TEORII LINEÁRNÍCH DYNAMICKÝCH SOUSTAV

VÁCLAV DOLEŽAL

(Došlo dne 28. října 1958.) DT:517.948.34:531.3

První část článku je věnována některým základním skutečnostem teorie distribucí, zejména vlastnostem distribucí, které mají Laplaceův obraz.

Druhá část zabývá se systémem integrodiferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, jehož pravé strany jsou distribuce. (Takovým systémem je popsána dynamika každé lineární fysikální soustavy se soustředěnými parametry.) Je definováno distributivní řešení takového systému rovnic při dané počáteční podmínce, stanoveny podmínky existence a unicity a vyšetřeny některé jeho další vlastnosti. Je provedeno zevrubné fysikální zhodnocení dosažených výsledků a udán návod na konstrukci řešení v konkrétních případech. Použití teorie je ilustrováno dvěma praktickými příklady.

Tato práce navazuje na článek [1], který je věnován vyšetření vlastností systémů lineárních integrodiferenciálních rovnic, na které vede formulace problémů dynamiky lineárních fysikálních soustav se soustředěnými parametry.

Systém, který byl v [1] uvažován, měl tvar

$$\sum_{k=1}^{r} \{\alpha_{ik}x_k(t) + \beta_{ik}x_k'(t) + \gamma_{ik} \int_0^t x_k(\tau)\,\mathrm{d}\tau\} + q_i = f_i(t)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, r\,, \tag{1}$$

kde α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik}, q_i značí reálné konstanty. Tam byly též definovány pojmy zobecněného a klasického řešení soustavy (1) v případě, kdy $f_i(t)$ byly libovolné lebesgueovsky integrovatelné funkce, které nerostou příliš rychle. Mimo to byly odvozeny postačující podmínky pro existenci a unicitu těchto řešení.

Otázky, kterými se hodláme zabývat v tomto článku, objasníme nejlépe na příkladě. Uvažujme nějakou lineární soustavu, na kterou působí nějaké síly $f_i(t)$, jejíž chování je popsáno systémem (1). Stane-li se, že koeficienty (1) nesplňují jistou podmínku (tato byla v [1] označena $P2$ a je postačující podmínkou pro existenci jediného zobecněného řešení), neumíme rozhodnout, jak vypadá a zda vůbec existuje v systému funkcí řešení soustavy (1). Následující triviální případ „systému“

$$\int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1\,, \quad t > 0\,, \tag{2}$$

(který popisuje proud kondensátorem o kapacitě 1, na který bylo náhle připojeno jednotkové napětí) ukazuje, že neexistuje funkce $x(t)$, která by splňovala (2), ačkoli příklad má jistou fysikální realitu.

Další otázka, kterou nedovedeme na základě [1] řešit, je tato: Dejme tomu, že třeba je splněna podmínka $P2$, avšak vnější síly obsahují nějaké impulsy. Neznáme-li přesně tvar impulsů, ale jen jejich „plochu“, nebo chceme-li si řešení zjednodušit, je pak možno nějakým způsobem tyto impulsy charakterisovat a přisoudit (1) nějaké řešení, které by vystihovalo fysikální skutečnost?

Jak známo, v technické literatuře se obvykle takové impulsy vyjadřují „Diracovou funkcí“, pomocí které se pak na základě matematicky neoprávněných pochodů dospěje k jakémusi řešení. Zároveň se ukazuje, že ty představy, které máme o impulsu, nelze pomocí Diracovy funkce zachovat, a že tedy nebude asi zbývat nic jiného, než zavést nějaké obecnější bytosti než jsou funkce, které by zato měly lepší vlastnosti. Poznamenejme, že pro fysikální problém není podstatné, jakými matematickými objekty jej popíšeme, nýbrž to, do jaké míry tyto objekty vystihují skutečnost. Přirozeně budeme požadovat, aby v případě, kdy fysikální veličiny je možno popsat pomocí funkcí, bylo možno obecnější objekty s těmito funkcemi ztotožňovat.

Jak uvidíme dále, budou to distribuce, které uvedené požadavky splní a dovolí odpovědět na obě právě diskutované otázky dynamiky fysikální soustavy.

Poznamenejme zároveň, že tímto způsobem dosáhneme podstatného zobecnění výsledků z [1] a mimo to se celá teorie systému (1) zjednoduší a stane se velmi průzračnou. Dále dospějeme k jistému obecnému formalismu v použití Laplaceovy transformace, který je užitečnou pomůckou při řešení konkrétních problémů.

Je přirozené, že k tomuto cíli budeme potřebovat některých výsledků teorie distribucí; ježto nechceme tyto znalosti u čtenáře předpokládat a zatěžovat jej sháněním různých vět v příslušné (a někdy svými nároky dosti nepřístupné) literatuře, uvedeme na začátku první části článku elementárním způsobem nejzákladnější fakta této teorie. (K hlubšímu studiu poslouží [2] a [3].) Zato všimneme si zde blíže některých speciálních pojmů, jako laplaceovských distribucí, obrazu, konvoluce apod., neboť je budeme potřebovat ve druhé části k řešení vlastního problému. (Tyto pojmy, zavedené jinou cestou a pro speciálnější případy nalezne čtenář v [4].) Tím čtenář zároveň získá znalosti, kterých bude moci použít i pro řešení jiných otázek než dynamiky soustav.

Ve druhé části článku budeme se pak zabývat systémem (1) ze stanoviska teorie distribucí. Zároveň ukážeme na souvislost tohoto pojetí s pojmy práce [1], na fysikální význam výsledků a konečně na některé závěry, vyplývající z teorie pro praktické použití.

ČÁST I.

Přistupme tedy ke stručnému výkladu základů teorie distribucí. Distribuce zavedeme jako jisté lineární a spojité funkcionály. Jak známo, funkcionálem se nazývá předpis, kterým je každé funkci z nějakého systému $\boldsymbol{K}$ přiřazeno právě jedno číslo. Funkcionály budeme označovat latinskými písmeny $f, g, h, \ldots$ Symbol (f, φ) bude značit hodnotu funkcionálu f pro „argument" rovný φ, tj. číslo, přiřazené funkci φ.

Systém funkcí $\boldsymbol{K}$, na kterém budeme distribuce definovat, nechť je tvořen všemi reálnými funkcemi $\varphi(t)$, definovanými na $(-\infty, \infty)$, které mají tyto vlastnosti:

1. $\varphi(t)$ mají v $(-\infty, \infty)$ všechny derivace;

2. každá funkce $\varphi(t)$ je rovna nule vně některého konečného intervalu (který obecně závisí na $\varphi(t)$).

Přitom zavedeme tuto terminologii. Řekneme, že posloupnost $\varphi_k(t) \in \boldsymbol{K}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ konverguje k nule v prostoru $\boldsymbol{K}$ (což označíme $\varphi_k(t) \to 0$), existuje-li konečný interval $\langle t_1, t_2 \rangle$ tak, že $\varphi_k(t) = 0$ vně $\langle t_1, t_2 \rangle$ pro všechna k, přičemž $\varphi_k(t) \to 0$, $\varphi_k^{(n)}(t) \to 0$ stejnoměrně na $\langle t_1, t_2 \rangle$ pro všechna n.

Příkladem takové funkce z $\boldsymbol{K}$ je

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha,\beta}(t) &= \exp\left(-\frac{1}{t-\alpha} - \frac{1}{\beta - t}\right) \quad \text{pro} \quad t \in (\alpha, \beta),\ \alpha < \beta\,, \\ &= 0 \quad \text{vně} \quad (\alpha, \beta)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Všimněme si na tomto místě, že platí toto zřejmé tvrzení: Nechť $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in \boldsymbol{K}$, $a(t)$ je libovolná reálná funkce, mající v $(-\infty, \infty)$ všechny derivace. Jsou-li α_1, α_2 reálná čísla, n přirozené číslo a $\varkappa > 0$, pak platí $a(t)\,\varphi_1(t) \in \boldsymbol{K}$, $\alpha_1\varphi_1(t) + \alpha_2\varphi_2(t) \in \boldsymbol{K}$, $\varphi_1^{(n)}(t) \in \boldsymbol{K}$, $[\varphi_1(t)]^\varkappa \in \boldsymbol{K}$. Je tedy systém $\boldsymbol{K}$ poměrně „hodně bohatý".

Distribuce zavedeme nyní takto:

Řekneme, že funkcionál f je distribuce, je-li f definován na $\boldsymbol{K}$ a splňuje-li tyto podmínky:

1. pro libovolná reálná čísla α_1, α_2 a funkce $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in \boldsymbol{K}$ je

$$(f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1(f, \varphi_1) + \alpha_2(f, \varphi_2) \tag{4}$$

(linearita funkcionálu);

2. pro libovolnou posloupnost $\varphi_k(t) \to 0$ v $\boldsymbol{K}$ konverguje posloupnost čísel $(f, \varphi_k) \to 0$ (spojitost funkcionálu).

Přitom pod rovností distribucí $f = g$ budeme rozumět, že $(f, \varphi) = (g, \varphi)$ pro všechny $\varphi(t) \in \mathbf{K}$. (Upozorněme, že v symbolu (f, φ) bude zásadně první písmeno označovat funkcionál, druhé funkci z $\mathbf{K}$.)

Uveďme si příklad distribuce! Položíme-li

$$(g, \varphi) = \varphi'(0) + 2\varphi(1) - \int_0^1 \tau^2 \varphi(\tau)\, d\tau ,$$

je tímto předpisem zřejmě definována distribuce. (Lehko zjistíme, že (g, φ) splňuje podmínky 1. a 2.

Ukažme nyní, kterak je možno lokálně integrovatelnou funkci $f(t)$ vyjádřit jako distribuci.[1])

Klademe-li

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau , \tag{5}$$

lehko vidíme, že (f, φ) splňuje podmínky 1., 2. a je tedy distribucí[2]). Možno tedy předpisem (5) pojímat každou lokálně integrovatelnou funkci jako distribuci. Každou distribuci, kterou lze vyjádřit pomocí (5), nazveme regulární. Není-li takové vyjádření možné, budeme ji nazývat singulární (uvidíme za okamžik, že takové distribuce existují).

Poznamenejme, že vyjádření regulární distribuce integrálem (5) je jednoznačné, tj. že různým funkcím $f(t)$, $g(t)$ odpovídají různé distribuce. Vskutku, jsou-li f, g regulární a je-li $f = g$, znamená to, že $(f, \varphi) - (g, \varphi) = 0$ pro každou $\varphi(t) \in \mathbf{K}$, tj. že

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(\tau) - g(\tau)]\, \varphi(\tau)\, d\tau = 0 .$$

Budeme-li za $\varphi(t)$ postupně klást funkce $[\varphi_{\alpha,\beta}(t)]^{\frac{1}{n}}$ (podle (3)), dostaneme, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta [f(\tau) - g(\tau)] \,.\, [\varphi_{\alpha,\beta}(\tau)]^{\frac{1}{n}}\, d\tau = 0 ; \tag{6}$$

avšak $[\varphi_{\alpha,\beta}(t)]^{\frac{1}{n}} \to 1$ na (α, β), a to dokonce monotonně. Možno tedy v (6) přehodit pořadí limitování a integrace, čímž dostaneme $\int_\alpha^\beta [f(\tau) - g(\tau)]\, dt = 0$ pro všechna $\alpha < \beta$. Z toho však vyplývá, že $f(t) = g(t)$ skoro všude, a jednoznačnost je dokázána.

---

[1]) Funkci $f(t)$ nazveme lokálně integrovatelnou, existuje-li Lebesgueův integrál $\int_{t_1}^{t_2} |f(\tau)|\, d\tau$ pro všechna konečná t_1, t_2. Poznamenejme, že podstatné je to, že existuje konečný integrál z absolutní hodnoty funkce $f(t)$, nikoli to, že jde o Lebesgueův integrál. Čtenář, který teorii Lebesgueova integrálu nezná, může si všude představovat integrál Riemannův. Lebesgueův integrál užíváme zde proto, že má lepší vlastnosti než Riemannův.

[2]) Zde užíváme té licence v označení, že funkci „$f(t)$" přiřazujeme funkcionál „f".

Budeme-li v (5) speciálně klást $f(t) \equiv C$, dostaneme „distributivní konstantu", tj. funkcionál $(C, \varphi) = C \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)\, d\tau$.

Distribuci δ_T, definovanou rovnicí

$$(\delta_T, \varphi) = \varphi(T)\,, \tag{7}$$

budeme nazývat „Diracovou distribucí". Snadno lze dokázat, že δ_T je singulární distribuce, tj., že ji nelze vyjádřit ve tvaru (5). Později seznáme, v jakém vztahu je δ_T k inženýrské představě o „nekonečně krátkém impulsu o ploše 1."

Jsou-li f, g distribuce, zavedeme jejich součet $f + g$ rovnicí

$$(f + g, \varphi) = (f, \varphi) + (g, \varphi)\,. \tag{8}$$

Podobně, je-li α číslo, pak násobkem αf budeme rozumět distribuci

$$(\alpha f, \varphi) = (f, \alpha\varphi)\,. \tag{9}$$

Z (8) a (9) je ihned vidět, že definice mají smysl, tj. že funkcionály $f + g$, αf splňují podmínky 1., 2. Mimo to je zřejmé, že platí $f + g = g + f$, $(\alpha\beta) f = \alpha(\beta f)$ apod., tj. stejná pravidla jako pro funkce, a že v případě, kdy f, g jsou regulární, odpovídá distributivní součet (násobek) obyčejnému součtu (násobku).

Z toho, co jsme dosud o distribucích řekli, vyplývá, že nelze obecně mluvit o „hodnotě distribuce v daném bodě t_0", jak je tomu u obyčejných funkcí. Je však už možno dát přesný smysl výroku, že „distribuce f je rovna nule v okolí bodu t_0". Tím budeme rozumět, že existuje interval $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ (okolí bodu t_0) tak, že pro každou funkci $\varphi(t) \in \mathbf{K}$, která je rovna nule vně $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, je $(f, \varphi) = 0$. Odtud vyplývá, že tímto je dán smysl rčení „distribuce f je rovna nule na otevřené množině M", což značí, že $f = 0$ v okolí každého bodu $t \in M$. Tak na příklad distribuce δ_T podle definice (7) je rovna nule v okolí každého bodu $t > T$ nebo $t < T$, tj. $\delta_T = 0$ na $(-\infty, T) \cup (T, \infty)$. Pomocí těchto pojmů můžeme pak definovat rovnost dvou distribucí f, g na nějaké otevřené množině M; řekneme, že $f = g$ na M, je-li $f - g = 0$ na M.

Uveďme si příklad! Je-li $f = \delta_0 + 3\delta_3 - e^{-t} \cos 2t$, pak zřejmě f je rovna regulární distribuci $-e^{-t} \cos 2t$ na množině $(-\infty, 0) \cup (0, 3) \cup (3, \infty)$.

Všimněme si, jaký je praktický význam těchto pojmů! Prozraďme napřed, že řešení x_i rovnic (1) (což bude distribuce), bude možno v převážné většině případů psát ve tvaru $x_i = u_i + v_i$, kde v_i je regulární distribuce, u_i pak distribuce rovná nule na množině M tvaru

$$M = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} (t_i, t_{i+1})\,, \tag{10}$$

$t_k < t_{k+1}$ pro všechna k. To znamená, že $x_i = v_i$ na M. Ústy fysika řečeno, odezvu x_i bude možno na intervalech (t_i, t_{i+1}) ztotožnit s obyčejnou funkcí, v bodech t_i pak budou nějaké impulsy.

