

# Aplikace matematiky

---

František Slepíčka

Berechnung der Potentialströmung für ein ebenes Spalt-Schaufelgitter

*Aplikace matematiky*, Vol. 4 (1959), No. 5, 255 (355)–290 (390)

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102676>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1959

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## BERECHNUNG DER POTENTIALSTRÖMUNG FÜR EIN EBENES SPALT-SCHAUFELGITTER

FRANTIŠEK SLEPIČKA

DT: 621.165-253  
533.1 : 532.5

(Eingegangen am 1. October 1958.)

In dieser Arbeit wird die Berechnung der Potentialströmung für ein ebenes Spalt-Schaufelgitter (mit Schaufeln vernachlässigbarer Dicke) angegeben, ergänzt durch einige numerische Anwendungsbeispiele (Platten-Doppeldecker, Spaltflügel nach Čaplygin, Spalt-Schaufelgitter nach K. Fickert). Die Berechnung wird nach dem Singularitätenverfahren vorgenommen und zur Vereinfachung des Rechenaufwandes werden neue Näherungsformeln zur Ermittlung der induzierten Geschwindigkeit abgeleitet.

### 1. EINLEITUNG

Das Spalt-Schaufelgitter ist der Sonderfall eines Gitters, bei welchem auf konstruktiv einfache Weise eine Beeinflussung der Grenzschicht auf der Schaufeloberfläche erreicht wird. Das Gitter wird von Schaufeln gebildet, welche aus zwei gegeneinander verschobenen selbständigen Teilschaufeln bestehen, derart, dass zwischen den Hinterkanten der vorderen Teilschaufeln und den Vorderkanten der hinteren Teilschaufeln Spalte gebildet sind, durch welche unter der Wirkung der Druckdifferenz zwischen den Über- und Unterdruckseiten der Schaufel ein Teil des Arbeitsmediums hindurchströmt.

Das Prinzip ist an und für sich schon eine Reihe von Jahren bekannt, denn schon in den Zwanzigerjahren benutzten Lachmann und Handley-Page den Spaltflügel als neues Konstruktionselement im Flugzeugbau. In einer Reihe von Arbeiten überwiegend experimentellen Charakters, welche an diesen ersten Versuch anknüpften, wurde bewiesen, dass ein isolierter Spaltflügel ein hervorragendes Mittel zur Erhöhung des Auftriebes von Flugzeugflügeln ist und seine praktische Applikation im Flugzeugbau fand ein weites Anwendungsgebiet.

Erfahrungsgemäss ist es wohlbekannt, dass eine Reihe neuer Erkenntnisse, welche vom Flugzeugbau übernommen wurden, ebenso erfolgreich beim Bau von Schaufelmaschinen zur Anwendung kamen (als eines von vielen Beispielen können wir hier die Tragflügel-Theorie anführen, welche wesentlich zur Er-

höhung des Wirkungsgrades von Axialkompressoren beitrug). Genauso gelangte man auch in diesem Fall, geleitet vom Bestreben nach einer Ausnutzung der günstigen aerodynamischen Eigenschaften von Spaltflügeln zur Konstruktion von Spalt-Schaufelgittern.

Das Problem einer geeigneten Form von Spalt-Schaufelgittern und ihrer praktischen Anwendung in der Konstruktion von Schaufelmaschinen ist vorläufig völlig im Anfangsstadium. In der Literatur gibt es selten Arbeiten, die sich mit diesem Problem beschäftigen und das überwiegend auf experimentelle Weise. (Siehe [11], [25], [33]); in theoretischer Hinsicht wurde bisher der Frage der Spaltgitter nicht die nötige Aufmerksamkeit gewidmet.

Beim gegenwertigen Stand der Grenzschichttheorie kann aber zur erfolgreichen Lösung des Problems der Spalt-Schaufelgitter sehr wesentlich auch seine theoretische Behandlung beitragen. Aus der Analogie mit den üblichen einfachen Schaufelgittern geht hervor, dass die Grundlage für solche theoretische Behandlungen die Umströmung des Gitters für den idealisierten Fall der Potentialströmung einer reibungslosen inkompressiblen Flüssigkeit sein wird.

Die Aufgabe der vorliegenden Arbeit ist es nun eine geeignete Methode zur derartigen theoretischen Berechnung abzuleiten und ihre Anwendung an einigen konkreten Beispielen anschaulich anzuführen.

Das Spalt-Schaufelgitter hat gegenüber den einfachen Gittern eine wesentlich kompliziertere Gestalt, was selbstverständlich zur Folge hat, dass auch die abgeleitete Berechnungsmethode und die eigentliche numerische Auswertung komplizierter sein werden und einen grösseren Arbeitsaufwand erfordern. Zur Erleichterung des Rechenverfahrens beschränken wir uns deshalb auf ein Gitter, das von dünnen (Blech-) Schaufeln gebildet wird.

## 2. METHODEN ZUR BERECHNUNG DER POTENTIALSTRÖMUNG UM EIN SCHAUFELGITTER

Zur Lösung der Aufgabe die Strömung um ein Schaufelgitter zu berechnen ist es grundsätzlich möglich entweder die Methode der konformen Abbildung oder das Singularitätenverfahren heranzuziehen.

Im Wesentlichen kommt es bei der Methode der konformen Abbildung darauf an eine Abbildungsfunktion zu finden, welche die Strömung um ein gegebenes Gitter auf die Strömung um ein Standardprofil oder einen Kreiszyylinder transformiert, dessen Strömungsfeld sich eindeutig bestimmen lässt. Durch inverse Transformation dieses Strömungsfeldes bestimmen wir die gesuchten aerodynamischen Beiwerte für das ursprüngliche Gitter.

Für dünne Schaufelprofile ist es jedoch wesentlich vorteilhafter die zweite mögliche Lösungsart zu benutzen, nämlich das Singularitätenverfahren. Diese

Methode war ursprünglich für die Lösung isolierter Profile von W. BIRNBAUM [6], H. GLAUERT [13], F. RIEGELS [24] und H. J. ALLEN [3] ausgearbeitet worden; später wurde sie jedoch auch auf die Lösung der Schaufelgitter angewandt (siehe A. BETZ [5], M. SCHILHANSL [31], J. ACKERET [2], W. H. ISAY [17], V. LIEBLEIN [21], R. A. SPURR [35] H. J. ALLEN [3], J. POLÁŠEK [23], N. SCHOLZ [29], [30]). Eine sehr eingehende Beschreibung der Lösung, ergänzt durch eine Reihe praktischer Berechnungen und Zahlentafeln, findet man in der Arbeit von H. SCHLICHTING [26].

Bei dieser Art der Berechnung ersetzen wir die einzelnen Schaufeln durch eine Wirbelverteilung (bei Berücksichtigung der Schaufeldicke auch durch Quell-Senkenverteilungen) mit veränderlicher Zirkulationsdichte  $\gamma(s)$ . Die gesuchte Strömung erhalten wir dann durch Superposition eines überlagerten Strömungsfeldes der Translationsgeschwindigkeit  $w_\infty$  und des Feldes der von den Wirbel-

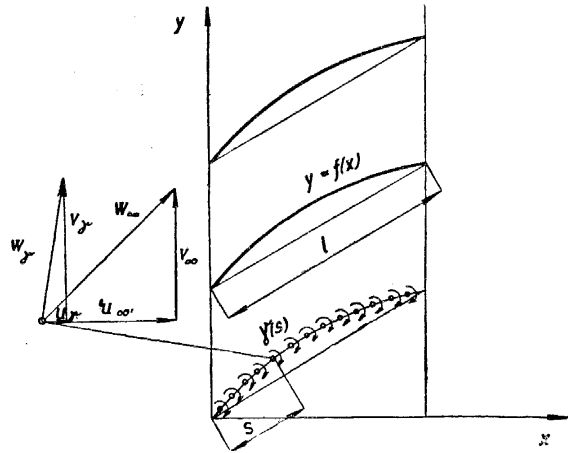


Abb. 1.

fäden induzierten Geschwindigkeiten. Da wir unter dem Begriff Schaufelgitter ein gerades Gitter mit einer unbegrenzten Anzahl von Schaufeln unendlicher Länge verstehen, so hat das resultierende Strömungsfeld des Gitters ebenen Charakter und die Lösung können wir daher für einen beliebigen ebenen Schnitt durchführen, der senkrecht zu den Oberflächengeraden der Schaufeln liegt. Bezeichnen wir nun in einem rechtwinkligen Koordinatensystem des betrachteten ebenen Schnittes (siehe Abb. 1) die Komponenten der Translationsgeschwindigkeit  $u_\infty$  und  $v_\infty$  und analog die Komponenten der induzierten Geschwindigkeiten  $u_\gamma$  und  $v_\gamma$ , so können wir für einen beliebigen Punkt  $x$ ,  $f(x)$  des Profils die kinematische Bedingung

$$y' = \frac{v_\infty + v_\gamma}{u_\infty + u_\gamma} \quad (1)$$

schreiben.

Die kinematische Bedingung drückt die Tatsache aus, dass die Richtung der resultierenden Strömungsgeschwindigkeit in einem beliebigem Punkte auf dem Profil identisch ist mit der Richtung der Profiltangente. Die Beziehung (1) ist nach Einsetzen der Ausdrücke für die Komponenten der induzierten Geschwindigkeit die Bestimmungsgleichung zur Berechnung der Zirkulationsver-

teilung, deren Kenntnis uns die Berechnung aller weiteren aerodynamischen Parameter ermöglicht.

Zur Erleichterung der numerischen Berechnung wurden von den früher genannten Autoren folgende Vereinfachungen eingeführt:

1. Für Profile mässiger Wölbung ( $f/l < 0,15$ ) kann man die Singularitätenverteilung auf die Schaufelsehne statt auf die Schaufeln selbst anbringen. (Siehe z. B. [26], S. 7.) (Für grössere Wölbungen wurde eine Methode ausgearbeitet, welche die Singularitätenverteilung auf Kreisbögen betrachtet, siehe [23].)

2. Die Singularitätenverteilung wird am häufigsten in der Form von Glauert-schen trigonometrischen Reihen mit freien Koeffizienten angesetzt.

3. Zur Vereinfachung des Rechenverfahrens werden gewöhnlich nur drei Glieder der trigonometrischen Reihe betrachtet und die kinematische Bedingung wird für eine gleiche Anzahl von diskreten Punkten (Aufpunkten) auf dem Profil ausgedrückt, deren Lage wir nach dem sogenannten Dreivierteltheorem (siehe H. Schlichting [26], S. 10) wählen.

Ein Vorteil dieses hier kurz beschriebenen Singularitätenverfahrens ist es, dass die allgemeinen Lösungsgrundsätze für eine beliebige geometrische Anordnung des Gitters in Geltung bleiben. Deshalb haben wir dieses Verfahren zur Berechnung der Potentialströmung um ein Spalt-Schaufelgitter gewählt.

### 3. DIE BERECHNUNG DER POTENTIALSTRÖMUNG UM EIN SPALT-SCHAUFELGITTER NACH DEM SINGULARITÄTENVERFAHREN

In Abb. 2 ist schematisch übliche Anordnung eines Spaltgitters aufgezeichnet, dessen Schaufeln aus zwei Teilschaufeln bestehen.

Das Schaufelgitter ist durch folgende geometrische Parameter bestimmt:

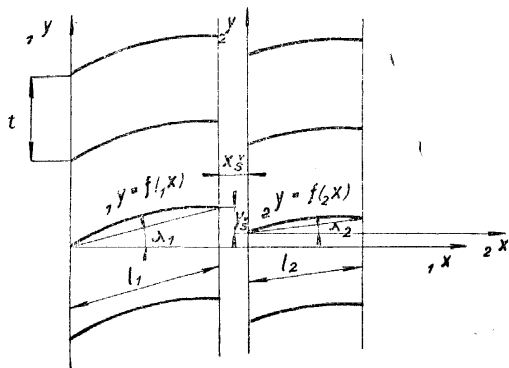


Abb. 2.

Durch die Teilung  $t$ , die Sehnenlängen  $l_1, l_2$ , die Anstellwinkel der Teilschaufel  $\lambda_1, \lambda_2$ , die Spaltparameter  $x_s, y_s$  und durch die Form der Teilschaufeln, welche durch die Gleichungen  ${}_1y = f_1(x), {}_2y = f_2(x)$  definiert werden.

In Übereinstimmung mit dem Singularitätenverfahren ersetzen wir die einzelnen Schaufeln durch Wirbelfäden, deren Zirkulationsverteilung wir bei der vorderen Teilschaufelreihe mit  $\gamma_1$  und bei der hinteren analog mit  $\gamma_2$  bezeichnen. Ähnlich wie im Fall einer

einfachen Schaufel (siehe Absatz 2) werden wir die Zirkulationsverteilung entlang der Sehnen der einzelnen Teilschaufeln voraussetzen. Diese übliche Vereinfachung wird in unserem Fall noch durch folgende Gründe gestützt: Spaltschaufeln lassen sich mit Vorteil nur für Gitter von Kompressorcharakter verwenden, die nur durch eine verhältnismässig kleine Wölbung der Profile gekennzeichnet sind. Durch die Zerlegung auf Teilschaufelreihen wird die Schaufelwölbung noch weiter verringert. Für alle praktischen Fälle von Spaltgittern lässt sich daher die Bedingung erfüllen, dass die maximale verhältnismässige Wölbungshöhe des Profils  $f/l$  kleiner als 0,15 sei.