Přistupme nyní k zavedení limitního přechodu pro distribuce.

Řekneme, že posloupnost distribucí f_n, $n = 1, 2, \ldots$ konverguje k distribuci f a označíme to symbolem $f_n \to f$, jestliže pro každou $\varphi(t) \in \mathbf{K}$ posloupnost čísel

$$(f_n, \varphi) \to (f, \varphi) . \tag{12}$$

Analogicky, závisí-li distribuce f_λ na parametru λ, potom symbol $f_\lambda \to f$ když $\lambda \to \lambda_0$ značí, že pro každou $\varphi(t) \in \mathbf{K}$ je $(f_\lambda, \varphi) \to (f, \varphi)$ když $\lambda \to \lambda_0$.

Z těchto definic je ihned zřejmé, že konvergentní posloupnost distribucí má právě jednu limitu.

Dále z (12) vyplývá, že jsou-li α_1, α_2 čísla a $f_n \to f$, $g_n \to g$, pak platí $\alpha_1 f_n + \alpha_2 g_n \to \alpha_1 f + \alpha_2 g$.

Stejným způsobem, jak se definuje součet nekonečné řady funkcí, je definován součet nekonečné řady distribucí. Řekneme, že řada $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i$ má součet s, je-li $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i \to s$ pro $n \to \infty$.

Všimněme si nyní toho, jaká je souvislost mezi konvergencí distributivní a obyčejnou (tj. nějakou konvergencí funkcí). Jsou-li $f_n(t)$, $f(t)$ lokálně integrovatelné funkce a pojímáme-li je jako distribuce, pak podle (12) konvergence $f_n \to f$ značí, že pro libovolnou $\varphi(t) \in \mathbf{K}$ je

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau . \tag{13}$$

To znamená, že bude-li posloupnost funkcí $f_n(t)$ konvergovat k funkci $f(t)$ podle některého z dále uvedeného konvergenčního principu I.—III., pak bude v distributivním smyslu $f_n \to f$.

I. $f_n(t) \to f(t)$ stejnoměrně v každém konečném intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$.

II. $f_n(t) \to f(t)$ skoro všude, přičemž existuje lokálně integrovatelná funkce $h(t)$ tak, že $|f_n(t)| \leqq h(t)$ pro všechna n a t.

III. konvergence $f_n(t) \to f(t)$ je monotonní, přičemž $f(t)$ je lokálně integrovatelná (srv. [5]).

Uveďme si příklad! Uvažujme posloupnost funkcí

$$\begin{aligned} h_n(t) &= n \quad \text{na} \left(0, \frac{1}{n}\right), \\ &= 0 \quad \text{všude jinde.} \end{aligned}$$

Zřejmě $h_n(t) \to 0$ v každém bodě. V distributivním smyslu však je $(h_n, \varphi) = n\int\limits_0^{\frac{1}{n}} \varphi(\tau)\, d\tau \to \varphi(0)$. (Stačí si totiž uvědomit, že $\varphi(t)$ je v bodě $t = 0$ spojitá a použít větu o střední hodnotě.) Platí tedy $(h_n, \varphi) \to (\delta_0, \varphi)$ pro každé $\varphi(t) \in \mathbf{K}$, tj. $h_n \to \delta_0$.

Obraťme nyní pozornost k důležitému pojmu — derivaci distribuce. Uvažme nejdříve případ, kdy nějaká spojitá funkce $f(t)$ má skoro všude lokálně integrovatelnou derivaci $f'(t)$. Pro příslušný funkcionál (f', φ) pak platí:

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau = [f(\tau)\, \varphi(\tau)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, \varphi'(\tau)\, d\tau = (f, -\varphi') .$$

Bude tedy přirozené, obecně definovat derivaci f' distribuce f rovnicí

$$(f', \varphi) = (f, -\varphi') . \tag{14}$$

Ze (14) je lehko vidět, že funkcionál $(f, -\varphi')$ je lineární, a vezmeme-li v úvahu ten fakt, že k posloupnosti $\varphi_k(t) \to 0$ v $\mathbf{K}$ je též $-\varphi_k'(t) \to 0$ v $\mathbf{K}$ (srovnej s definicí!), že $(f, -\varphi')$ je též spojitý. Je tedy definice (14) oprávněná, tj. $(f, -\varphi')$ je distribuce.

Z toho vyplývá, že platí:

Věta 1. *Každá distribuce má derivace všech řádů.*

Postupným použitím rovnice (14) dostaneme obecně

$$(f^{(k)}, \varphi) = (f, (-1)^k\, \varphi^{(k)}) . \tag{15}$$

Všimněme si, že přímo z definice derivace vyplývá, že pro libovolná čísla α_1, α_2 a distribuce f_1, f_2 platí

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)' = \alpha_1 f_1' + \alpha_2 f_2' . \tag{16}$$

Stane-li se, že $f = C$ (distributivní konstanta), máme $(C', \varphi) = -\int_{-\infty}^{\infty} C\varphi'(\tau)\, .\, d\tau = 0$. Dokažme, že to platí i obráceně: je-li $f' = 0$, pak $f = C$. Vskutku, nechť $f' = 0$, tj. $(f', \varphi) = (f, -\varphi') = 0$ pro každé $\varphi(t) \in \mathbf{K}$. Tato rovnice značí, že funkcionál (f, ψ) je roven nule pro všechny $\psi(t) \in \mathbf{K}$, které jsou derivací nějaké funkce $\varphi(t) \in \mathbf{K}$. Zvolme pevně nějakou funkci $\varphi_1(t) \in \mathbf{K}$, pro kterou je $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\tau)\, d\tau = 1$, a buď $C = (f, \varphi_1)$. Je-li nyní $\varphi(t) \in \mathbf{K}$, možno ji vyjádřit ve tvaru $\varphi(t) = \varphi_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)\, d\tau + \tilde{\varphi}'(t)$, kde $\tilde{\varphi}(t) \in \mathbf{K}$. (Zřejmě touto rovnicí definovaná funkce $\tilde{\varphi}(t) \in \mathbf{K}$; položíme-li totiž $\tilde{\varphi}(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)\, d\tau \right) \int_{-\infty}^{t} \varphi_1(\tau)\, d\tau$, vidíme, že pro dostatečně velká $|t|$ je $\tilde{\varphi}(t) = 0$, takže skutečně $\tilde{\varphi}(t) \in \mathbf{K}$.)

Podle předpokladu o linearitě funkcionálu (f, φ) tedy platí

$$(f, \varphi) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)\, d\tau \right) . (f, \varphi_1) + (f, \tilde{\varphi}') = C \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)\, d\tau, \text{ tj. } f = C.$$

Postupným použitím právě dokázaného tvrzení vyplývá, že je-li $f^{(k)} = 0$, pak f je polynomem nejvýše $k - 1$-ho stupně. (Později této věty podstatně využijeme.)

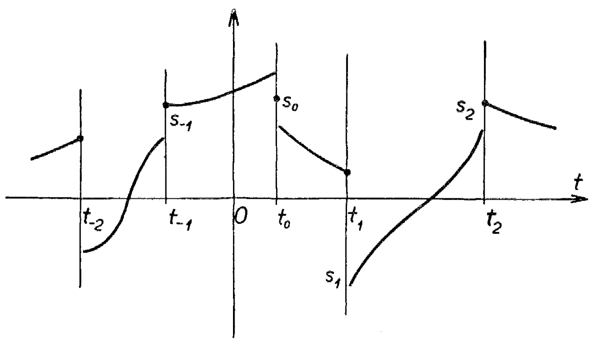
Uveďme si nyní příklady! Podle definice (7) je $(\delta_T, \varphi) = \varphi(T)$; pomocí (15) tedy platí $(\delta_T^{(k)}, \varphi) = (-1)^k \varphi^{(k)}(T)$.

Uvažujme dále funkci (Heavisideův „jednotkový skok")

$$H_T(t) = 1 \text{ pro } t > T,$$
$$= 0 \quad \text{pro } t \leq T\,.$$

Pro její distributivní derivaci H'_T nalezneme $(H'_T, \varphi) = (H_T, -\varphi') = -\int\limits_T^\infty \varphi'(\tau)\,.$ $.\, \mathrm{d}\tau = \varphi(T)$, takže platí

$$H'_T = \delta_T\,. \tag{17}$$



Obr. 1.

Tento výsledek můžeme snadno zobecnit na následující, pro aplikace velmi důležitý případ: nechť funkce $f(t)$ je v každém konečném intervalu spojitá vyjma konečný počet bodů, kde má nespojitosti prvního druhu (tj. v těchto bodech existují konečné limity zleva i zprava), a nechť má všude vyjma tyto body derivaci (v obvyklém smyslu), která je lokálně integrovatelnou funkcí. Příklad takové funkce je uveden na obr. 1. Máme stanovit distributivní derivaci f'.

Buďte tedy t_i body nespojitosti, $\ldots t_{-2} < t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$ a označme „skoky" $s_i = \lim\limits_{t \to t_i +} f(t) - \lim\limits_{t \to t_i -} f(t)$. Zavedeme-li funkci $h(t)$ předpisem $h(t) = \sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} s_i H_{t_i}(t)$, potom zřejmě funkce

$$g(t) = f(t) - h(t) \tag{18}$$

bude všude spojitá, a bude mít skoro všude lokálně integrovatelnou derivaci $g'(t)$. To znamená, že distributivní derivace g' bude rovna $g'(t)$. Distributivním derivováním rovnice (18) nalezneme $g' = f' - h'$, tj.

$$f' = g' + \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_i \delta_{t_i}\,. \tag{19}$$

Platí tedy, že $f' = g'(t)$ na množině $\bigcup\limits_{i=-\infty}^{\infty} (t_i, t_{i+1})$.

Všimněme si na tomto místě, že platí následující zřejmé tvrzení: Je-li distribuce $f = C$ na M, pak $f' = 0$ na M. Na příklad $H_T = 1$ na (T, ∞) a tudíž $H'_T = \delta_T = 0$ na (T, ∞).

Věnujme nyní několik slov otázce součinu distribucí. Řekněme rovnou, že součin dvou neregulárních distribucí nelze obecně definovat tak, aby měl „rozumné“ vlastnosti, ba dokonce to není možné ani pro součin funkce a distribuce. To je ovšem jistá nevýhoda. Má-li však funkce všechny derivace, pak je možno součin jednoduše zavést.

Je-li f distribuce, $a(t)$ funkce, mající v $(-\infty, \infty)$ derivace všech řádů, pak součin af je distribuce, pro kterou je

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi) \tag{*}$$

Z (*) je lehko vidět, že funkcionál $(f, a\varphi)$ je lineární a spojitý. Pro to stačí si pouze uvědomit, že je-li $\varphi_k(t) \to 0$ v $\mathbf{K}$, že též $a(t)\, \varphi_k(t) \to 0$ v $\mathbf{K}$. Je tedy definice v pořádku. Všimněme si opět, že je-li f regulární, pak distribuce af odpovídá obyčejnému součinu $a(t)\, f(t)$.

Jako příklad stanovme součin $a\delta_T$. Podle (*) a (7) máme $(a\delta_T, \varphi) = (\delta_T, a\varphi) = a(T)\, \varphi(T)$, což podle (4) můžeme psát $(a\delta_T, \varphi) = a(T) \,.\, (\delta_T, \varphi)$, takže platí $a\delta_T = a(T)\, \delta_T$.

Snadno lze dále dokázat, že platí toto tvrzení:

Má-li $a(t)$ všechny derivace a je-li $f_n \to f$, pak platí $af_n \to af$.

Vskutku, je-li $f_n \to f$, značí to, že $(f_n, \varphi) \to (f, \varphi)$ pro každou $\varphi(t)$. Avšak pro každou $\varphi(t) \in \mathbf{K}$ je též $a(t)\, \varphi(t) \in \mathbf{K}$ a tedy platí též $(f_n, a\varphi) \to (f, a\varphi)$, tj. $(af_n, \varphi) \to (af, \varphi)$, čili $af_n \to af$, c. b. d.

Odtud vyplývá, že platí $a \sum\limits_{i=1}^{\infty} g_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} ag_i$.

Pro derivaci součinu distribuce a funkce, která má všechny derivace, lze dokázat stejné pravidlo, jako pro obyčejné funkce, tj.

$$(af)' = a'f + af' \,. \tag{20}$$

Vskutku, podle (14), (*) a (4) lze pro $(af)'$ psát:

$$\begin{aligned} ((af)', \varphi) &= (af, -\varphi') = (f, -a\varphi') = (f, a'\varphi - (a\varphi)') = (f, a'\varphi) + \\ &+ (f, -(a\varphi)') = (a'f, \varphi) + (f', a\varphi) = \\ &= (a'f, \varphi) + (af', \varphi) = (a'f + af', \varphi) \,, \text{ c. b. d.} \end{aligned}$$

Na příklad $(a\delta_T)' = a'\delta_T + a\delta'_T$. Avšak $a\delta_T = a(T)\, \delta_T$ a stejně $a'\delta_T = a'(T)\, \delta_T$, což pomocí (16) dá dosazením

$$a\delta'_T = a(T)\, \delta'_T - a'(T)\, \delta_T \,.$$

Na rozdíl od funkcí platí pro distribuce následující důležitá věta:

Věta 2. *Je-li $f_n \to f$, pak platí $f_n' \to f'$.*

Vskutku, je-li $f_n \to f$, značí to, že $(f_n, \varphi) \to (f, \varphi)$ pro každou $\varphi(t) \in \mathbf{K}$, a ježto $-\varphi'(t) \in \mathbf{K}$, je $(f_n, -\varphi') \to (f, -\varphi')$, tj. $f_n' \to f'$, c. b. d.

Tak na příklad posloupnost funkcí $f_n(t) = \dfrac{1}{n} \sin nt$ konverguje k nule stejnoměrně na každém konečném intervalu. To znamená, že v distributivním smyslu je $f_n \to 0$, a tedy podle věty 2 platí $f_n' = \cos nt \to 0$, $f_n'' = -n \sin nt \to 0$ atd., přesto, že posloupnosti funkcí $f_n'(t)$, $f_n''(t)$ v obyčejném smyslu vůbec nekonvergují.

Z věty 2 dále plyne, že když $s = \sum\limits_{i=1}^{\infty} g_i$, pak $s' = \sum\limits_{i=1}^{\infty} g_i'$; možno tedy konvergentní řadu derivovat člen po členu.

Uveďme si nyní příklad (jehož obsah je pro aplikace velmi důležitý) na užití věty 2! Uvažme posloupnost funkcí $f_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$ která má následující vlastnosti:

a) ke každému $N > 0$ existuje číslo $C_N > 0$ tak, že pro všechna a, b splňující nerovnosti $|a| \leqq N$, $|b| \leqq N$ je $\left|\int\limits_a^b f_n(\tau)\, d\tau\right| < C_N$ pro všechna n;

b) je-li $F_n(t) = \int\limits_{-1}^{t} f_n(\tau)\, d\tau$, konverguje $F_n(t) \to 1$ pro $t > 0$, $F_n(t) \to 0$ pro $t < 0$.

Takovou posloupnost funkcí budeme též nazývat δ-posloupností. Podle b) konverguje $F_n(t) \to H_0(t)$ skoro všude, podle a) jsou členy $|F_n(t)|$ ohraničené lokálně integrovatelnou funkcí, a tudíž je splněna podmínka II. pro konvergenci příslušných distribucí. Je tedy $F_n \to H_0$. Poněvadž $F_n'(t) = f_n(t)$ skoro všude, je $F_n' = f_n$ (v distributivním smyslu), takže derivováním dostáváme $F_n' = f_n \to H_0' = \delta_0$.