Für den vorderen Teil des Spaltgitters hat die Glauertsche trigonometrische Reihe der Zirkulationsverteilung die Form

$$\gamma_1(s) = 2u_\infty(A_0 \cotg \frac{1}{2}\varphi + A_1 \sin \varphi + A_2 \sin 2\varphi + \dots) \quad (2)$$

und analog gilt für den hinteren Teil des Spaltgitters

$$\gamma_2(s) = 2u_\infty(B_0 \cotg \frac{1}{2}\psi + B_1 \sin \psi + B_2 \sin 2\psi + \dots), \quad (3)$$

wobei  $u_\infty$  die  $x$ -Komponente der Translationsgeschwindigkeit  $w_\infty$  ist und für die trigonometrischen Veränderlichen  $\varphi$  und  $\psi$  die Beziehungen

$$0 \leq s \leq l_1, \quad s = \frac{1}{2}l_1(1 - \cos \varphi), \quad (4)$$

$$0 \leq s \leq l_2, \quad s = \frac{1}{2}l_2(1 - \cos \psi), \quad (5)$$

gelten.

Die Ausdrücke für die Zirkulationsverteilung enthalten schon implizit die Bedingung des glatten Abflusses von Čaplygin, denn für die Abflusskanten ( $s = l_1$ , resp.  $s = l_2$ ) gilt

$$\gamma_1(l_1) = 0, \quad \gamma_2(l_2) = 0.$$

Zur Ableitung der Ausdrücke für die Komponenten der induzierten Geschwindigkeit benutzen wir die bekannte Beziehung von Biot-Savart. In einem bestimmten Punkt  $z_\mu$  der komplexen Ebene ( $z = x + iy$ ) gilt für die, durch den Wirbel  $\Gamma$ , welcher im Punkte  $z$  angeordnet ist, induzierte Geschwindigkeit  $w_\Gamma$  die Beziehung (siehe Abb. 3)

$$w_\Gamma = u_\Gamma - iw_\Gamma = \frac{i\Gamma}{2\pi(z_\mu - z)}. \quad (6)$$

Wählen wir nun in der Ebene des Spalt-Schaufelgitters einen beliebigen Punkt

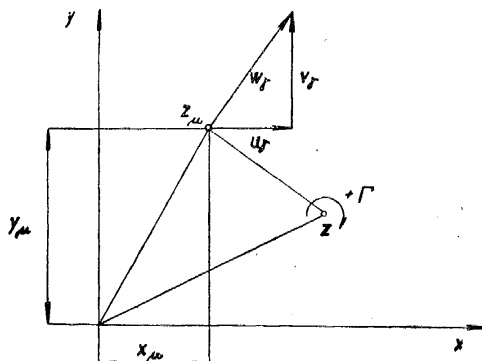


Abb. 3.

$z_\mu$ , (dessen Lage in Bezug auf das Koordinatensystem  ${}_1x; {}_1y$  des vorderen Teilgitters durch die Koordinaten  ${}_1x_\mu, {}_1y_\mu$  und in Bezug auf das verschobene Koordinatensystem  ${}_2x; {}_2y$  des hinteren Teilgitters bezw. durch die Koordinaten  ${}_2x_\mu; {}_2y_\mu$  bestimmt ist).

Mit Benutzung des Ausdruckes (6) können wir die Geschwindigkeit, die in diesem Punkte durch das ganze Spaltgitter induziert wird, durch die Gleichung (7) ausdrücken

$$w_\gamma = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_1} \frac{i\gamma_1(s) ds}{{}_1z_\mu - s \cos \lambda_1 - is \sin \lambda_1 - i\nu t} + \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_2} \frac{i\gamma_2(s) ds}{{}_2z_\mu - s \cos \lambda_2 - is \sin \lambda_2 - i\nu t} \quad (7)$$

Aus der Gleichung (7) ergeben sich dann die Komponenten der induzierten Geschwindigkeit in der Form

$$u_\gamma = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_1} \frac{\gamma_1(s)({}_1y_\mu - s \sin \lambda_1 - \nu t) ds}{({}_1x_\mu - s \cos \lambda_1)^2 + ({}_1y_\mu - s \sin \lambda_1 - \nu t)^2} + \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_2} \frac{\gamma_2(s)({}_2y_\mu - s \sin \lambda_2 - \nu t) ds}{({}_2x_\mu - s \cos \lambda_2)^2 + ({}_2y_\mu - s \sin \lambda_2 - \nu t)^2}, \quad (8)$$

$$v_r = - \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_1} \frac{\gamma_1(s)({}_1x_\mu - s \cos \lambda_1) ds}{({}_1x_\mu - s \cos \lambda_1)^2 + ({}_1y_\mu - s \sin \lambda_1 - \nu t)^2} - \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_2} \frac{\gamma_2(s)({}_2x_\mu - s \cos \lambda_2) ds}{({}_2x_\mu - s \cos \lambda_2)^2 + ({}_2y_\mu - s \sin \lambda_2 - \nu t)^2}. \quad (9)$$

Beschränken wir uns auf 3 Glieder der Glauertschen Entwicklung [Gleichungen (2), (3)], dann können wir die induzierten Geschwindigkeitskomponenten weiter ausdrücken in der Form

$$u_\gamma = u_\infty [A_{0\ 1} J_0 + A_{1\ 1} J_1 + A_{2\ 1} J_2 + B_{0\ 2} J_0 + B_{1\ 2} J_1 + B_{2\ 2} J_2], \quad (10)$$

$$v_\gamma = u_\infty [A_{0\ 1} R_0 + A_{1\ 1} R_1 + A_{2\ 1} R_2 + B_{0\ 2} R_0 + B_{1\ 2} R_1 + B_{2\ 2} R_2]. \quad (11)$$