Lehko zjistíme, že například posloupnost $f_n(t) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{n}{1 + n^2t^2}$ je δ-posloupností, takže $f_n \to \delta_0$ a odtud $-\dfrac{2}{\pi} \dfrac{n^3t}{(1 + n^2t^2)^2} \to \delta_0'$ atd.

Všimněme si blíže fysikálního významu provedené úvahy! Uvažme nějaký člen $f_n(t)$ dosti vysokého indexu δ-posloupnosti. Z podmínky b) vyplývá, že $f_n(t)$ má tvar impulsu, působícího v okolí bodu $t = 0$. Jeví se tedy podmínky a), b) precisací té představy, že „impuls je blízký Diracově distribuci". Poznamenejme, že z a), b) je zároveň vidět, že není tak podstatné, jaký má takový impuls tvar, nýbrž jen to, jaká je jeho „plocha".

Poznamenejme zároveň, že právě provedené úvahy nelze obrátit; platí-li totiž pro nějakou posloupnost funkcí $f_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, že $f_n \to \delta_0$, neplyne z toho, že $f_n(t)$ je δ-posloupnost. Vskutku, vezmeme-li nějakou δ-posloupnost $g_n(t)$ a položíme-li $f_n(t) = g_n(r) + n^r a(t) \sin nt$, kde $a(t)$ má derivace všech řádů, $r \geqq 0$, pak zřejmě $f_n \to \delta_0$ a $f_n(t)$ není δ-posloupností. Je tedy třída δ-posloupností užší než třída všech posloupností $f_n \to \delta_0$.

Přistupme nyní k vyšetření vlastností důležité třídy distribucí, tzv. distribucí konečného řádu. Řekneme, že distribuce f je konečného řádu, existuje-li pro ni celé číslo $k \geqq 0$ a v $(-\infty, \infty)$ spojitá funkce $F(t)$ (kterou nazveme vytvořující funkcí) tak, že je $F^{(k)} = f$. Nejmenší takové číslo k budeme nazývat řádem distribuce.

Tak speciálně každá lokálně integrovatelná funkce je distribucí konečného řádu. Stejně je tomu u δ_T a jejich derivací. Vskutku, označíme-li $K_T(t) = \int_{-\infty}^{t} H_T(\tau)\, d\tau$, je $K_T(t)$ spojitá v $(-\infty, \infty)$ a platí $K_T'' = \delta_T$.

Poznamenejme, že existují distribuce, které nejsou konečného řádu. Příkladem toho je $q = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^{(n)}$, kde zřejmě číslo k a funkce $F(t)$ neexistují.

Pro naše účely budou nejdůležitější ty distribuce konečného řádu, které budeme nazývat laplaceovské.

Řekneme, že f je laplaceovská, existuje-li pro ni celé číslo $k \geqq 0$, funkce $F(t)$ a čísla ξ, $C \geqq 0$ tak, že

1. $F(t)$ je spojitá na $(-\infty, \infty)$,
2. $F(t) = 0$ pro $t \leqq 0$,
3. $|F(t)| \leqq C e^{\xi t}$ pro $t \geqq 0$,
4. $F^{(k)} = f$.

Číslo ξ budeme též nazývat „růstem" distribuce f.

Mimo to zavedeme ještě tuto terminologii:

Řekneme, že systém distribucí $\{f_\mu\}$ je normální, existují-li pro něj pevná čísla $k \geqq 0$, ξ, $C \geqq 0$ tak, že pro každou distribuci f_μ existuje funkce $F_\mu(t)$ splňující podmínky 1.—4. Číslo ξ nazveme „růstem" systému.

Z definice okamžitě vyplývá následující důležité tvrzení:

Je-li f laplaceovská, pak při pevném $k \geqq 0$ je vytvořující funkce $F(t)$ určena jednoznačně.

Důkaz: Nechť tedy pro nějaké $k \geqq 0$ existuje ještě funkce $\tilde{F}(t)$, splňující podmínky 1.—4. Potom $F^{(k)} - \tilde{F}^{(k)} = (F - \tilde{F})^{(k)} = 0$, a tedy podle výše dokázaného tvrzení je $F - \tilde{F} = P$, kde P je polynom nejvýše $k - 1$-ho stupně. Podle 2. však P je roven nule pro $t < 0$, takže $P(t) \equiv 0$, tj. $F(t) \equiv \tilde{F}(t)$, c. b. d.

Z definice laplaceovské distribuce vyplývá dále zejména to, že taková distribuce $f = 0$ na $(-\infty, 0)$. Dále je lehko vidět, že každá laplaceovsky transformovatelná funkce je zároveň laplaceovskou distribucí. (Přirozeně, že tuto funkci pokládáme rovnou nule pro $t < 0$.) To znamená zejména, že systém funkcí S, který jsme zavedli v [1], je částí systému všech laplaceovských distribucí. Konečně je zřejmé, že je-li f laplaceovská, pak $f^{(n)}$ je rovněž laplaceovská pro každé celé $n > 0$. To znamená například, že $\delta_T^{(n)}$ pro $T \geqq 0$ je laplaceovská. (Je totiž $\delta_T^{(n)} = K_T^{(n+2)}$, kde $K_T(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} H_T(\tau)\,d\tau$; odtud je též vidět, proč musí být $T \geqq 0$.)

Z podmínky 3. definice dále vyplývá, že pro čísla p, splňující podmínku $\operatorname{Re} p > \xi$ existuje Laplaceův integrál funkce $F(t)$, tj. v komplexní polorovině $\operatorname{Re} p > \xi$ je definován obraz $\mathscr{L}\{F(t)\}$. Tato okolnost umožňuje definovat jednoduše obraz distribuce f.

Je-li f laplaceovská distribuce s růstem ξ, pak funkci $\mathscr{L}(f) = p^k \mathscr{L}\{F(t)\}$ proměnné p, definovanou v polorovině $\operatorname{Re} p > \xi$ nazveme obrazem f.

Z této definice obrazu a z výše dokázané jednoznačnosti $F(t)$ plyne, že při pevném k je obraz určen jednoznačně. Ukažme dále, že obraz je vůči volbě k invariantní, tj. že k může být nahrazeno větším číslem.

Vskutku, je-li f laplaceovská a $F(t)$ splňuje podmínky 1.—4., pak podle definice je $\mathscr{L}(f) = p^k \mathscr{L}\{F(t)\}$. Avšak funkce $F^{(-1)}(t) = \int\limits_0^t F(\tau)\,d\tau$ zřejmě splní rovněž podmínky 1.—3., podmínku 4. pak pro $k + 1$. Ježto však $\mathscr{L}\{F^{(-1)}(t)\} = \frac{1}{p} \mathscr{L}\{F(t)\}$, je $p^{k+1} \mathscr{L}\{F^{(-1)}(t)\} = p^k \mathscr{L}\{F(t)\} = \mathscr{L}(f)$, c. b. d.

Z této úvahy zároveň vyplývá, že pro každou funkci $f(t) \in S$ (tj. laplaceovsky transformovatelnou funkci, srv. [1]) platí $\mathscr{L}(f) = \mathscr{L}\{f(t)\}$. (Podtrhněme, že klademe $f(t) = 0$ pro $t < 0$.)

Snadno se dokáže následující

Věta 3. *Nechť f, g jsou laplaceovské; je-li $\mathscr{L}(f) = \mathscr{L}(g)$, pak $f = g$.*

Důkaz: Nechť $F(t)$, $G(t)$ jsou příslušné vytvořující funkce, k, l odpovídající čísla, pro něž $f = F^{(k)}$, $g = G^{(l)}$. Budiž $k \leq l$. V polorovině $\operatorname{Re} p > \max[\xi_1, \xi_2]$, kde ξ_1 a ξ_2 je růst distribuce f resp. g tedy platí

$$p^k \mathscr{L}\{F(t)\} = p^l \mathscr{L}\{G(t)\}\,, \quad \text{tj.} \quad \mathscr{L}\{G(t)\} = \frac{1}{p^{l-k}} \mathscr{L}\{F(t)\}\,,$$

čili $\mathscr{L}\{G(t)\} = \mathscr{L}\{F^{(k-l)}(t)\}$[3])

Podle známé věty (srv. [6]) pak platí $G(t) \equiv F^{(k-l)}(t)$. ($G(t)$, $F(t)$ jsou spojité!) Derivujeme-li tuto rovnici distributivně l-krát, máme $G^{(l)} = F^{(k)}$ tj. $g = f$, c. b. d.

Z definice obrazu přímo plyne tvrzení:

Jsou-li α, β čísla, f, g laplaceovské, pak

$$\mathscr{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathscr{L}(f) + \beta \mathscr{L}(g)\,.$$

Triviálním důsledkem definice obrazu je

---

[3]) Zde i nadále značí $F^{(-n)}(t) = \int\limits_0^t d\tau_{n-1} \int\limits_0^{\tau_{n-1}} d\tau_{n-2} \cdots \int\limits_0^{\tau_2} F(\tau_1)\,d\tau_1$, $n > 0$.

Věta 4. *Je-li f laplaceovská, platí*

$$\mathscr{L}(f') = p\mathscr{L}(f)\,. \tag{21}$$

(Důkaz je zřejmý.)

Speciálně nalezneme: Ježto pro $T \geqq 0$ je $\mathscr{L}(H_T) = \mathscr{L}\{H_T(t)\} = \dfrac{e^{-pT}}{p}$ a $\delta_T = H'_T$, máme $\mathscr{L}(\delta_T) = p\mathscr{L}(H_T) = e^{-pT}$ a odtud obecně

$$\mathscr{L}(\delta_T^{(k)}) = p^k e^{-pT}\,.$$

Všimněme si na tomto místo případu, kdy f je regulární laplaceovská distribuce a v $\langle 0, \infty)$ má (obyčejnou) derivaci, která má obraz. (Na první pohled se totiž zdá, že (21) „nějak nesouhlasí" s obvyklým pravidlem pro obraz derivace funkce.) Ježto o f předpokládáme, že je laplaceovská, značí to, že $f(t) = 0$ pro $t < 0$. Označme pro určitost $\tilde{f}'(t) = f'(t)$ pro $t \geqq 0$, $\tilde{f}'(t) = 0$ pro $t < 0$. (V bodě $t = 0$ přirozeně rozumíme derivaci zprava.) Pro distribuci f' však platí

$$(f', \varphi) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\varphi'(\tau)\,d\tau = -\int_0^{\infty} f(\tau)\,\varphi'(\tau)\,d\tau = -\,[f(\tau)\,\varphi(\tau)]_0^{\infty} +$$

$$+ \int_0^{\infty} f'(\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(0)\,\varphi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}'(\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau,$$

takže

$$f' = f(0)\,\delta_0 + \tilde{f}'\,. \tag{23}$$

(Tuto rovnici mohli jsme ostatně napsat přímo na základě (19).)

Poněvadž však $\mathscr{L}(f) = \mathscr{L}\{f(t)\}$, $\mathscr{L}(\tilde{f}') = \mathscr{L}\{\tilde{f}'(t)\}$, dostáváme dosazením (23) do (21) $f(0) + \mathscr{L}\{\tilde{f}'(t)\} = p\mathscr{L}\{f(t)\}$, tj. známé pravidlo.

Pro další úvahy bude účelná znalost následujícího lemmatu:

Lemma. *Buď k celé číslo, $k \geqq 0$, $\alpha(t)$ funkce, mající v $(-\infty, \infty)$ derivace všech řádů. Pak pro každé $T > 0$, $h > 0$ existuje $\varphi(t) \in \mathbf{K}$ tak, že platí:*

1. $\varphi^{(k)}(t) = \alpha(t)$ pro $t \in \langle 0, T\rangle$,
2. $|\varphi^{(k)}(t) - \alpha(t)| \leqq \max\limits_{\sigma \in \langle T, T+h\rangle} |\alpha(\sigma)|$ *pro* $t \in \langle T, T + h\rangle$,
3. $\varphi^{(k)}(t) = 0$ *pro* $t \geqq T + h$.

Důkaz: Pro $k = 0$ je věc jasná. Stačí totiž zvolit funkci $\Phi(t) \in \mathbf{K}$ tak, že $0 < \Phi(t) < 1$ pro $t \in (-1, 0) \cup (T, T + h)$, $\Phi(t) = 1$ pro $t \in \langle 0, T\rangle$ a $\Phi(t) = 0$ vně $(-1, T + h)$, (taková funkce zřejmě existuje) a položit $\varphi(t) = \alpha(t)\,\Phi(t)$.

Pro $k > 0$ proveďme důkaz indukcí. Nechť tedy pro některé $k \geqq 0$ existuje $\varphi(t) \in \mathbf{K}$ tak, že jsou splněny podmínky 1.—3. a pro $t \geqq T + h$ je $\varphi(t) = 0$. Zvolme nějakou funkci $\tilde{\varphi}(t) \in \mathbf{K}$ tak, že $\tilde{\varphi}(t)$ je rovna nule vně intervalu $(-1, 0)$ a platí pro ni $\int_{-1}^{0} \tilde{\varphi}(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{T+h} \varphi(\tau)\,d\tau$. Položme nyní

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(\tau)\,d\tau - \int_{-\infty}^{t} \tilde{\varphi}(\tau)\,d\tau\,. \tag{24}$$

Předně je z (24) zřejmé, že $\psi(t) = 0$ pro $t \geqq T + h$, a že $\psi(t)$ má derivace všech řádů, takže $\psi(t) \in \mathbf{K}$. Dále pro $t \geqq 0$ je $\psi'(t) = \varphi(t)$, tj. $\psi^{(k+1)}(t) = \varphi^{(k)}(t)$, čímž je lemma dokázáno.

Nyní můžeme snadno dokázat následující větu:

Věta 5. *Nechť distribuce f, f_n, $n = 1, 2, \ldots$ tvoří normální systém s růstem ξ; je-li $f_n \to f$, pak v polorovině* $\operatorname{Re} p > \xi$ *platí $\mathscr{L}(f_n) \to \mathscr{L}(f)$.*

Důkaz: Buďte $F_n(t)$, $F(t)$ vytvořující funkce k distribucím f_n, f, pro které $F_n^{(k)} = f_n$, $F^{(k)} = f$. Ježto $f_n \to f$, je $F_n^{(k)} \to F^{(k)}$, což značí, že

$$\int_0^\infty F_n(\tau)\, \varphi^{(k)}(\tau)\, \mathrm{d}\tau \to \int_0^\infty F(\tau)\, \varphi^{(k)}(\tau)\, \mathrm{d}\tau \tag{25}$$

pro každou $\varphi(t) \in \mathbf{K}$. ($F_n(t)$, $F(t)$ jsou rovny nule pro $t < 0$!)

Zvolme nyní některé komplexní číslo $p = x + iy$, pro které $x > \xi$; označíme-li $\psi(t)$ nějakou spojitou funkci, $T, h > 0$ libovolná čísla, můžeme psát:

$$\operatorname{Re} \mathscr{L}\{F(t)\} - \operatorname{Re} \mathscr{L}\{F_n(t)\} = \int_0^\infty (F(\tau) - F_n(\tau))\, \mathrm{e}^{-x\tau} \cos y\tau\, \mathrm{d}\tau =$$

$$= \int_0^{T+h} (F(\tau) - F_n(\tau))\, \psi(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \int_0^T (F(\tau) - F_n(\tau))\,.\,(\mathrm{e}^{-x\tau} \cos y\tau - \psi(\tau))\, \mathrm{d}\tau +$$

$$+ \int_T^{T+h} (F(\tau) - F_n(\tau))\, (\mathrm{e}^{-x\tau} \cos y\tau - \psi(\tau))\, \mathrm{d}\tau + \int_{T+h}^\infty (F(\tau) - F_n(\tau))\, \mathrm{e}^{-x\tau} \cos y\tau\, \mathrm{d}\tau\,,$$

takže

$$|\operatorname{Re} \mathscr{L}\{F(t)\} - \operatorname{Re} \mathscr{L}\{F_n(t)\}| \leqq$$

$$\leqq \left|\int_0^{T+h} (F(\tau) - F_n(\tau))\, \psi(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right| + \left|\int_0^T (F(\tau) - F_n(\tau))\, (\mathrm{e}^{-x\tau} \cos y\tau - \psi(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right| +$$

$$+ \int_T^{T+h} (|F(\tau)| + |F_n(\tau)|)\,.\,|\mathrm{e}^{-x\tau} \cos y\tau - \psi(\tau)|\, \mathrm{d}\tau + \int_T^\infty (|F(\tau)| + |F_n(\tau)|)\, \mathrm{e}^{-x\tau}\, \mathrm{d}t\,. \tag{26}$$

Zvolme nyní libovolně $\varepsilon > 0$; podle předpokladu o normálnosti systému f, f_n existuje $C > 0$ tak, že $|F(t)| < C\mathrm{e}^{\xi t}$, $|F_n(t)| < C\mathrm{e}^{\xi t}$ pro všechna $t \geqq 0$ a n. Zvolme dále číslo T tak, že $T > -\dfrac{1}{x - \xi} \ln \dfrac{\varepsilon(x - \xi)}{12C}$. Snadno se přesvědčíme, že pak poslední člen na pravé straně nerovnosti (26) bude menší než $\dfrac{\varepsilon}{6}$. Konečně zvolme $h < T$ tak, že $h < \dfrac{\varepsilon}{12C} \exp\,(-T(2\xi - x))$.

K číslům T, h existuje pak podle lemmatu funkce $\varphi(t) \in \mathbf{K}$ tak, že platí jeho body 1., 2., 3., klademe-li tam $\alpha(t) = \mathrm{e}^{-xt} \cos yt$. Položíme-li ve (26) $\psi(t) = \varphi^{(k)}(t)$, vidíme, že vymizí druhý člen pravé strany (26); dále pak je

$$\int_T^{T+h} (|F(\tau)| + |F_n(\tau)|)\,.\,|\mathrm{e}^{-x\tau} \cos y\tau - \varphi^{(k)}(\tau)|\, \mathrm{d}\tau \leqq \int_T^{T+h} 2C\mathrm{e}^{\xi(T+h)}\, \mathrm{e}^{-xT}\, \mathrm{d}\tau <$$

$$< 2C\mathrm{e}^{T(2\xi - x)} h < \tfrac{1}{6}\varepsilon\,.$$

Pro vybranou funkci $\varphi(t) \in \mathbf{K}$ tedy platí

$$|\mathrm{Re}\, \mathscr{L}\{F(t)\} - \mathrm{Re}\, \mathscr{L}\{F_n(t)\}| \leqq |\int_0^\infty (F(\tau) - F_n(\tau))\, \varphi^{(k)}(\tau)\, \mathrm{d}\tau| + \frac{\varepsilon}{3}. \quad (27)$$

Podle (25) však existuje index $N_1 > 0$ tak, že pro každé $n > N_1$ bude první člen pravé strany (27) menší než $\frac{\varepsilon}{6}$, takže pro všechna $n > N_1$ bude

$$|\mathrm{Re}\, \mathscr{L}\{F(t)\} - \mathrm{Re}\, \mathscr{L}\{F_n(t)\}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Opakujeme-li nyní celou úvahu pro rozdíl $\mathrm{Im}\, \mathscr{L}\{F(t)\} - \mathrm{Im}\, \mathscr{L}\{F_n(t)\}$, zjistíme, že existuje $N_2 > 0$ tak, že pro všechna $n > N_2$ bude absolutní hodnota tohoto rozdílu menší než $\frac{1}{2}\varepsilon$. To znamená, že pro všechna $n > \max\,[N_1, N_2]$ je $|\mathscr{L}\{F(t)\} - \mathscr{L}\{F_n(t)\}| < \varepsilon$, takže

$$\mathscr{L}\{F_n(t)\} \to \mathscr{L}\{F(t)\}. \quad (28)$$

Z (28) konečně vyplývá, že v polorovině $\mathrm{Re}\, p > \xi$ je $p^k \mathscr{L}\{F_n(t)\} \to p^k \mathscr{L}\,.\,\{F(t)\}$, tj. $\mathscr{L}(f_n) \to \mathscr{L}(f)$, c. b. d.

Z právě dokázané věty 5 vyplývá, že splňují-li částečné součty konvergentní řady $\sum_{i=1}^{\infty} g_i$ jakož i její součet předpoklady věty, platí

$$\mathscr{L}(\sum_{i=1}^{\infty} g_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathscr{L}(g_i)\,. \quad (29)$$

Uveďme si příklad. Nechť $f = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i$. Zřejmě tato řada je konvergentní, $\sum_{i=0}^{n} \delta_i$ a f jsou laplaceovské a jsou splněny podmínky věty 5. (Očividně vytvořující funkcí $F(t)$ k distribuci f je $F(t) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)\,t$ pro $t \in \langle k, k+1\rangle$, $k = 0, 1, \ldots$, takže pro každé $t \geqq 0$ je $F(t) \leqq \frac{3}{2}\, t(t+1) < 2\mathrm{e}^t$.) Podle (22) je $\mathscr{L}(\delta_n) = \mathrm{e}^{-pn}$, takže pro $\mathrm{Re}\, p > 0$ je řada $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-pn}$ konvergentní a má součet $(1 - \mathrm{e}^{-p})^{-1}$. Podle (29) tedy je

$$\mathscr{L}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i\right) = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-p}}\,. \quad (30)$$

Jako další příklad (velmi poučný) proveďme následující úvahu, ze které dobře vynikne charakteristická vlastnost laplaceovských distribucí, tj., že jsou rovny nule na $(-\infty, 0)$. Již dříve jsme dokázali, že v distributivním smyslu platí $f_n = n \sin nt \to 0$. Aplikujeme-li na tento případ bez rozmyslu větu 5, dostaneme $\mathscr{L}(f_n) \to 0$, ačkoli $\mathscr{L}\{n \sin nt\} = \frac{n^2}{p^2 + n^2} \to 1$; v čem je chyba? Lehko však vidíme, že větu 5 nelze použít na posloupnost f_n. Při důkazu vztahu $f_n \to 0$ znamenal totiž symbol f_n regulární distribuci $n \sin nt$ na celém $(-\infty, \infty)$, a tudíž f_n nebyla laplaceovská. Naproti tomu, zavedeme-li pro určitost označení

$$\tilde{f}_n(t) = n \sin nt \quad \text{pro } t \geqq 0\,, \qquad = 0 \quad \text{pro } t < 0\,, \quad \text{potom}$$

$$\tilde{F}_n(t) = t - \frac{1}{n} \sin nt \quad \text{pro } t \geqq 0\,, \qquad = 0 \quad \text{pro } t < 0$$

jsou vytvořujícími funkcemi pro $\tilde{f}_n$ splňujícími podmínky 1.—4. (dokonce je $\tilde{F}''_n(t) = \tilde{f}_n(t)$ všude v $(-\infty, \infty)$) a tedy $\tilde{f}_n$ jsou laplaceovské. Dále je $\tilde{F}_n(t) \to K_0(t)$ stejnoměrně na každém konečném intervalu ($K_0(t) = t$ pro $t \geqq 0$, $K_0(t) = 0$ pro $t < 0$) a tedy i v distributivním smyslu platí $\tilde{F}_n \to K_0$. Derivováním plyne odtud $\tilde{F}''_n = \tilde{f}_n \to K''_0 = (H_0)' = \delta_0$. Podle věty 5 tedy platí

$$\mathscr{L}(\tilde{f}_n) = \mathscr{L}\,\{n \sin nt\} \to \mathscr{L}(\delta_0) = 1\,.$$

Z tohoto příkladu vyplývá, že počítáme-li někde s obrazem $\mathscr{L}\,\{f(t)\}$ nějaké funkce $f(t)$, pak s hlediska distribucí to značí, že předpokládáme $f(t) = 0$ pro $t < 0$.

Přistupme nyní k zavedení pro naše účely velmi důležitého pojmu — konvoluce distribucí. Buďte f, g laplaceovské[4]) distribuce, $F(t)$, $G(t)$ příslušné vytvořující funkce, splňující podmínky 1.—4. a nechť $f = F^{(k)}$, $g = G^{(l)}$; konvolucí $f * g$ nazveme distribuci, pro kterou platí

$$f * g = \Big(\int_0^t F(t-\tau)\, G(\tau)\, d\tau\Big)^{(k+l)}\,.^{5)} \tag{31}$$

Z definice (31) pomocí substituce $t - \tau = u$ ihned vyplývá, že

$$f * g = g * f\,. \tag{32}$$

Dokažme nyní, že konvoluce nezávisí na volbě čísel k, l. Toto tvrzení bude dokázáno, dokážeme-li, že platí

$$\Big(\int_0^t F(t-\tau)\, G(\tau)\, d\tau\Big)^{(k+l)} = \Big(\int_0^t \Big(\int_0^{t-\tau} F(\sigma)\, d\sigma\Big)\, G(\tau)\, d\tau\Big)^{(k+l+1)}\,. \tag{33}$$

Podle Fubiniovy věty však platí

$$\int_0^t \Big(\int_0^{t-\tau} F(\sigma)\, d\sigma\Big)\, G(\tau)\, d\tau = \iint_\Omega F(\sigma)\, G(\tau)\, d\sigma\, d\tau\,, \tag{34}$$

---

[4]) Z dalšího bude zřejmé, že pro definici konvoluce není podstatný bod 3. definice laplaceovské distribuce, a že by mohl být vypuštěn. Ježto však nás bude zajímat obraz konvoluce, pro jehož existenci bod 3. podstatný je, definovali jsme konvoluci jen pro laplaceovské distribuce.

[5]) Upozorněme, aby nevznikl omyl, že konvoluce funkcí uvnitř kulaté závorky je definována pro všechna t (nikoli jen pro $t > 0$), je však rovna nule pro $t < 0$, neboť tam $F(t) = G(t) = 0$. Z toho vyplývá, že $f * g = 0$ na $(-\infty, 0)$.

kde Ω je trojúhelník roviny τ, σ s vrcholy $[0, 0]$; $[t, 0]$; $[0, t]$. Zavedeme-li transformaci $\tau = u$, $\sigma = v - u$, je $\dfrac{\partial(\tau, \sigma)}{\partial(u, v)} = 1$ a integrál na pravé straně (34) přejde v integrál $\iint\limits_{\bar\Omega} F(v - u)\, G(u)\, du\, dv$, kde oborem $\bar\Omega$ je trojúhelník roviny u, v s vrcholy $[0, 0]$; $[t, t]$; $[0, t]$. Převedeme-li tento integrál opět na dvojný, dostaneme konečně

$$\int_0^t \left(\int_0^{t-\tau} F(\sigma)\, d\sigma \right) G(\tau)\, d\tau = \int_0^t \left(\int_0^v F(v - u)\, G(u)\, du \right) dv\,. \tag{35}$$

Derivujeme-li tuto rovnici $k + l + 1$-kráte, dostaneme (33).

Jak známo, pro konvoluci tří funkcí $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ platí (srv. [6]) $f(t) * (g(t) * h(t)) = (f(t) * g(t)) * h(t)$. Z toho vyplývá, že pro tři laplaceovské distribuce f, g, h platí

$$f * (g * h) = (f * g) * h\,. \tag{36}$$

Vskutku, zřejmě lze najít přirozené k a vytvořující funkce $F(t)$, $G(t)$, $H(t)$ tak, že $f = F^{(k)}$, $g = G^{(k)}$, $h = H^{(k)}$, takže

$$f * (g * h) = F^{(k)} * [G(t) * H(t)]^{(2k)} = [F(t) * (G(t) * H(t))]^{(3k)} =$$
$$= [(F(t) * G(t)) * H(t)]^{(3k)} = [F(t) * G(t)]^{(2k)} * H^{(k)} = (f * g) * h\,, \text{ c. b. d.}$$

Zcela stejně se dokáže, že pro laplaceovské distribuce platí

$$f * (g + h) = f * g + f * h\,. \tag{37}$$

Dále platí následující

Věta 6. *Jsou-li funkce $f(t)$, $g(t)$ lokálně integrovatelné, z nichž jedna je v každém konečném intervalu $\langle 0, T \rangle$ ohraničená a $f(t) = g(t) = 0$ pro $t < 0$, pak platí*

$$f(t) * g(t) = f * g\,. \tag{38}$$

Důkaz: Splňují-li $f(t)$, $g(t)$ předpoklady věty, pak $f(t) * g(t)$ existuje pro všechna t. (Viz [6] nebo [1] „pomocná věta".) Vytvořujícími funkcemi pro f, g zřejmě jsou $f^{(-1)}(t)$, $g^{(-1)}(t)$. Utvořme $H(t) = f^{(-1)}(t) * g^{(-1)}(t)$. Poněvadž $f^{(-1)}(t)$ má derivaci skoro všude rovnou $f(t)$, platí ([6], [1]), že $H(t)$ má skoro všude derivaci a je $H'(t) = f(t) * g^{(-1)}(t) + f^{(-1)}(0)\, g^{(-1)}(t) = f(t) * g^{(-1)}(t)$. Stejným způsobem vyplyne, že skoro všude

$$H''(t) = f(t) * g(t)\,, \text{ tj. } f * g = f(t) * g(t), \text{ c. b. d.}$$

Uveďme si nyní příklady na konvoluce! Buď f laplaceovská distribuce; máme určit $f * \delta_0$. Nechť $F(t)$ je příslušná vytvořující funkce k f, $F^{(k)} = f$. Vytvořující funkcí k δ_0 je $K_0(t) = t$ pro $t \geq 0$, $K_0(t) = 0$ pro $t < 0$, přičemž $K_0'' = \delta_0$. Podle definice tedy je $f * \delta_0 = \left(\int_0^t (t - \tau)\, F(\tau)\, d\tau \right)^{(k+2)}$. Integrací po částech však je

$$\int_0^t (t - \tau)\, F(\tau)\, d\tau = [(t - \tau)\, F^{(-1)}(\tau)]_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_0^t F^{(-1)}(\tau)\, d\tau = F^{(-2)}(t)\,,$$

takže $f * \delta_0 = (F^{(-2)}(t))^{(k+2)} = F^{(k)}$. Platí tedy

$$f * \delta_0 = f\,. \tag{39}$$

Stanovme dále $\delta_0' * \delta_0'$. Zde je $\delta_0' = K_0'''$, takže

$$\delta_0' * \delta_0' = \left(\int_0^t (t-\tau)\,\tau\,\mathrm{d}\tau\right)^{(6)} = \left(\tfrac{1}{6}t^3\right)^{(6)} = (H_0(t))^{(3)} = \delta_0''\,.$$

Pomocí konvoluce mohli bychom též definovat „určitý integrál od 0 do t z distribuce f“ jako distribuci $H_0 * f$; kdyby pak f byla regulární, byl by podle věty 6 tento pojem totožný s $\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. Pro naše účely však to nemá valné ceny a proto nebudeme podrobnosti rozebírat.