In den Gleichungen (10), (11) haben wir zwecks Vereinfachung der Ausdrücke die Koeffizienten  $J, R$  eingeführt, welche für den vorderen Teil des Spaltgitters durch die Beziehungen

$${}_1J_0 = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{l_1} \frac{\cotg \frac{1}{2}\varphi({}_1y_\mu - s \sin \lambda_1 - \nu t) ds}{({}_1x_\mu - s \cos \lambda_1)^2 + ({}_1y_\mu - s \sin \lambda_1 - \nu t)^2}, \quad (12)$$

$${}_1R_0 = - \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{l_1} \frac{\operatorname{cotg} \frac{1}{2} \varphi({}_1x_\mu - s \cos \lambda_1) ds}{({}_1x_\mu - s \cos \lambda_1)^2 + ({}_1y_\mu - s \sin \lambda_1 - \nu t)^2}, \quad (13)$$

$${}_1J_1 = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{l_1} \frac{\sin \varphi({}_1y_\mu - s \sin \lambda_1 - \nu t) ds}{({}_1x_\mu - s \cos \lambda_1)^2 + ({}_1y_\mu - s \sin \lambda_1 - \nu t)^2}, \quad (14)$$

$${}_1R_1 = - \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{l_1} \frac{\sin \varphi({}_1x_\mu - s \cos \lambda_1) ds}{({}_1x_\mu - s \cos \lambda_1)^2 + ({}_1y_\mu - s \sin \lambda_1 - \nu t)^2}, \quad (15)$$

$${}_1J_2 = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{l_1} \frac{\sin 2\varphi({}_1y_\mu - s \sin \lambda_1 - \nu t) ds}{({}_1x_\mu - s \cos \lambda_1)^2 + ({}_1y_\mu - s \sin \lambda_1 - \nu t)^2}, \quad (16)$$

$${}_1R_2 = - \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{l_1} \frac{\sin 2\varphi({}_1x_\mu - s \cos \lambda_1) ds}{({}_1x_\mu - s \cos \lambda_1)^2 + ({}_1y_\mu - s \sin \lambda_1 - \nu t)^2}, \quad (17)$$

definiert sind.

(Die Werte  ${}_2J$ ,  ${}_2R$  für das hintere Teilgitter erhalten wir durch blosse Vertauschung der Indizes.)

Die Koeffizienten  $J$ ,  $R$  werden durch die geometrische Anordnung der Schaufeln und durch die Lage des Aufpunktes eindeutig bestimmt; auf ihre numerische Berechnung kommen wir später zurück (siehe Absatz 4).

Zur Bestimmung der freien Koeffizienten  $A$ ,  $B$  in den Gleichungen (10), (11) bzw. (2), (3) benutzen wir die kinematische Bedingung (1), die in so viel Aufpunkten längs der Schaufelsehne erfüllt werden muss, als Unbekannte vorhanden sind. Unter Anwendung von 3 Gliedern der Glauertschen trigonometrischen Reihe (2), (3) wählen wir auf jeder der Sehnen  $l_1$  und  $l_2$  drei Aufpunkte mit den Abständen  $\frac{3}{12}$ ,  $\frac{7}{12}$  und  $\frac{11}{12}$  der Länge der zugehörigen Sehne (gerechnet von der Vorderkante an). (Für zwei Glieder der Glauertschen Reihe liegen gemäss dem Dreivierteltheorem die Aufpunkte in den Entfernungen  $\frac{3}{8}$  und  $\frac{7}{8}$  der Länge der zugehörigen Sehne; für ein einziges Glied genügt ein Aufpunkt in der Entfernung  $\frac{3}{4}$  der Länge der zugehörigen Sehne.)

Durch Einsetzen der Beziehungen (10) und (11) in die kinematische Bedingung (1) und nach entsprechender Umordnung erhalten wir für die freien Koeffizienten  $A$ ,  $B$  (falls wir drei Glieder der Glauertschen trigonometrischen Reihe in Betracht ziehen) das folgende System von 6 inhomogenen linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} & A_0({}_1y'_{\mu 1} J_{0\mu} - {}_1R_{0\mu}) + A_1({}_1y'_{\mu 1} J_{1\mu} - {}_1R_{1\mu}) + A_2({}_1y'_{\mu 1} J_{2\mu} - {}_1R_{2\mu}) + \\ & + B_0({}_1y'_{\mu 2} J_{0\mu} - {}_2R_{0\mu}) + B_1({}_1y'_{\mu 2} J_{1\mu} - {}_2R_{1\mu}) + B_2({}_1y'_{\mu 2} J_{2\mu} - {}_2R_{2\mu}) = K - {}_1y_\mu \end{aligned} \quad (18)$$



für  $\mu = \frac{3}{12}, \frac{7}{12}, \frac{11}{12}$  auf der Sehne der vorderen Teilschaufel,

$$A_0(2y'_\mu J_{0\mu} - {}_1R_{0\mu}) + A_1(2y'_\mu J_{1\mu} - {}_1R_{1\mu}) + A_2(2y'_\mu J_{2\mu} - {}_1R_{2\mu}) + \\ + B_0(2y'_\mu J_{0\mu} - {}_2R_{0\mu}) + B_1(2y'_\mu J_{1\mu} - {}_2R_{1\mu}) + B_2(2y'_\mu J_{2\mu} - {}_2R_{2\mu}) = K - 2y'_\mu \quad (19)$$

für  $\mu = \frac{3}{12}, \frac{7}{12}, \frac{11}{12}$  auf der Sehne der hinteren Teilschaufel.

In den Gleichungen bedeuten  ${}_1y'_\mu$  und  ${}_2y'_\mu$  die Richtungstangenten, welche den gewählten Aufpunkten entsprechen; der Einfachheit halber haben wir gesetzt

$$K = \frac{v_\infty}{u_\infty} = \operatorname{tg} \alpha_\infty. \quad (20)$$

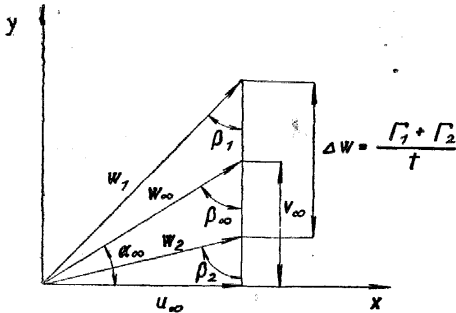


Abb. 4.

Der bisher unbestimmte Parameter  $K$  des Gleichungssystems drückt die Tatsache aus, dass wir zur Berechnung der aerodynamischen Parameter des Gitters ausser den geometrischen Grössen auch eine grundlegende aerodynamische Bedingung kennen müssen. Diese Bedingung erhalten wir entweder direkt durch Wahl des Parameters  $K$  (d. h. durch die Wahl der Richtung der

Translationsgeschwindigkeit) oder durch Berechnung aus den gegebenen Zuströmbedingungen (z. B. für stossfreien Eintritt aus der Bedingung  $A_0 = 0$ ). In der Praxis ist natürlich der Fall am häufigsten, dass wir den Winkel  $\beta_1$  der Zuströmgeschwindigkeit weit vor dem Gitter kennen.

Die Beziehung zwischen dem Parameter  $K$  und dem Zuströmwinkel  $\beta_1$  bestimmen wir auf folgende Weise: Aus dem Geschwindigkeitsdreieck in Abb. 4 ergibt sich die Beziehung

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{u_\infty}{v_\infty + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2t}}, \quad (21)$$

in welcher  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  die Gesamtzirkulation der Schaufeln bedeuten.

Es gilt nun

$$\Gamma_1 = \int_0^{l_1} \gamma_1(s) ds = 2u_\infty \int_0^{l_1} (A_0 \cotg \frac{1}{2}\varphi + A_1 \sin \varphi + \frac{1}{2} A_2 \sin 2\varphi) ds = \\ = u_\infty l_1 \pi (A_0 + \frac{1}{2} A_1), \quad (22)$$

$$\Gamma_2 = \int_0^{l_2} \gamma_2(s) ds = 2u_\infty \int_0^{l_2} (B_0 \cotg \frac{1}{2}\psi + B_1 \sin \psi + B_2 \sin 2\psi) ds = \\ = u_\infty l_2 \pi (B_0 + \frac{1}{2} B_1). \quad (23)$$

Durch Einsetzen von (22) und (23) in (21) und nach entsprechender Umordnung erhalten wir

$$K = \cotg \beta_1 - \frac{\pi l_1}{2t} (A_0 + \frac{1}{2}A_1) - \frac{\pi l_2}{2t} (B_0 + \frac{1}{2}B_1). \quad (24)$$

Unter Benutzung des abgeleiteten Ausdrucks (24) nimmt das System der linearen Gleichungen (18) und (19) die Form an

$$\begin{aligned} A_0 \left( \frac{\pi l_1}{2t} + {}_1y'_\mu {}_1J_{0\mu} - {}_1R_{0\mu} \right) + A_1 \left( \frac{\pi l_1}{4t} + {}_1y'_\mu {}_1J_{1\mu} - {}_1R_{1\mu} \right) + \\ + A_2 ({}_1y'_\mu {}_1J_{2\mu} - {}_1R_{2\mu}) + B_0 \left( \frac{\pi l_2}{2t} + {}_1y'_\mu {}_2J_{0\mu} - {}_2R_{0\mu} \right) + \\ + B_1 \left( \frac{\pi l_2}{4t} + {}_1y'_\mu {}_2J_{1\mu} - {}_2R_{1\mu} \right) + B_2 ({}_1y'_\mu {}_2J_{2\mu} - {}_2R_{2\mu}) = \cotg \beta_1 - {}_1y'_\mu, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} A_0 \left( \frac{\pi l_1}{2t} + {}_2y'_\mu {}_1J_{0\mu} - {}_1R_{0\mu} \right) + A_1 \left( \frac{\pi l_1}{4t} + {}_2y'_\mu {}_1J_{1\mu} - {}_1R_{1\mu} \right) + \\ + A_2 ({}_2y'_\mu {}_1J_{2\mu} - {}_1R_{2\mu}) + B_0 \left( \frac{\pi l_2}{2t} + {}_2y'_\mu {}_2J_{0\mu} - {}_2R_{0\mu} \right) + \\ + B_1 \left( \frac{\pi l_2}{4t} + {}_2y'_\mu {}_2J_{1\mu} - {}_2R_{1\mu} \right) + B_2 ({}_2y'_\mu {}_2J_{2\mu} - {}_2R_{2\mu}) = \cotg \beta_1 - {}_2y'_\mu. \end{aligned} \quad (26)$$

Zur Lösung des Systems der linearen Gleichungen benutzen wir vorteilhaft die Eliminationsmethode von W. E. MILNE, die ausführlich in [22] beschrieben ist.

Aus den berechneten Koeffizienten  $A$ ,  $B$  können wir unmittelbar die folgenden aerodynamischen Beiwerte bestimmen:

Die Gesamtzirkulation der Schaufeln  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  aus den Gleichungen (22) und (23), den Abströmwinkel nach dem Gitter  $\beta_2$  aus der Gleichung

$$\cotg \beta_2 = \cotg \beta_1 - \frac{\pi l_1}{t} (A_0 + \frac{1}{2}A_1) - \frac{\pi l_2}{t} (B_0 + \frac{1}{2}B_1). \quad (27)$$

Weiter ergibt sich die Auftriebszahl des Spalt-Schaufelgitters aus der Gleichung

$$c_A = \frac{A}{\frac{1}{2}\rho l w_\infty^2}, \quad (28)$$

in welcher  $A$  die auf eine Spalt-Schaufel wirkende Auftriebskraft ist,  $l$  ist die Sehne des gemeinsamen Profils, welches wir durch Vereinigung beider Teilprofile zu einem einzigen erhalten.

Die Gleichung (28) können wir weiter auf die Form bringen

$$c_A = 2 \frac{t}{l} (\cotg \beta_1 - \cotg \beta_2) \sin \beta_\infty, \quad (29)$$

in welcher  $\beta_1, \beta_2$  der Zuström- bzw. Abströmwinkel ist und die Grösse  $\sin \beta_\infty$  durch die Gleichungen (30) und (31) bestimmt wird

$$\sin \beta_\infty = \frac{1}{\sqrt{1 + \cotg^2 \beta_\infty}}, \quad (30)$$

$$\cotg \beta_\infty = \frac{\cotg \beta_1 + \cotg \beta_2}{2}. \quad (31)$$

Endlich können wir die erhaltenen Ergebnisse zur Bestimmung der Auftriebszahlen der einzelnen Teilschaufeln benutzen, welche durch die Gleichungen

$${}_1c_A = 2 \frac{t}{l_1} \frac{\cotg \beta_1 - \cotg \beta'_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\cotg \beta_1 + \cotg \beta'_1}{2}\right)^2}}, \quad (32)$$

$${}_2c_A = 2 \frac{t}{l_2} \frac{\cotg \beta'_2 - \cotg \beta_2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\cotg \beta'_2 + \cotg \beta_2}{2}\right)^2}} \quad (33)$$

definiert sind und wobei

$$\cotg \beta'_1 = \cotg \beta_1 - \frac{\pi l_1}{t} (A_0 + \frac{1}{2}A_1), \quad (34)$$

$$\cotg \beta'_2 = \cotg \beta_2 + \frac{\pi l_2}{t} (B_0 + \frac{1}{2}B_1) \quad (35)$$

ist.

Aus dem angedeuteten Vorgang der Berechnung ist ersichtlich, dass das eigentliche Rechenverfahren verhältnismässig einfach ist, wenn wir die Koeffizienten der induzierten Geschwindigkeit kennen, die wir durch die Symbole  $J$  und  $R$  gekennzeichnet haben.