Lehko se nyní dokáže následující

Věta 7. *Jsou-li f, g laplaceovské, pak*

$$(f * g)' = f' * g\,. \tag{40}$$

Důkaz: Buďte $F(t)$, $G(t)$ vytvořující funkce, $F^{(k)} = f$, $G^{(l)} = g$. Ježto $F^{(k+1)} = f'$, je podle definice konvoluce

$$f' * g = \left(\int_0^t F(t-\tau)\,G(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{(k+l+1)} = (f * g)'\,,\ \text{c. b. d.}$$

Na základě (40) vyplývá z (39) vzorec

$$f * \delta_0^{(n)} = f^{(n)}\,. \tag{41}$$

Důležitá bude následující

Věta 8. *Nechť distribuce f, g, f_n, g_n, $n = 1, 2, \ldots$ tvoří normální systém; je-li $f_n \to f$, $g_n \to g$, pak platí*

$$f_n * g_n \to f * g\,. \tag{42}$$

Přitom $f * g$, $f_n * g_n$ tvoří rovněž normální systém.

Důkaz: Buďte $F(t)$, $G(t)$, $F_n(t)$, $G_n(t)$ vytvořující funkce a $f = F^{(k)}$, $g = G^{(k)}$, $f_n = F_n^{(k)}$, $g_n = G_n^{(k)}$. Ježto $f_n \to f$, je

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_n(\tau)\,\varphi^{(k)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \to \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)\,\varphi^{k}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad \text{pro každou } \varphi(t) \in \mathbf{K}\,. \tag{43}$$

Pro libovolnou spojitou funkci $\eta(t)$ a čísla λ, $h > 0$ platí

$$F^{(-1)}(\lambda) - F_n^{(-1)}(\lambda) = \int_0^\lambda F(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_0^\lambda F_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \int_0^\lambda (F(\tau) - F_n(\tau))\,(1 - \eta(\tau))\,\mathrm{d}\tau + \int_0^{\lambda+h} (F(\tau) - F_n(\tau))\,\eta(\tau)\,\mathrm{d}\tau -$$

$$- \int_\lambda^{\lambda+h} (F(\tau) - F_n(\tau))\,\eta(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,$$

takže

$$|F^{(-1)}(\lambda) - F_n^{(-1)}(\lambda)| \leqq |\int\limits_0^\lambda (F(\tau) - F_n(\tau))\,(1 - \eta(\tau))\,\mathrm{d}\tau| +$$

$$+ |\int\limits_0^{\lambda+h} (F(\tau) - F_n(\tau))\,\eta(\tau)\,\mathrm{d}\tau| + \int\limits_\lambda^{\lambda+h} (|F(\tau)| + |F_n(\tau)|)\,.\,|\eta(\tau)|\,\mathrm{d}\tau\,. \qquad (44)$$

Zvolme $\lambda > 0$ a $\varepsilon > 0$. Zvolme dále $h < \lambda$ tak, že $h < \dfrac{\varepsilon}{8C}\,\mathrm{e}^{-2\lambda\xi}$. (Čísla C, ξ existují podle předpokladu $|F(t)|$, $|G(t)|$, $|F_n(t)|$, $|G_n(t)| \leqq C\mathrm{e}^{\xi t}$.)

Podle lemmatu existuje pak pro λ, h (klademe tam $T = \lambda$; $\alpha(t) = 1$) funkce $\varphi(t) \in \mathbf{K}$ tak, že $\varphi^{(k)}(t) = 1$ v $\langle 0, \lambda\rangle$, $|\varphi^{(k)}(t) - 1| \leqq 1$ v $\langle \lambda, \lambda + h\rangle$ a $\varphi^{(k)}(t) = 0$ pro $t \geqq \lambda + h$. Položíme-li ve (44) $\eta(t) = \varphi^{(k)}(t)$, zmizí první člen pravé strany a pro třetí máme

$$\int\limits_\lambda^{\lambda+h} (|F(\tau)| + |F_n(\tau)|)\,.\,|\varphi^{(k)}(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \leqq 2C\mathrm{e}^{\xi(\lambda+h)}\,.\,2h < \tfrac{1}{2}\varepsilon\,.$$

Je tedy

$$|F^{(-1)}(\lambda) - F_n^{(-1)}(\lambda)| \leqq |\int\limits_{-\infty}^{\infty} (F(\tau) - F_n(\tau))\,\varphi^{(k)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau| + \tfrac{1}{2}\varepsilon\,. \qquad (45)$$

Podle (43) pak existuje N tak, že pro každé $n > N$ bude první člen pravé strany (45) menší než $\dfrac{\varepsilon}{2}$, takže platí $F_n^{(-1)}(t) \to F^{(-1)}(t)$ pro každé t.

Zcela stejně vyplyne, že $G_n^{(-1)}(t) \to G^{(-1)}(t)$ pro každé t. To znamená, že pro každé t a τ je $F_n^{(-1)}(t - \tau)\,G_n^{(-1)}(\tau) \to F^{(-1)}(t - \tau)\,G^{(-1)}(\tau)$.

Všimneme-li si, že je $|F_n^{(-1)}(t)|$, $|G_n^{(-1)}(t)| < \dfrac{C}{\xi}\,\mathrm{e}^{\xi t}$, vidíme, že členy posloupnosti $F_n^{(-1)}(t - \tau)\,G_n^{(-1)}(\tau)$ jsou na intervalu $\tau \in \langle 0, t\rangle$ ohraničeny konstantou $C^2\xi^{-2}\,\mathrm{e}^{2\xi t}$, takže platí

$$\psi_n(t) = \int\limits_0^t F_n^{(-1)}(t - \tau)\,G_n^{(-1)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \to \int\limits_0^t F^{(-1)}(t - \tau)\,G^{(-1)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Poněvadž však členy $\psi_n(t)$ jsou pro všechna t ohraničeny lokálně integrovatelnou funkcí $\dfrac{C^2}{2\xi^3}\,\mathrm{e}^{2\xi|t|}$, platí též v distributivním smyslu

$$F_n^{(-1)}(t) * G_n^{(-1)}(t) \to F^{(-1)}(t) * G^{(-1)}(t)\,. \qquad (46)$$

Uvědomíme-li si konečně, že $F^{(-1)}(t)$, $G^{(-1)}(t)$, ..., jsou rovněž vytvořujícími funkcemi pro f, g, f_n, g_n, plyne $2k + 2$-násobným derivováním (46), že

$$f_n * g_n = (F_n^{(-1)}(t) * G_n^{(-1)}(t))^{(2k+2)} \to (F^{(-1)}(t) * G^{(-1)}(t))^{(2k+2)} = f * g\,,$$

což jsme měli dokázat.

Ježto platí $|F^{(-1)}(t) * G^{(-1)}(t)| < \dfrac{C^2}{2\xi^3}\,\mathrm{e}^{2\xi|t|}$ a $|F_n^{(-1)}(t) * G_n^{(-1)}(t)| < \dfrac{C^2}{2\xi^3}\,.\,\mathrm{e}^{2\xi|t|}$, $n = 1, 2, \ldots$, tvoří $f * g$, $f_n * g_n$ normální systém a věta je dokázána.

Nakonec dokažme následující jednoduchou větu:

Věta 9. *Buďte f, g laplaceovské distribuce s růsty ξ_1, ξ_2. Pak v polorovině* $\operatorname{Re} p > \max [\xi_1, \xi_2]$ *platí*

$$\mathscr{L}(f * g) = \mathscr{L}(f)\, \mathscr{L}(g)\,. \tag{47}$$

Důkaz: Jsou-li $F(t)$, $G(t)$ vytvořující funkce $F^{(k)} = f$, $G^{(l)} = g$, je

$$f * g = (F(t) * G(t))^{(k+l)}\,. \tag{48}$$

Podle známé věty o konvoluci funkcí (srv. [6]) existuje pro $\operatorname{Re} p > \max . [\xi_1, \xi_2]$ obraz $\mathscr{L}\{F(t) * G(t)\}$ a je roven $\mathscr{L}\{F(t)\}\, \mathscr{L}\{G(t)\}$. Podle věty 4 máme pro (48):

$$\mathscr{L}(f * g) = p^{k+l}\, \mathscr{L}\{F(t) * G(t)\} = p^k \mathscr{L}\{F(t)\}\, p^l \mathscr{L}\{G(t)\} = \mathscr{L}(f)\, \mathscr{L}(g)\,,$$

c. b. d.

Příklad: Máme ustanovit $\delta_{T_1}^{(n)} * \delta_{T_2}^{(m)}$; $T_1, T_2 \geqq 0$. Podle (47) je $\mathscr{L}(\delta_{T_1}^{(n)} * \delta_{T_2}^{(m)}) = p^n e^{-pT_1} . p^m e^{-pT_2} = \mathscr{L}(\delta_{T_1+T_2}^{(n+m)})$; podle věty 3 (unicity originálu) tedy platí

$$\delta_{T_1}^{(n)} * \delta_{T_2}^{(m)} = \delta_{T_1+T_2}^{(n+m)}\,;\ T_1, T_2 \geqq 0\,. \tag{49}$$

ČÁST II.

Přistupme nyní k řešení vlastní problematiky, kterou jsme nastínili v úvodu článku. Pro přehlednost zavedeme vektorovou symboliku. Symbol $[a_{ik}]$ bude značit čtverečnou matici r-tého řádu, sestavenou z prvků a_{ik}, symbol $[c_i]$ r-dimensionální vektor z prvků c_i. Jsou-li prvky matice M a vektoru v distribuce, je jistě zřejmý význam symbolů M', v', $\mathscr{L}(v)$, $M * v$, $M * \delta_0'$ apod.[6]).

Zavedeme-li matice $A = [\alpha_{ik}]$, $B = [\beta_{ik}]$, $C = [\gamma_{ik}]$ a vektory $q = [q_i]$, $c = [c_i]$, $x(t) = [x_i(t)]$, $f(t) = [f_i(t)]$, můžeme systém rovnic (1) zapsat v jednoduchém tvaru

$$Ax(t) + Bx'(t) + C\int_0^t x(\tau)\, d\tau + q = f(t)\,. \tag{50}$$

Dále zaveďme ještě toto označení: $\mathbf{F}$ bude systém všech (r-dimensionálních) vektorů $x(t) = [x_i(t)]$, kde $x_i(t) \in S$, $i = 1, 2, \ldots, r$. (Srv. [1]), $\mathbf{D}$ systém všech vektorů $y = [y_i]$, kde y_i jsou laplaceovské distribuce. Budeme-li definovat všechny $x(t) \in \mathbf{F}$ jako $x(t) = 0$ pro $t < 0$, pak bude $\mathbf{F} \subset \mathbf{D}$.

Poněvadž nám zde nepůjde o „kompatibilitu" počátečních podmínek (tato

[6]) Je-li $M = [m_{ik}]$, $v = [v_i]$, pak pro prvky q_i vektoru $M * v$ je $q_i = \sum_{k=1}^{r} m_{ik} * v_k$. Podobně pro prvky h_{ik} matice $M * \delta_0'$ je $h_{ik} = m_{ik} * \delta_0' = m_{ik}'$.

otázka byla řešena v [1]), budeme předpokládat, že vektor q je již zahrnut v $f(t)$ a proto budeme uvažovat namísto (50) jednodušší rovnici

$$Ax(t) + Bx'(t) + C\int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t)\,. \tag{51}$$

V [1] byly zavedeny pojmy zobecněného a klasického řešení (51), když $f(t) \in \boldsymbol{F}$ takto:

Řekneme, že $x(t) \in \boldsymbol{F}$ je zobecněným řešením (51) při počáteční podmínce c, jestliže $x(t)$ splňuje rovnici

$$A\int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau + Bx(t) + C\int_0^t\int_0^\tau x(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau + BcH_0(t)\,, \tag{52}$$

přičemž rovnost bereme ve smyslu ,,skoro všude".

Je-li nadto $x(t)$ spojitý v $\langle 0, \infty)$, splňuje podmínku $x(0) = c$, má spojitou derivaci v $(0, \infty)$ a v $(0, \infty)$ vyhovuje identicky (51), nazývá se $x(t)$ klasické řešení.

Poznámka: V [1] zavedli jsme pojmy řešení pouze na intervalu $\langle 0, \infty)$. Protože však hodláme vyšetřit souvislost mezi zobecněným a dále zavedeným distributivním řešením, je nutné smysl těchto pojmů rozšířit na celý interval $(-\infty, \infty)$. Proto jsme při zavedení systému $\boldsymbol{F}$ dodefinovali jeho prvky jako nuly pro $t < 0$, a proto se v (52) ,,objevil" součinitel $H_0(t)$ u vektoru Bc. Je však zřejmé, že zde opakovaná definice zobecněného a klasického řešení (nyní už na $(-\infty, \infty)$!) je pro $t > 0$ ekvivalentní definicím z [1].

Přisuďme nyní smysl rovnici (51), když její pravá strana je vektor distribucí.

Buďte A, B, C reálné matice, c reálný vektor, $f \in \boldsymbol{D}$. Řekneme, že x je řešením (51) při počáteční podmínce c, jestliže

1. $x \in \boldsymbol{D}$,
2. je splněna rovnice

$$Ax' + Bx'' + Cx = f' + Bc\delta_0'\,. \tag{53}$$

Poznamenejme, že splnění podmínky 1. nepožadujeme z toho důvodu, aby prvky x měly konečný růst, nýbrž proto, aby byl pojem řešení při dané počáteční podmínce určen jednoznačně. (Nehrozí-li nedorozumění, budeme říkat prostě ,,řešení" namísto přesnějšího ,,distributivní řešení".) Jinými slovy, podmínka 1. dovoluje mezi všemi řešeními (53) vybrat to, které je rovno nule na $(-\infty, 0)$. Tak například, každé řešení rovnice $x'' = \delta_1^{(3)}$ možno psát ve tvaru $x = \delta_1' + f$, kde $f = c_1 + c_2 t$ na $(-\infty, \infty)$, avšak jenom řešení $x_0 = \delta_1'$ je rovné nule na $(-\infty, 0)$.

Zaveďme ještě toto označení:

Buď $Z(p) = A + pB + \dfrac{1}{p}\,C$; řekneme, že matice A, B, C splňují podmínku $P1$, je-li $\det Z(p) \not\equiv 0$.

Pak můžeme vyslovit důležitou větu:

Věta 10. *Nechť A, B, C splňují $P1$, $f \in$ **D**. Pak existuje jediné distributivní řešení x rovnice (51) a platí pro ně*

$$x = R * (f + Bc\delta_0)\,, \tag{54}$$

kde

$$\mathscr{L}(R) = Z^{-1}(p)\,. \tag{55}$$

Důkaz: Předně je zřejmé, že matice $Z^{-1}(p)$ (která v důsledku platnosti $P1$ existuje), má za prvky obrazy laplaceovských distribucí. Vskutku, prvky $Z^{-1}(p)$ jsou racionálními funkcemi p, takže pro dostatečně velké k bude matice $p^{-k}Z^{-1}(p)$ mít za prvky obrazy v $(-\infty, \infty)$ spojitých funkcí $G_{ik}(t)$, pro které $G_{ik}(t) = 0$ pro $t \leq 0$. Buď R matice distribucí, pro kterou platí (55). Podle věty 3 je R určena jednoznačně. Snadno zjistíme, že R vyhovuje rovnici

$$AR' + BR'' + CR = I\delta_0' \quad (I \text{ je jednotková matice})\,. \tag{56}$$

Je totiž

$$\mathscr{L}(AR' + BR'' + CR) = (pA + p^2B + C)\,\mathscr{L}(R) = pZ(p)\,Z^{-1}(p) = pI = \\ = I\mathscr{L}(\delta_0')\,,$$

takže podle věty 3 (56) platí.