Die Ausdrücke, durch welche diese Koeffizienten definiert sind, sind jedoch komplizierter und der Arbeitsaufwand für ihre numerische Berechnung (und dies auch für den wesentlich einfacheren Fall des üblichen einfachen Gitters, wo  $\gamma_2 = 0$ ) war bisher einer der hauptsächlichsten Nachteile des Singularitätenverfahrens. Zur Beschleunigung der Berechnung des einfachen Gitters wurden deshalb von H. Schlichting für eine ganze Reihe typischer Fälle die Abwindfunktionen für die Bestimmung der induzierten Geschwindigkeiten berechnet und ihre Werte in Gitter-Abwindtafeln tabeliert. (Zur Berechnung der Integrale wurde die Simpsonsche Regel für 21 Punkte der einzelnen Abwindfunktionen verwendet.)

Bei den Spalt-Schaufelgittern ist jedoch der Fall noch komplizierter, weil die Aufpunkte, für welche man die induzierte Geschwindigkeit berechnet, nicht wie beim einfachen Gitter nur auf einer einzigen Profelsehne liegen, sondern in Bezug auf die Nachbar-Schaufelreihe eine allgemeine Lage haben.

Deswegen kann man sich nicht bloss mit den Gitter-Abwindtafeln von H.

Schlichting begnügen, sondern muss für jeden Fall eine ganze Reihe von Koeffizienten (nämlich die Koeffizienten der Geschwindigkeit, die durch das Nachbargitter induziert wird) ganz selbständig berechnen.

Weil die bisherige Rechnungsweise (nach der Simpsonschen Regel) für unseren Zweck ziemlich mühsam ist, zeigt es sich erforderlich neue Näherungsformeln für die Berechnung der Geschwindigkeitskoeffizienten (angedeutet durch die Beziehungen (12) bis (17)) abzuleiten. Diese Formeln müssen derart beschaffen sein, dass sie für die Praxis eine einfache und schnelle Berechnung der Geschwindigkeitskoeffizienten  $J$  und  $R$  mit ausreichender Genauigkeit ermöglichen.

#### 4. NÄHERUNGSFORMELN FÜR DIE BERECHNUNG DER KOEFFIZIENTEN DER INDUZIERTEN GESCHWINDIGKEIT

Wie angeführt, besteht die Hauptschwierigkeit bei der Berechnung der Potentialströmung um ein Spalt-Schaufelgitter darin, dass es nicht einfach ist, die Koeffizienten der induzierten Geschwindigkeit  $J$  und  $R$  numerisch auszudrücken.

Zur Ableitung neuer Formeln für die Berechnung dieser Koeffizienten schreiben wir die Gleichungen (12) bis (17) in einfacherer und neuer Gestalt

$$J_0 = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{\sin \lambda}{\pi} \int_0^l \cotg \frac{1}{2}\varphi \frac{(\alpha - s) ds}{s^2 - 2\omega s + \beta^2}, \quad (36)$$

$$R_0 = - \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{\cos \lambda}{\pi} \int_0^l \cotg \frac{1}{2}\varphi \frac{(\alpha' - s) ds}{s^2 - 2\omega s + \beta^2}, \quad (37)$$

$$J_1 = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{\sin \lambda}{\pi} \int_0^l \sin \varphi \frac{(\alpha - s) ds}{s^2 - 2\omega s + \beta^2}, \quad (38)$$

$$R_1 = - \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{\cos \lambda}{\pi} \int_0^l \sin \varphi \frac{(\alpha' - s) ds}{s^2 - 2\omega s + \beta^2}, \quad (39)$$

$$J_2 = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{\sin \lambda}{\pi} \int_0^l \sin 2\varphi \frac{(\alpha - s) ds}{s^2 - 2\omega s + \beta^2}, \quad (40)$$

$$R_2 = - \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{\cos \lambda}{\pi} \int_0^l \sin 2\varphi \frac{(\alpha' - s) ds}{s^2 - 2\omega s + \beta^2}. \quad (41)$$

In den Ausdrücken (36) bis (41) haben wir die folgende allgemeine Bezeichnungen eingeführt

$$\alpha = \frac{y_\mu - vt}{\sin \lambda} \quad \text{bezw.} \quad \alpha' = \frac{x_\mu}{\cos \lambda}, \quad (42)$$

$$\beta = \sqrt{x_\mu^2 + (y_\mu - vt)^2}, \quad (43)$$

$$\omega = x_\mu \cos \lambda + (y_\mu - vt) \sin \lambda. \quad (44)$$

Die Ableitung der neuen Formeln führen wir für das trigonometrische Glied  $\cotg \frac{1}{2}\varphi$  der Zirkulationsverteilung durch, d. h. für die Koeffizienten  $J_0, R_0$  definiert durch die Ausdrücke (36) und (37), für die anderen Koeffizienten (38) bis (41) wird die Lösung ähnlich sein.

Für ein beliebiges Glied  $j_{0v}$  der Summenreihe (36) gilt

$$j_{0v} = \frac{\sin \lambda}{\pi} \int_0^l \cotg \frac{1}{2}\varphi \frac{(x-s) ds}{s^2 - 2\omega s + \beta^2} \quad (45)$$

und hier ist  $\cotg \frac{1}{2}\varphi$  mit der Veränderlichen  $s$  durch die Transformationsgleichung

$$\cotg \frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{l-s}{s}} \quad (46)$$

verknüpft.

Durch Einsetzen von (46) in (45) erhält die Gleichung für  $j_{0v}$  die Form

$$j_{0v} = \frac{\sin \lambda}{\pi} \int_0^l \sqrt{\frac{l-s}{s}} \frac{(x-s) ds}{s^2 - 2\omega s + \beta^2}. \quad (47)$$

Mittels der Substitution  $z = \sqrt{\frac{l-s}{s}}$  wird die zu integrierende Funktion in eine rationale gebrochene Funktion übergeführt, deren Integral den Wert

$$j_{0v} = \tau \sin \lambda + (y_\mu - vt) \frac{\varrho l}{\beta^2} \quad (48)$$

hat, worin wir der Einfachheit halber folgende Bezeichnungen einführen

$$\vartheta = \sqrt{l^2 - 2\omega l + \beta^2}, \quad (49)$$

$$\tau = 1 - \left(1 + \frac{\vartheta}{\beta}\right) \varrho, \quad (50)$$

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{\vartheta}{\beta} + 1 - \frac{\omega l}{\beta^2}\right)}}. \quad (51)$$

Für ein beliebiges Glied der Summenreihe (37) gilt ganz analog

$$r_{0v} = -\tau \cos \lambda - x_{\mu} \frac{\partial l}{\partial \beta^2}. \quad (52)$$

Die Formeln (48) und (52) liefern die Lösung für eine beliebige geometrische Anordnung mit Ausnahme des Falls, dass der Aufpunkt unmittelbar auf der Sehne jener Schaufel liegt, deren Glieder  $j_{0v}$  und  $r_{0v}$  wir ausdrücken wollen.

In einem solchen Fall hat die zu integrierende Funktion im gegebenen Aufpunkt eine Singularität und die Formeln (48) und (52) nehmen die Form an:

$$j_{0v} = \sin \lambda \pm \cotg \frac{1}{2} \varphi \cos \lambda, \quad (53)$$

$$r_{0v} = -\cos \lambda \pm \cotg \frac{1}{2} \varphi \sin \lambda, \quad (54)$$

in welchen das positive Vorzeichen sich auf die Unterdruckseite und das negative auf die Überdruckseite der Schaufel bezieht.

Zur Erfüllung der kinematischen Bedingung (1) genügt es nur die Mittelwerte der Geschwindigkeit in Betracht zu ziehen und für diesen Fall nehmen die Gleichungen (53) und (54) die einfache Form

$$j_{0v} = \sin \lambda, \quad (55)$$

$$r_{0v} = -\cos \lambda, \quad (56)$$

an.

Mit der Aufstellung der Gleichungen (48), (52) bzw. (55) und (56) haben wir den ersten Teil der Aufgabe erledigt; sie erlauben uns die durch eine beliebige Schaufel induzierten Geschwindigkeitskomponenten genau zu berechnen (d. h. für eine beliebige Zahl  $\nu$ ). Im weiteren Verlauf der Lösung obliegt es uns nun eine Methode ausfindig zu machen, die es gestattet diese Komponenten für alle Werte von  $\nu$  im Intervall  $[-\infty; \infty]$  zu addieren.

Beachten wir in erster Linie die geometrische Bedeutung der Grössen  $\beta$ ,  $\omega$ ,  $\vartheta$ , welche durch die Beziehungen (43), (44) und (49) (siehe Abb. 5) definiert sind.

Wir sehen, dass die Grösse  $\beta$  die Länge der Verbindungslinie des Aufpunktes  $D$  mit der Vorderkante der Schaufel ist und analog ist  $\vartheta$  die Länge seiner Verbindungsgeraden mit der Hinterkante,  $\omega$  ist die Projektion der Länge  $\beta$  auf die Sehne der Schaufel.

Mit wachsender Entfernung der Schaufel vom gewählten Aufpunkt (d. h. für grosse Werte von  $\nu$ ) nehmen die Längen  $\beta$  und  $\vartheta$  grosse Werte an, wobei

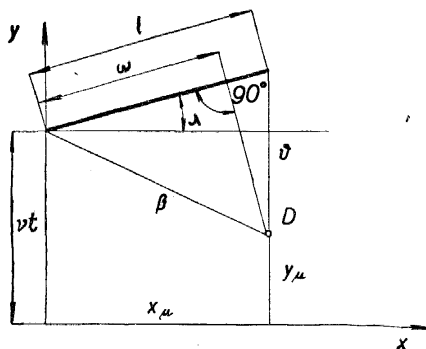


Abb. 5.

die Differenz zwischen ihnen immer kleiner bleibt als die Länge der Schaufelsehne; aus den Gleichungen (48) und (52) ergibt sich dann für diesen Fall unmittelbar, dass der Wert der Koeffizienten der induzierten Geschwindigkeit  $j_{0v}$  und  $r_{0v}$  dann auf eine sehr kleine Grösse absinkt.

Wir führen deshalb keinen bedeutenden Fehler ein, wenn wir zur Ermittlung der Wirkung entfernter Schaufeln statt einer stetigen Verteilung der Wirbel auf der Sehne einen einzigen Wirbel gleicher Zirkulation benutzen, der im Schwerpunkt der Wirbelverteilung angeordnet ist.

Die Gesamtzirkulation eines Wirbelfadens ist durch die Beziehung

$$\Gamma_0 = 2 \int_0^l \cotg \frac{1}{2} \varphi \, ds = \pi l \quad (57)$$

gegeben.

Für die Lage des Schwerpunktes der Wirbelverteilung, (welche bestimmt wird durch die Entfernung  $a_0$  von der Schaufel-Vorderkante) gilt die Beziehung

$$a_0 = \frac{2 \int_0^l \cotg \frac{1}{2} \varphi \, s \, ds}{\Gamma_0} = \frac{1}{4} l. \quad (58)$$

Aus dem Biot-Savartschen Gesetz ergibt sich im betrachteten Fall für die induzierte Geschwindigkeit die Gleichung

$$\dot{j}_{0v} - i r'_{0v} = \frac{1}{2\pi} \frac{i\pi l}{x_\mu + iy_\mu - \frac{1}{4}l \cos \lambda - i\nu t - i\frac{1}{4}l \sin \lambda}. \quad (59)$$

Durch Zerlegung der Beziehung (59) erhalten wir folgende Näherungsformeln für die Berechnung der Glieder  $\dot{j}_{0v}$  und  $r'_{0v}$  (den Umstand, dass es sich um Näherungsformeln handelt, kennzeichnen wir durch einen Strich am betreffenden Symbol).

$$\dot{j}'_{0v} = \frac{1}{2} l \cdot \frac{y_\mu - \nu t - \frac{1}{4}l \sin \lambda}{(x_\mu - \frac{1}{4}l \cos \lambda)^2 + (y_\mu - \nu t - \frac{1}{4}l \sin \lambda)^2}, \quad (60)$$

$$r'_{0v} = -\frac{1}{2} l \frac{x_\mu - \frac{1}{4}l \cos \lambda}{(x_\mu - \frac{1}{4}l \cos \lambda)^2 + (y_\mu - \nu t - \frac{1}{4}l \sin \lambda)^2}. \quad (61)$$

Die Näherungsformeln (60) und (61) verwenden wir jetzt unmittelbar zur unendlichen Summation der Geschwindigkeitskomponenten induziert durch alle Schaufeln des Gitters.

Bekanntlich kann man die Wirkung einer unendlichen Reihe einfacher Wirbel der Zirkulation  $\Gamma_0$  im Punkte  $D_\mu(x_\mu; y_\mu)$  durch die Beziehung

$$w_0 = \frac{i\Gamma_0}{2l} \cotg h \frac{\pi}{t} (z_\mu - z_0) \quad (62)$$

ausdrücken (worin  $z_0 = x_0 + iy_0$  die Lage eines beliebigen Wirbels der Reihe ist).

Demnach können wir die Wirkung des ganzen Schaufelgitters unter der Voraussetzung, dass die Näherungsformeln (60) und (61) im vollen Umfang gelten, durch die Gleichungen

$$J_0^* = - \frac{\pi l}{2t} \frac{\sin \frac{2\pi}{t} (y_\mu - \frac{1}{4}l \sin \lambda)}{\cos \frac{2\pi}{t} (y_\mu - \frac{1}{4}l \sin \lambda) - \text{Cosh} \frac{2\pi}{t} (x_\mu - \frac{1}{4}l \cos \lambda)}, \quad (63)$$

$$R_0^* = \frac{\pi l}{2t} \frac{\text{Sinh} \frac{2\pi}{t} (x_\mu - \frac{1}{4}l \cos \lambda)}{\cos \frac{2\pi}{t} (y_\mu - \frac{1}{4}l \sin \lambda) - \text{Cosh} \frac{2\pi}{t} (x_\mu - \frac{1}{4}l \cos \lambda)} \quad (64)$$

ausdrücken.