Sestrojme nyní vektor distribucí x podle rovnice (54), a utvořme vektor $u = Ax' + Bx'' + Cx$; podle věty 7 pak platí

$$u = AR' * (f + Bc\delta_0) + BR'' * (f + Bc\delta_0) + CR * (f + Bc\delta_0) = \\ = (AR' + BR'' + CR) * (f + Bc\delta_0) = (I\delta_0') * (f + Bc\delta_0) = f' + Bc\delta_0'$$

podle rovnice (41). Je tedy sestrojený vektor x řešením (53).

K důkazu jednoznačnosti předpokládejme, že existuje ještě $\tilde{x} \in$ **D** vyhovující (53). Pak ovšem je

$$A(x - \tilde{x})' + B(x - \tilde{x})'' + C(x - \tilde{x}) = 0\,,$$

takže

$$\mathscr{L}(A(x - \tilde{x})' + B(x - \tilde{x})'' + C(x - \tilde{x})) = pZ(p)\,\mathscr{L}(x - \tilde{x}) = 0\,,$$

z čehož plyne $\mathscr{L}(x - \tilde{x}) = 0$, a tedy podle věty 3 $x = \tilde{x}$. Věta je dokázána.

Srovnáme-li právě dokázanou větu s větou 2 z [1], vidíme, že postačující podmínky pro existenci distributivního řešení (51) jsou mnohem slabší, než podmínky pro existenci zobecněného řešení. Poznamenejme, že podmínka $P1$ je v praktických případech splněna vždycky, tj. (51) má prakticky vždy řešení.

Všimněme si nyní blíže toho, kterak souvisí distributivní řešení (51) s řešením zobecněným. Platí následující

Věta 11. *Buď $f(t) \in$ **F**. Pak platí:*

a) má-li (51) zobecněné řešení $x(t)$, je $x(t)$ zároveň distributivním řešením (51) (rozumí se při stejné počáteční podmínce);

b) má-li (51) distributivní řešení x, které je regulární ($x = x(t)$), potom $x(t)$ je zobecněným řešením (51).

Důkaz: tvrzení a) je triviální; je-li $x(t)$ zobecněné řešení, platí (52) skoro všude; derivujeme-li ji distributivně dvakrát, dostaneme (53). Abychom dokázali tvrzení b), všimněme si, že pro libovolnou laplaceovskou distribuci h platí $h' * H_0 = h$. To plyne snadno z věty 7 a rovnice (41) takto: $h' * H_0 = (h * H_0)' = h * \delta_0 = h$. Podobně, je-li h regulární, $h = h(t)$, pak $h * H_0 = \int_0^t h(\tau)\, d\tau$. (O tom jsme se ostatně zmínili výše.)

Jestliže nyní (51) má regulární distributivní řešení x, je splněna rovnice (53), tj. $Ax' + Bx'' + Cx - f' - Bc\delta_0' = 0$. „Násobíme-li" ji H_0, máme

$$(Ax' + Bx'' + Cx - f' - Bc\delta_0') * H_0 = Ax + Bx' + C\int_0^t x(\sigma)\, d\sigma - f - Bc\delta_0 = 0\,.$$

Opětovným násobením plyne

$$A\int_0^t x(\tau)\, d\tau + Bx(t) + C\int_0^t\int_0^\tau x(\sigma)\, d\sigma - \int_0^t f(\tau)\, d\tau - BcH_0(t) = 0\,. \tag{57}$$

Na levé straně (57) stojí regulární distribuce; poslední distributivní rovnost značí, že funkce na levé straně je rovna nule skoro všude, tj. že $x(t)$ je podle (52) zobecněným řešením (51), c. b. d.

Z právě dokázané věty vyplývá, že zobecněné řešení je speciálním případem řešení distributivního.

Pro fysikální zhodnocení výsledků bude potřebná následující

Věta 12. *Nechť $f_n \in \mathbf{D}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ tvoří normální systém*[7]) *a matice A, B, C splňují podmínku $P1$. Značí-li x_n řešení rovnice*

$$A\ddot{x}_n + Bx_n' + C\int_0^t x_n\, d\tau = f_n \tag{58}$$

při počáteční podmínce c, a je-li $f_n \to f_0$, $n = 1, 2, \ldots$, pak platí $x_n \to x_0$ a x_n, $n = 0, 1, \ldots$ tvoří normální systém.

Důkaz: Vyjdeme z věty 10; podle (55) je matice distribucí R od n nezávislá. Podle (54) pak platí

$$x_n = R * (f_n + Bc\delta_0)\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ježto $f_n \to f_0$, též

$$f_n + Bc\delta_0 \to f_0 + Bc\delta_0\,,$$

a tedy podle věty 8 platí

$$x_n = R * (f_n + Bc\delta_0) \to R * (f_0 + Bc\delta_0) = x_0\,;$$

poněvadž f_n tvoří normální systém, je podle věty 8 zřejmě též $R * (f_n + Bc\delta_0)$ normálním systémem, čímž je věta dokázána.

---

[7]) Význam rčení „$f_n \in \mathbf{D}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ tvoří normální systém" je jistě zřejmý; značí to, že všechny prvky všech vektorů f_n tvoří normální systém distribucí.

Věnujme nyní několik slov tomu, kterak závisí struktura distributivního řešení rovnice (51) na její pravé straně. Při vyšetřování dynamiky lineárních soustav se přivedené síly obvykle skládají z nějakých impulsů a popudů, grafy jejichž časových závislostí jsou tvořeny oblouky grafů „velmi rozumných" funkcí. Abychom tuto představu precisovali, zavedeme následující pojmy:

Nechť čísla $t_i, i = 0, 1, 2, \ldots$ splňují podmínky $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$; $t_i \to \infty$. Označme (τ) posloupnost $t_i, i = 0, 1, 2, \ldots$

Řekneme, že distribuce f je (τ)-standardní, je-li

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} (\psi_i + g_i) , \quad \psi_i = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik} \delta_{t_i}^{(k} \tag{59}$$

(n je nějaké pevné číslo od i nezávislé) a jsou-li splněny tyto podmínky:

1. $g_i, i = 0, 1, 2, \ldots$ jsou regulární, přičemž $g_i(t)$ má pro $t > t_i$ derivace všech řádů a je $g(t) = 0$ pro $t < t_i$;

2. distribuce $f, f_r = \sum_{i=0}^{r} (\psi_i + g_i)$, $r = 0, 1, 2, 3, \ldots$ tvoří normální systém.

Analogicky budeme říkat, že vektor distribucí $h \in \mathbf{D}$ je (τ)-standardní.

Z definice přímo plyne, že $f = \sum_{i=0}^{\infty} g_i$ na $M = \bigcup_{i=0}^{\infty} (t_i, t_{i+1})$, tj. že na množině M je (τ)-standardní distribuce ztotožnitelná s funkcí. Příkladem takové distribuce je

$$f = \delta_0' + 2(H_0(t) - H_1(t)) \cos 2\pi t + 5(H_2(t) - H_3(t)) \,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + 2\delta_3 + K_{\frac{3}{2}}(t) , \tag{60}$$

kde zřejmě $M = (0, 1) \cup (1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, 2) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$, nebo

$$h = \delta_0 + H_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i + (-1)^i \, 2H_i(t) , \quad \text{kde} \quad M = \bigcup_{i=0}^{\infty} (i, i + 1) .$$

Dále je z definice zřejmé, že (τ)-standardní distribuce můžeme lehko „graficky znázornit". Použitá licence znázornění je dobře patrná z obr. 2, kde je „graf distribuce f" podle (60).

Učiňme na tomto místě obšírnější, avšak důležitou poznámku. Bylo by omylem, kdyby čtenář nabyl dojmu, že každá laplaceovská distribuce má tvar (59). Systém distribucí je totiž mnohem bohatší. Osvětleme si věc na příkladě. Uvažme funkci

$$\begin{aligned} f(t) &= \lambda t^{\lambda-1} && \text{pro} \quad t > 0 \\ &= 0 && \text{pro} \quad t \leqq 0, \quad 0 < \lambda < 1 . \end{aligned} \tag{60a}$$

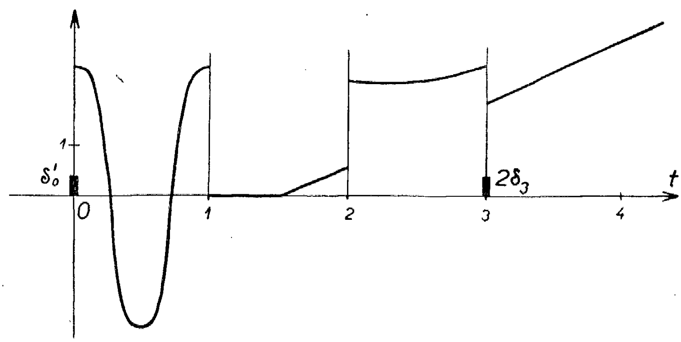
Zřejmě $f(t)$ je lokálně integrovatelná, a je tedy regulární distribucí. Derivace $f'(t)$ existuje všude vyjma bodu $t = 0$, $f'(t) = \lambda(\lambda - 1)\, t^{\lambda-2}$, avšak $f'(t)$ již není v okolí nuly lokálně integrovatelná. (Srv. pozn. [1])).

Pro distributivní derivaci f' platí podle definice

$$(f', \varphi) = (f, -\varphi') = -\int_0^\infty \lambda t^{\lambda-1} \varphi'(t)\, dt\,. \tag{61}$$

Lehko zjistíme, že platí

$$(f', \varphi) = \int_0^\infty \lambda(\lambda - 1)\, t^{\lambda-2}(\varphi(t) - \varphi(0))\, dt\,. \tag{62}$$



Obr. 2.

Předně je totiž zřejmé, že integrál (62) konverguje. Pro každé $h > 0$ můžeme psát

$$\int_0^\infty t^{\lambda-2}(\varphi(t) - \varphi(0))\, dt = \int_0^h t^{\lambda-2}(\varphi(t) - \varphi(0))\, dt + \int_h^\infty t^{\lambda-2}(\varphi(t) - \varphi(0))\, dt =$$

$$= \int_0^h t^{\lambda-2}(\varphi(t) - \varphi(0))\, dt + \left[\frac{t^{\lambda-1}}{t-1}(\varphi(t) - \varphi(0))\right]_h^\infty - \frac{1}{\lambda-1}\int_h^\infty t^{\lambda-1}\varphi'(t)\, dt.$$

Avšak pro první integrál na pravé straně poslední rovnice je $I = \int_0^h t^{\lambda-2}(\varphi(t) - \varphi(0))\, dt = \int_0^h t^{\lambda-1}\varphi'(\eta t)\, dt$, $0 < \eta < 1$ (η závisí na t), takže $I \to 0$ pro $h \to 0$. Zároveň hodnota závorky je rovna $-\dfrac{h^{\lambda-1}}{\lambda-1}(\varphi(h) - \varphi(0)) = -\dfrac{h^\lambda}{\lambda-1}\varphi'(\bar{\eta}h) \to 0$ pro $h \to 0$. Tím je (62) dokázána. Z rovnice (62) je ihned vidět, že pro ty funkce $\varphi(t) \in \boldsymbol{K}$, pro které $\varphi(0) = 0$, je funkcionál (f', φ) totožný s funkcionálem $\int_0^\infty f'(t)\, \varphi(t)\, dt$. To znamená, že na $(0, \infty)$ je $f' = \lambda(\lambda-1)\, t^{\lambda-2}$. (Nechť si čtenář dobře rozmyslí, v jakém smyslu nutno poslední rovnici chápat!)

Snadno dále nahlédneme, že f' nelze vyjádřit ve tvaru $f' = \sum_{n=1}^{n} \alpha_i \delta_0^{(i)} + g$, kde g je regulární; kdyby tomu tak bylo, platilo by $(f' - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \delta_0^{(i)} - g) * H_0 =$

$= 0$, tj. $f - \alpha_0 H_0 - g^{(-1)} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_0^{(i-1)} = 0$, kde $g^{(-1)} = \int_0^t g(\tau)\, d\tau$. Z toho by plynulo $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ (f, H_0, $g^{(-1)}$ jsou regulární), a tedy $\lambda t^{\lambda-1} - \alpha_0 - g^{(-1)}(t) = 0$ skoro všude pro $t > 0$. Ježto však členy $t^{\lambda-1}$, $g^{(-1)}(t)$ jsou spojité v $(0, \infty)$, platila by rovnost všude; avšak $g^{(-1)}(t) \to 0$, $t^{\lambda-1} \to \infty$ pro $t \to 0+$, což je spor.

Naproti tomu na každém intervalu (h, ∞), $h > 0$ je f' rovna regulární distribuci; stačí totiž klást

$$g_h = \lambda(\lambda - 1)\, t^{\lambda-2} \qquad \text{pro } t \geqq h$$
$$= 0 \qquad \text{pro } t < h \quad \text{a je } f' = g_h \text{ na } (h, \infty)\,.$$

Všimněme si ještě rovnice (62)! Jak jsme viděli, funkce $f'(t) = \lambda(\lambda - 1)\, t^{\lambda-2}$ není lokálně integrovatelná, a tudíž funkcionál $\int_0^\infty \lambda(\lambda - 1)\, t^{\lambda-2}\varphi(t)\, dt$ nemá pro některé $\varphi(t) \in \mathbf{K}$ smyslu. Naproti tomu funkcionál (f', φ) podle (62) má smysl pro každou $\varphi(t) \in \mathbf{K}$. Z toho je vidět, že pomocí (62) je možno funkci $t^{\lambda-2}$ zařadit do systému distribucí, přičemž na $(0, \infty)$ dochází k rovnosti. Obecně lze pak dokázat, že každá funkce $g(t)$, která má v bodě t_0 neintegrovatelnou singularitu toho typu, že pro nějaké $n \geqq 0$ je $(t - t_0)^n\, g(t)$ integrovatelná, připouští tzv. regularisaci příslušného funkcionálu, tj. (g, φ) možno vyjádřit podobným vzorcem, jako (62). Rozdíl je potom pouze v tom, že místo členu $-\varphi(0)$ stojí ve vzorci n členů Taylorova rozvoje funkce $-\varphi(t)$ v bodě t_0. (Srv. [3].) Tato okolnost značí speciálně, že všechny funkce $t^{\lambda-k}$; $0 < \lambda < 1$; $k = 1, 2, \ldots$ patří ve výše uvedeném smyslu do systému distribucí.

Upozorněme na tomto místě ještě na jeden fakt: funkcím s výše uvedenou neintegrovatelnou singularitou (přesněji, příslušným distribucím) možno přiřadit Laplaceův obraz, přestože odpovídající Laplaceův integrál neexistuje. Tak například pro funkci $f(t)$ podle (60a) je $f^{(-1)}(t) = t^\lambda$ vytvořující funkcí, pro kterou platí $\mathscr{L}\{t^\lambda\} = \dfrac{\Gamma(\lambda + 1)}{p^{\lambda+1}}$ (viz [6]). Podle věty o obrazu derivace distribuce máme odtud $\mathscr{L}(\lambda t^{\lambda-1}) = p^{-\lambda}\Gamma(\lambda + 1)$, čili $\mathscr{L}(t^{\lambda-1}) = p^{-\lambda}\Gamma(\lambda)$, a dále

$$\mathscr{L}(t^{\lambda-2}) = p^{1-\lambda}\Gamma(\lambda - 1)\,. \tag{63}$$

Obecně obdržíme

$$\mathscr{L}(t^{\lambda-n}) = p^{n-\lambda-1}\,\Gamma(\lambda - n + 1)\,;\ n = 1, 2, 3, \ldots,\ 0 < \lambda < 1\,. \tag{64}$$

Pro celočíselné hodnoty exponentu lze pak pomocí principu regularisace odvodit vztah

$$\mathscr{L}(t^{-n}) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\, p^{n-1}(C + \ln p)\,; \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{65}$$

kde $C = 0{,}57721 \ldots$ (Eulerova konstanta).

Vraťme se nyní zpět k distribucím (τ)-standardním, a zkoumejme, jaké je řešení rovnice (51), je-li její pravá strana takovou distribucí. Zde platí následující

Věta 13. *Nechť matice A, B, C rovnice (51) splňují podmínku P1. Je-li $f \in$* **D** *(τ)-standardní, pak distributivní řešení x rovnice (51) při libovolné počáteční podmínce c je rovněž (τ)-standardní.*

Důkaz: Nechť tedy $f = \sum_{i=0}^{\infty} (\psi_i + g_i)$, $\psi_i = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik} \delta_{t_i}^{(k)}$, a jsou splněny podmínky 1., 2. (Zde α_{ik}, g_i jsou vektory!) Podle věty 10 platí pro řešení $x = R * (f + Bc\delta_0)$, $\mathscr{L}(R) = Z^{-1}(p)$. Označme $\bar{x}_0 = R * (\psi_0 + Bc\delta_0 + g_0)$, $\bar{x}_i = R * (\psi_i + g_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ a podívejme se na to, jak vypadají vektory $\bar{x}_i$.

Ježto matice $Z^{-1}(p)$ má za prvky racionální funkce p, možno psát rozklad $Z^{-1}(p) = A_m p^m + A_{m-1} p^{m-1} + \ldots + A_1 p + A_0 + \tilde{A}(p)$, kde $A_m, A_{m-1}, \ldots A_0$ jsou konstantní matice, prvky $\tilde{A}(p)$ mají nulu v bodě $p = \infty$, a jsou tedy laplaceovými obrazy funkcí. (Zřejmě takový rozklad je jednoznačný.)

Buď $\tilde{R}(t)$ matice spojitých originálů k $\tilde{A}(p)$. Poznamenejme, že $\tilde{R}(t)$ má v $\langle 0, \infty)$ derivace všech řádů. Možno tedy psát $R = U + \tilde{R}$, kde $U = \sum_{i=0}^{m} A_i \delta_0^{(i)}$. Pro vektor $\bar{x}_i$ tedy platí

$$\bar{x}_i = (U + \tilde{R}) * (\psi_i + g_i) = U * \psi_i + \tilde{R} * \psi_i + U * g_i + \tilde{R} * g_i . \tag{66}$$

Zkoumejme nyní jednotlivé členy pravé strany (66)! Lehko vidíme, že vektor $U * \psi_i$ má tvar $U * \psi_i = \sum_{k=0}^{n+m} B_{ik} \delta_{t_i}^{(k)}$. ($B_{ik}$ jsou konstantní matice.)

Dále je

$$\tilde{R} * \psi_i = \sum_{k=0}^{n} \delta_{t_i}^{(k)} * \tilde{R} \alpha_{ik} . \tag{67}$$

Buď $\tilde{r}$ některý prvek matice $\tilde{R}$. Jak víme, platí

$$\mathscr{L}(\delta_{t_i}^{(k)} * \tilde{r}) = p^k e^{-pt_i} \mathscr{L}(\tilde{r}) .$$

Je známo (srv. [6]) označíme-li

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{t_i}(t) &= \tilde{r}(t - t_i) \text{ pro } t > t_i , \\ &= 0 \qquad\quad \text{pro } t \leqq t_i, \text{ že platí } \mathscr{L}\{\tilde{r}_{t_i}(t)\} = e^{-pt_i} \mathscr{L}\{\tilde{r}(t)\} , \end{aligned}$$

(věta o „posunutí“), takže je $\delta_{t_i}^{(k)} * \tilde{r} = (\tilde{r}_{t_i})^{(k)}$. Avšak funkce $\tilde{r}_{t_i}(t)$ je toho typu, který jsme uvažovali jako příklad na výpočet distributivní derivace funkce s nespojitostmi prvého druhu. (Viz rovnice (18), (19).) Funkce $\tilde{r}_{t_i}(t)$ má totiž (obyčejnou) derivaci $r^*(t)$ v každém bodě $t \neq t_i$, která je spojitá a existují limity $\tilde{r}_{t_i}(t_i + 0)$, $\tilde{r}_{t_i}(t_i - 0) = 0$. Platí tedy $\tilde{r}'_{t_i} = \tilde{r}_{t_i}(t_i + 0)\, \delta_{t_i} +$

$+ r^*(t)$. Funkce $r^*(t)$ má však tutéž vlastnost, takže $(\tilde{r}_{t_i})^{(k)}$ má tvar $(\tilde{r}_{t_i})^{(k)} = = \sum_{j=0}^{k} \gamma_j \delta_{t_i}^{(j)} + q$, kde q je regulární, $q(t) = 0$ pro $t \leqq t_i$ a $q(t)$ má derivace všech řádů pro $t > t_i$. Poněvadž podle (67) je libovolný prvek vektoru $\tilde{R} * \psi_i$ lineární kombinací distribucí tvaru $(\tilde{r}_{t_i})^{(k)}$, je

$$\tilde{R} * \psi_i = \sum_{k=0}^{n} c_{ik} \delta_{t_i}^{(k)} + h_i \,, \tag{68}$$

kde vektor distribucí h_i je regulární, $h_i(t) = 0$ pro $t \leqq t_i$, a $h_i(t)$ má derivace všech řádů pro $t > t_i$.

Zcela stejným postupem se dokáže, že vektor $U * g_i$ má rovněž tvar (68).

Vyšetřme konečně vektor $\tilde{R} * g_i$! Ježto $\tilde{R}$ a g_i jsou regulární, je $\tilde{R} * g_i = = \tilde{R}(t) * g_i(t) = \int_0^t \tilde{R}(t - \tau)\, g_i(\tau)\, d\tau = l_i(t)$. Předně, ježto $g_i(t) = 0$ pro $t \leqq t_i$, je též $l_i(t) = 0$ pro $t \leqq t_i$. Podle „pomocné věty“ z [1] dále vyplývá, že $l_i(t)$ je spojitý na $(-\infty, \infty)$ a že v každém bodě $t > 0$ existuje derivace

$$l_i'(t) = \tilde{R}'(t) * g_i(t) + \tilde{R}(0)\, g_i(t) \,. \tag{69}$$

Z (69) je lehko vidět (znovu užívám „pomocnou větu“), že člen $\tilde{R}'(t) * g_i(t)$ má všude v $(0, \infty)$ rovněž derivaci, a tedy zejména existuje $l_i''(t)$ pro $t > t_i$. Takto dostaneme, že $l_i(t)$ má pro $t > t_i$ derivace všech řádů.

Shrneme-li dosažené výsledky, vidíme podle (66), že $\bar{x}_i$ má tvar

$$\bar{x}_i = \lambda_i + h_i \,, \quad \lambda_i = \sum_{k=0}^{m+n} a_{ik} \delta_{t_i}^{(k)} \,, \quad i = 0, 1, 2, \dots \,, \tag{70}$$

kde h_i je regulární, $h_i(t) = 0$ pro $t \leqq t_i$, a má derivace všech řádů pro $t > t_i$

Položíme-li nyní $x_r = \sum_{i=0}^{r} \bar{x}_i$, platí

$$x_r = R * (\psi_0 + Bc\delta_0 + g_0) + \sum_{i=1}^{r} R * (\psi_i + g_i) = R * (f_r + Bc\delta_0),$$

kde $f_r = \sum_{i=0}^{r} (\psi_i + g_i)$. Ježto však $f, f_r, r = 0, 1, 2, \dots$ podle předpokladu tvoří normální systém a $f_r \to f$, tvoří podle věty 8 též x_r, $x = R * (f + Bc\delta_0)$ normální systém a je $x = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{x}_i$. Tím je dokázáno, že x je (τ)-standardní a tedy i věta 13.

Přistupme nyní ke stručnému fysikálnímu zhodnocení dosažených teoretických skutečností! Uvažujme nějakou lineární soustavu, jejíž chování je popsáno vektorovou rovnicí (51), na kterou působí síly $f_i(t)$, jejichž časový průběh má tvar superposice nějaké „rozumné“ funkce a impulsů různých řádů. (Rčením „impuls $I(t)$ je k-tého řádu“ rozumíme, že funkce $I^{(-k)}(t)$ je členem dosti vysokého indexu nějaké δ-posloupnosti.) Není-li například průběh impulsů přesně znám, a víme-li pouze, jaké jsou jejich integrální vlastnosti, nebo chceme-li řešení zjednodušit, popíšeme problém pomocí distribucí. Jak jsme viděli, mají distribuce tu příjemnou vlastnost, že jimi lze vystihnout jak funkce, tak představy, které máme o impulsech. Nahradíme-li tedy impulsy příslušnými kombinacemi distribucí $\delta_{t_i}^{(k)}$, budou vnější síly charakterisovány nějakým (τ)-standardním vektorem distribucí $\bar{f}$, který v distributivním smyslu bude blízký vektoru vnějších sil. Přitom udělme prvkům vektoru c (počáteční podmínka) význam hodnot hledaných fysikálních veličin v bodě $t = 0$, tj. hodnot ,,těsně před okamžikem", než začnou působit vnější síly, a zároveň předpokládejme, že tyto počáteční hodnoty jsou kompaktibilní (srv. [1]).

Nechť $x(t)$ značí vektor průběhů hledaných veličin v soustavě, působí-li na ni skutečné vnější síly. Obvykle se v praxi při řešení choulostivých otázek předpokládá, že všechny fysikální veličiny vyjdou z počátečního stavu spojitě zároveň se všemi svými derivacemi. Připusťme, že námi uvažované síly mají tuto vlastnost. Potom $x(t)$ se jeví matematicky jako klasické řešení příslušné rovnice (51), stojí-li na pravé straně vektor skutečných sil (srv. [1]).

Označíme-li $\bar{x}$ distributivní řešení (51), je-li na pravé straně vektor distribucí $\bar{f}$, charakterisující vnější síly, potom, jak víme z věty 11 a 12, bude $\bar{x}$ v distributivním smyslu blízký $x(t)$. Nadto víme podle věty 13, jaká bude struktura $\bar{x}$ v závislosti na $\bar{f}$, a tedy též jak budou časově rozloženy impulsy v hledaných fysikálních veličinách.

Z právě provedené úvahy vyplývá, že řešení problému, získané pomocí distribucí, vystihuje fysikální skutečnost, a je tedy naše definice řešení rovnice (51) z fysikálního stanoviska zcela oprávněná. Nadto má řešení distribucemi výhody slabších předpokladů a větší obecnosti, než je tomu u metod, pracujících s klasickým pojmem funkce.

Všimněme si na tomto místě ještě dvou prakticky důležitých skutečností. Položíme-li v rovnici (54) $c = 0$, platí pro řešení x vztah

$$\mathscr{L}(x) = Z^{-1}(p)\,\mathscr{L}(f)\,. \tag{71}$$

Matice $Z^{-1}(p)$ se obvykle nazývá ,,přenosová matice", vektor hledaných veličin x pak ,,vektor odezev" nebo prostě odezvy. Pojímáme-li tedy prvky x a f jako distribuce, značí rovnice (71), že ,,obraz vektoru odezev soustavy při nulových počátečních podmínkách je roven součinu přenosové matice a obrazu vektoru vnějších sil". To je v technické literatuře často citované pravidlo, které v distributivním pojetí má obecnou platnost, tj. platí bez dalších ohraničení na $Z^{-1}(p)$ nebo f.

Dále, ježto pro $c = 0$ je $x = R * f$, platí podle věty 7, že $x^{(n)} = R * f^{(n)}$. Ve fysikální terminologii to značí, že ,,jsou-li počáteční podmínky nulové, pak n-té distributivní derivace odezev jsou odezvami systému, vyvolanými působením n-tých distributivních derivací vnějších sil." Víme-li tedy například, že pro $t \geqq 0$ je $e^{-t} \cos \omega t$ odezvou systému, vyvolanou jednotkovým skokem, bude jeho odezva na δ_0 rovna $\delta_0 - e^{-t} (\cos \omega t + \omega \sin \omega t)$.

Přistupme nyní ke zhodnocení dosažených výsledků se stanoviska početní techniky při řešení konkrétních problémů! Nechť tedy pro rovnici (51) je splněna podmínka $P1$, x je její distributivní řešení, takže platí

$$Ax' + Bx'' + Cx = f' + Bc\delta_0' .$$

Přejdeme-li v této rovnici k obrazům, je

$$(Ap + Bp^2 + C) \mathscr{L}(x) = p\mathscr{L}(f) + pBc ,$$

což možno psát ve tvaru

$$A\mathscr{L}(x) + B(p\mathscr{L}(x) - c) + \frac{1}{p} C\mathscr{L}(x) = \mathscr{L}(f) . \tag{72}$$

Odtud je lehko vidět, že (72) lze obdržet tím způsobem, aplikujeme-li formálně Laplaceovu transformaci na (51), tj. jako kdyby vektor x byl vektorem spojitých funkcí s první derivací, pro který je $x(0) = c$. Tento formalismus v použití Laplaceovy transformace je jistě vítanou pomůckou při řešení konkrétních případů.

Věnujme nyní několik slov otázce, kterou jsme obecně nerozbírali, tj. jak možno stanovit distribuci x, je-li znám její obraz $\mathscr{L}(x)$. Jak známo, pro funkce je tento problém řešen jistým integrálem (inversní integrál). Pro distribuce lze rovněž odvodit podobnou inversní transformaci (viz [4]), avšak pro naše účely to nemá valné ceny z důvodů, které budou ihned zřejmé z dalšího. Jak víme, každá laplaceovská distribuce je derivací nějakého řádu nějaké vytvořující funkce. To znamená, že pro dostatečně velké k bude $p^{-k}\mathscr{L}(x)$ obrazem spojité funkce. Redukuje se tedy otázka stanovení distribuce na stanovení originálu k danému obrazu, tedy na problémy povšechně známé. Poněvadž v praktických případech běží většinou o distribuce (τ)-standardní, můžeme pak hledanou distribuci snadno vyjádřit pomocí $\delta_T^{(\mu)}$ a funkce způsobem, který byl rozebrán u rovnice (18) a (19).

Uveďme si pro větší názornost jednoduché příklady!

Máme stanovit distribuci x, pro kterou

1. $$\mathscr{L}(x) = \frac{p^3(2 - e^{-p}) + p^2e^{-2p} + 4\pi^2e^{-p}p + 4\pi^2e^{-2p}}{p(p^2 + 4\pi^2)} .$$

Zřejmě $\frac{1}{p} \mathscr{L}(x)$ je obrazem funkce; rozkladem totiž plyne

$$\frac{1}{p} \mathscr{L}(x) = \frac{2p}{p^2 + 4\pi^2} (1 - e^{-p}) + \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p^2} , \tag{73}$$

takže funkce
$$\begin{aligned} X(t) &= 2 \cos 2\pi t && \text{pro} \quad t \in (0, 1) , \\ &= 1 && \text{pro} \quad t \in (1, 2) , \\ &= t - 1 && \text{pro} \quad t \in (2, \infty) , \end{aligned}$$

je originálem k $\frac{1}{p}\mathscr{L}(x)$. Bude tedy $x = X'$, takže podle (18) a (19) dostaneme $x = 2\delta_0 - \delta_1 + G$, kde

$$\begin{aligned} G(t) &= -4\pi \sin 2\pi t && \text{pro} \quad t \in (0, 1)\,, \\ &= 0 && \text{pro} \quad t \in (1, 2) \cup (-\infty, 0)\,, \\ &= 1 && \text{pro} \quad t \in (2, \infty)\,. \end{aligned}$$

(Poznamenejme, že podle definice bychom měli volit k tak veliké, aby $\frac{1}{p^k}\mathscr{L}(x)$ byl obrazem spojité funkce; ježto však platí $\mathscr{L}\{f(t)\} = \mathscr{L}(f)$, stačí k zvolit jen tak velké, že $\frac{1}{p^k}\mathscr{L}(x)$ bude obrazem funkce, jak jsme to provedli zde.)

2. $\mathscr{L}(y) =$

$$= \frac{p^6 + p^5 - 3e^{-2p}p^4 + (4 - e^{-2p})p^3 + 5(1 - 2e^{-2p})p^2 - 4(1 + e^{-2p})p + 8e^{-2p}}{p^4 + p^3 + 4p^2 + 4p}\,.$$

Na tomto příkladě ukažme, že lze postupovat i jinak. Rozložíme-li „racionální funkci" $\mathscr{L}(y)$ pokládajíce e^{-2p} za „konstantní", nalezneme

$$\mathscr{L}(y) = p^2 - 3e^{-2p} + \frac{2}{p}e^{-2p} + \frac{p}{p^2 + 4} - \frac{1}{p + 1}\,,$$

takže můžeme ihned psát výsledek

$$y = \delta_0'' - 3\delta_2 + 2H_2 + H_0(\cos 2t - e^{-t})\,.$$

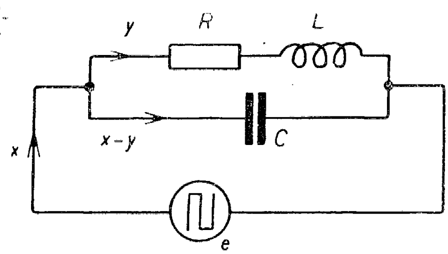
(H_T značí jako obvykle $H_T(t) = 1$ pro $t > T$, $H_T(t) = 0$ pro $t \leqq T$.)

Závěrem článku uveďme si jednoduché příklady na použití teoretických výsledků pro řešení problémů lineárních elektrických obvodů.

Příklad 1. Máme stanovit proud x, tekoucí obvodem z obr. 3, jestliže napětí zdroje e je popsáno rovnicí

$$\begin{aligned} e(t) &= 1 && \text{pro} \quad t \in (2k, 2k + 1)\,, \\ &= 0 && \text{pro} \quad t \in (2k + 1, 2k + 2) \\ & && \text{a} \quad t < 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

(Obdélníkové kmity.) Přitom předpokládáme, že pro $t = 0$ je kondensátor bez náboje a oba proudy x, y, mají stejnou hodnotu I_0.



Obr. 3.

Podle Kirchhoffových zákonů pro uvažovaný obvod platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{C}\int_0^t (x - y)\,d\tau &= e \\ Ry + Ly' &= e\,. \end{aligned} \tag{74}$$

Použijeme-li výše popsaného formalismu, dostaneme transformováním soustavy (74) rovnice

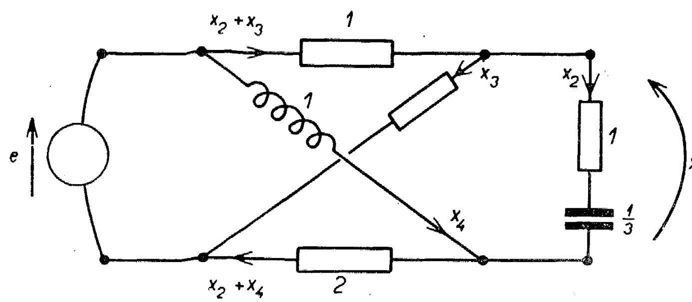
$$\frac{1}{Cp}\left(\mathscr{L}(x) - \mathscr{L}(y)\right) = \mathscr{L}(e)$$

$$R\mathscr{L}(y) + L(p\mathscr{L}(y) - I_0) = \mathscr{L}(e)\,.$$

Řešením této soustávy (podmínka Pl je očividně splněna) dostaneme pro hledaný proud

$$\mathscr{L}(x) = \left(\frac{1}{R + Lp} + pC\right)\mathscr{L}(e) + \frac{I_0 L}{R + Lp}\,. \tag{75}$$

Poněvadž $e = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k H_k$, je $\mathscr{L}(e) = \dfrac{1}{p(1 + e^{-p})}$ (používáme známé



Obr. 4.

věty o obrazu „posunuté" funkce); dosazením do (75) máme

$$\mathscr{L}(x) = \frac{1}{p(R + Lp)} \cdot \frac{1}{(1 + e^{-p})} + \frac{C}{1 + e^{-p}} + \frac{I_0 L}{R + Lp}\,.$$

Označíme-li $\Phi_k = \dfrac{1}{R}\left(1 - \exp\left\{-\dfrac{R}{L}(t - k)\right\}\right)$ pro $t > k$,

$= 0$ pro $t \leqq k$,

pak $\mathscr{L}(\Phi_0) = \dfrac{1}{p(R + Lp)}$, takže můžeme ihned psát výsledek

$$x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\Phi_k + C\delta_k) + I_0 H_0 \exp\left(-\frac{R}{L}t\right).$$

Příklad 2. Naším úkolem je stanovit napětí x_1 na výstupu křížového článku, jehož zapojení je uvedeno na obr. 4, jsou-li na jeho vstup přiváděny napěťové impulsy nultého řádu o „vydatnosti" 5 v časech $t = 0, 1, 2, \ldots$ Počáteční stav je určen následujícími údaji: náboj na kondensátoru je 5, napětí x_1 a proudy x_2, x_3, x_4 mají po řadě hodnoty $c_1 = 5$, $c_2 = -20$, $c_3 = 5$, $c_4 = 30$.

Zjednodušme problém v tom smyslu, že skutečný průběh vstupního napětí nahradíme distribucí $e = 5 \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k$.

Na základě Kirchhoffových zákonů sestavíme pro obvod následující rovnice

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + 3x_3 &= e\,, \\ x_4' + 2(x_2 + x_4) &= e\,, \\ x_1 + 3x_3 - 2(x_2 + x_4) &= 0\,, \\ x_1 + x_2 + 3\int_0^t x_2 \,\mathrm{d}\tau + 5 &= 0\,. \end{aligned} \tag{76}$$

Transformujeme-li formálně (76), dostaneme

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(x_2) + 4\mathscr{L}(x_4) &= \mathscr{L}(e)\,, \\ p\mathscr{L}(x_4) - 30 + 2\mathscr{L}(x_2) + 2\mathscr{L}(x_4) &= \mathscr{L}(e)\,, \\ \mathscr{L}(x_1) - 2\mathscr{L}(\ x_2) + 3\mathscr{L}(x_3) - 2\mathscr{L}(x_4) &= 0\,, \\ \mathscr{L}(x_1) + \mathscr{L}(x_2) + \frac{1}{p}\,\mathscr{L}(x_2) + \frac{5}{p} &= 0\,. \end{aligned} \tag{77}$$

Lehko zjistíme, že (77) má podle $\mathscr{L}(x_i)$, $i = 1, \ldots, 4$ jediné řešení, a je tedy splněna podmínka $P1$. Pro $\mathscr{L}(x_1)$ nalezneme

$$\mathscr{L}(x_1) = \frac{-3p^2 - 7p + 6}{15p^2 + 26p + 24}\,\mathscr{L}(e) + \frac{15(5p + 42)}{15p^2 + 26p + 24}\,. \tag{78}$$

Jak už jsme dříve ukázali, je $\mathscr{L}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k\right) = \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-p}}$, takže

$$\frac{-3p^2 - 7p + 6}{15p^2 + 26p + 24}\,\mathscr{L}(e) = -\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-p}} + \frac{-9p + 54}{15p^2 + 26p + 24} \cdot \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-p}}\,.$$

Označíme-li

$$\begin{aligned} \psi_k &= \exp\left\{-\frac{13}{15}(t - k)\right\}\left\{-\frac{9}{15}\cos\omega(t - k) + \frac{309}{5\sqrt{191}}\sin\omega(t - k)\right\} && \text{pro } t > k \\ &= 0 && \text{pro } t \leqq k, \end{aligned}$$

kde $\omega = \dfrac{\sqrt{191}}{15}$, pak $\mathscr{L}(\psi_0) = \dfrac{-9p + 54}{15p^2 + 26p + 24}$ a ježto v polorovině $\operatorname{Re} p > 0$ je $\dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-p}} = 1 + \mathrm{e}^{-p} + \mathrm{e}^{-2p} + \mathrm{e}^{-3p} + \ldots$, máme ihned pro x_1:

$$x_1 = \sum_{k=0}^{\infty} (-\delta_k + \psi_k) + \varkappa\,,$$

$$\text{kde} \quad \varkappa = \exp\left(-\frac{13}{15}\,t\right)\left\{5\cos\omega t + \frac{565}{\sqrt{191}}\sin\omega t\right\} H_0(t)\,.$$

Nakonec učiňme ještě jednu důležitou poznámku. Námi uvažovaná vektorová rovnice (51) měla jednoduchý tvar v tom smyslu, že hledaný vektor x tam vystupoval nejvýš v první derivaci. To však není na újmu obecnosti. Máme-li totiž dánu obecnější rovnici

$$\sum_{i=-m}^{n} A_i x^{(i)} = f\,, \tag{79}$$

kde $m, n \geqq 1$, A_i jsou reálné matice, $x^{(-k)} = \int_0^t x^{(-k+1)}\, d\tau$; $k = 1, 2, \ldots$; $x^{(0)} = x$ a soubor počátečních podmínek $c_0, c_1, \ldots c_{n-1}$, definujeme její řešení jako vektor x_0 řešení následující soustavy (80): položíme $x^{(i)} = x_i$, i $= -m + 1, -m + 2, \ldots, 0, 1, \ldots n - 1$, takže (79) bude ekvivalentní soustavě

$$\begin{aligned} &\sum_{i=-m+1}^{n-1} A_i x_i + A_n x'_{n-1} + A_{-m} x^{(-1)}_{-m+1} = f \\ &x_{i+1} - x'_i = 0\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n-2 \\ &x_{-k} - x^{(-1)}_{-k+1} = 0\,, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1\,, \end{aligned} \tag{80}$$

přičemž počáteční podmínky $\bar{c}_i$ pro vektory x_i buďte $\bar{c}_i = c_i$ pro $i = 0, 1, \ldots n - 1$, $\bar{c}_i = 0$ pro $i = -1, -2, \ldots, -m + 1$. Soustava (80) zřejmě má tvar (51), pro který pojem řešení již byl definován.

Snadno se lze pak přesvědčit, že výše popsaný formalismus užití Laplaceovy transformace zůstane v platnosti i pro rovnici (79), tj. rovnice pro obrazy hledaných distribucí lze obdržet formálně tak, jako kdyby x byl vektorem funkcí, majících derivace do n-tého řádu včetně. Tedy například obrazy řešení soustavy

$$\begin{gathered} 2x_1''' - 5x_1'' + x_1 - x_2^{(-1)} = \delta_0' \\ 3x_1 - x_2' + 2x_2^{(-3)} = 0 \end{gathered}$$

při počátečních podmínkách $c_1^{(0)}, c_1^{(1)}, c_1^{(2)}, c_2^{(0)}$ (horní index se vztahuje k řádu derivace, dolní k neznámé) budou splňovat rovnice

$$\begin{gathered} 2(p^3 \mathscr{L}(x_1) - p^2 c_1^{(0)} - p c_1^{(1)} - c_1^{(2)}) - 5(p^2 \mathscr{L}(x_1) - p c_1^{(0)} - c_1^{(1)}) + \\ + \mathscr{L}(x_1) + \frac{1}{p} \mathscr{L}(x_2) = p \\ 3\mathscr{L}(x_1) - (p\,\mathscr{L}(x_2) - c_2^{(0)}) + \frac{2}{p^3} \mathscr{L}(x_2) = 0\,. \end{gathered}$$

Z definice řešení rovnice (79) zároveň vyplývá, že řešení (79) má obdobné vlastnosti, jako řešení (51) a tedy není nutno podrobně je rozebírat.

Literatura

[1] *Doležal V.:* O systémech lineárních integrodiferenciálních rovnic; Aplikace matematiky, 1959, 4, No 1, 1—17.

[2] *Гальперин И.*: Введение в теорию обобщенных функций; Изд. иностр. лит., Москва 1954.

[3] *Гельфанд И. М.-Шилов Г. Е.*: Обобщенные функции и действия над ними; Гос. изд. физико-матем. лит., Москва 1958.

[4] *Korevaar J.:* Distributions defined from the point of view of applied mathematics; Proceedings of Nederlandse Akademie van Wettenschappen, Vol. LVIII, 1955, Amsterdam.

[5] *Jarník V.:* Integrální počet II.; NČSAV, Praha 1955.

[6] *Doetsch G.:* Handbuch der Laplace-Transformation I.; Verl. Birkhäuser, Basel 1950.

Резюме

О ПРИМЕНЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ВАЦЛАВ ДОЛЕЖАЛ (Václav Doležal)

(Поступило в редакцию 28/X 1958 г.)

Статья посвящена применению обобщенных функций для расчета линейных динамических систем, как, например, электрических цепей, механических систем и систем автоматического регулирования.

В первой части элементарно излагаются основы теории обобщенных функций; особое внимание уделено обобщенным функциям, для которых можно определить изображение Лапласа.

Во второй части автор занимается существенной проблемой, т. е. системой интегро-дифференциальных уравнений (1), правые части которых являются обобщенными функциями. Такой системой описана динамика любой линейной физической системы с сосредоточенными параметрами. Определено обобщенное решение системы (1) при данном начальном условии, и найдены условия существования и единственности. Затем показана связь между обыкновенным решением (1) и обобщенным решением в случае, когда последнее регулярно. Кроме того, доказано, что обобщенное решение (1) зависит непрерывно от правых частей и что его структура такая же, как структура правых частей.

В следующей части дана подробная физическая оценка полученных теоретических результатов, и указан определенный формализм в применении преобразования Лапласа, упрощающий решение конкретных задач.

В заключение решаются два примера из теории электрических цепей, на которых иллюстрируется применение изложенной теории.

Summary

ON THE USE OF DISTRIBUTIONS IN THE THEORY OF LINEAR DYNAMICAL SYSTEMS

Václav Doležal

(Received October 28th, 1958.)

The paper treats the application of the theory of distributions to the solution of linear dynamical systems, such as electrical networks, mechanical systems and the systems of automatic regulation.

The first part consists of an elementary exposition of the fundaments of distribution theory; and notices in detail those distributions for which a Laplace transform can be defined.

The second part is concerned with the main problem, viz. the system of integro-differential equations (1) with distributions on the right-hand sides. Such systems describe the dynamics of any linear physical system with lumped parameters. First, distributional solution to given initial conditions of the system (1) is defined, and existence and unicity theorems proved. Further, the connection between an ordinary (classical) solution and a regular distributional solution of (1) is established. Finally it is shown that distributional solution depends continuously on the right-hand sides, and that the "structure" of this solution coincides with the structure of the right-hand sides.

These theoretical results are then considered from the point of view of physical interpretations. There is also noted a formal procedure, useful in practice, in applying the Laplace transform.

Finally two examples of electrical networks are solved to illustrate applications of the preceeding theory.