Die Gleichungen (63) und (64) geben angenähert die Koeffizienten der induzierten Geschwindigkeit des Schaufelgitters für den Fall, dass der Aufpunkt sich in grosser Entfernung vom Gitter befindet.

Für eine hinreichend genaue Bestimmung der Geschwindigkeitskomponenten in einer beliebigen Lage des Aufpunktes ist es notwendig zu den Hauptgrössen  $J_0^*$  und  $R_0^*$  ein Korrektionsglied einzuführen, welches die Differenz zwischen dem wirklichen Wert der Teilkomponenten der von den Schaufeln in der Nähe des Aufpunktes induzierten Geschwindigkeit und dem angenähertem Ausdruck für sie kompensiert. Auf diese Weise gelangen wir zur endgültigen Darstellung der Formeln für die Berechnung der Koeffizienten der induzierten Geschwindigkeit (symbolisch ausgedrückt durch die Gleichungen (36) und (37)) in der Form

$$J_0 = J_0^* + \sum_{-v}^{+v} (j_{0v} - j'_{0v}), \quad (65)$$

$$R_0 = R_0^* + \sum_{-v}^{+v} (r_{0v} - r'_{0v}). \quad (66)$$

Die Näherungsformeln für die Berechnung der Glieder  $J_1$  und  $R_1$ , welche durch die Gleichungen (38) und (39) definiert sind, haben eine ganz analoge Gestalt

$$J_1 = J_1^* + \sum_{-v}^{+v} (j_{1v} - j'_{1v}), \quad (67)$$

$$R_1 = R_1^* + \sum_{-v}^{+v} (r_{1v} - r'_{1v}), \quad (68)$$

wo sich die genauen Werte der Glieder  $j_{1v}$ ,  $r_{1v}$  aus den Gleichungen ergeben

$$j_{1v} = 4 \frac{\omega}{2} \tau \sin \lambda - 2 \frac{y_\mu - vt}{l} \tau + \sin \lambda (2\varrho - 1), \quad (69)$$

$$r_{1v} = -4 \frac{\omega}{2} \tau \cos \lambda + 2 \frac{x_\mu}{l} \tau - \cos \lambda (2\varrho - 1), \quad (70)$$



und im singularen Fall bestimmen wir die Glieder  $j_{1v}$  und  $r_{1v}$  aus den Gleichungen

$$j_{1v} = -\cos \varphi \sin \lambda, \quad (71)$$

$$r_{1v} = \cos \varphi \cos \lambda. \quad (72)$$

Bei der Ableitung von Näherungsausdrücken für die Glieder  $j'_v$  und  $r'_v$  gehen wir in gleicher Weise wie im ersten Fall vor und die stetige Verteilung der Wirbel auf der Sehne der Schaufel ersetzen wir wiederum durch einen einzigen Wirbel im Schwerpunkt.

Für die Zirkulationsverteilung  $\gamma_1 = 2 \sin \varphi$  ist die Gesamtzirkulation des Fadens bestimmt durch die Beziehung

$$\Gamma_1 = 2 \int_0^l \sin \varphi \, ds = \frac{\pi l}{2}. \quad (73)$$

Die Lage des Schwerpunktes  $a_1$  (Entfernung des Schwerpunktes des Wirbelfadens vom Anfangspunkt der Sehne) ist durch die Gleichung

$$a_1 = \frac{2 \int_0^l \sin \varphi \, s \, ds}{\Gamma_1} = \frac{1}{2} l \quad (74)$$

gegeben.

Aus dem Biot-Savartschen Gesetz folgt

$$j'_{1v} = \frac{1}{4} l \frac{y_\mu - vt - \frac{1}{2} l \sin \lambda}{(x_\mu - \frac{1}{2} l \cos \lambda)^2 + (y_\mu - vt - \frac{1}{2} l \sin \lambda)^2}, \quad (75)$$

$$r'_{1v} = -\frac{1}{4} l \frac{x_\mu - \frac{1}{2} l \cos \lambda}{(x_\mu - \frac{1}{2} l \cos \lambda)^2 + (y_\mu - vt - \frac{1}{2} l \sin \lambda)^2}. \quad (76)$$

Den Hauptwert der Koeffizienten der induzierten Geschwindigkeit bestimmen wir aus den Formeln

$$J_1^* = -\frac{\pi l}{4i} \frac{\sin \frac{2\pi}{t} (y_\mu - \frac{1}{2} l \sin \lambda)}{\cos \frac{2\pi}{t} (y_\mu - \frac{1}{2} l \sin \lambda) - \text{Cosh} \frac{2\pi}{t} (x_\mu - \frac{1}{2} l \cos \lambda)}, \quad (77)$$

$$R_1^* = \frac{\pi l}{4i} \frac{\text{Sinh} \frac{2\pi}{t} (x_\mu - \frac{1}{2} l \cos \lambda)}{\cos \frac{2\pi}{t} (y_\mu - \frac{1}{2} l \sin \lambda) - \text{Cosh} \frac{2\pi}{t} (x_\mu - \frac{1}{2} l \cos \lambda)}. \quad (78)$$

Bei den Gliedern  $J_2$  und  $R_2$ , welche durch die Beziehungen (40) und (41) definiert sind hat die Gesamtzirkulation des Wirbelfadens den Wert  $\Gamma_2 =$

$= 2 \int \sin 2\varphi \, ds = 0$  und die Glieder  $j'_{2\nu}$ ,  $r'_{2\nu}$ ,  $J_2^*$  und  $R_2^*$  haben deshalb ebenfalls den Wert Null und die Näherungsformel nimmt die Form

$$J_2 = \sum_{-\nu}^{+\nu} j_{2\nu}, \quad (79)$$

$$R_2 = \sum_{-\nu}^{+\nu} r_{2\nu} \quad (80)$$

an, wobei

$$j_{2\nu} = 2j_{1\nu} \left( 1 - 4 \frac{\omega}{2} \right) + 8 \frac{\beta^2}{l^2} \tau \sin \lambda + 4 \frac{y_\mu - \nu t}{l} (2\varrho - 1) + \sin \lambda, \quad (81)$$

$$r_{2\nu} = 2r_{1\nu} \left( 1 - 4 \frac{\omega}{2} \right) - 8 \frac{\beta^2}{l^2} \tau \cos \lambda - 4 \frac{x_\mu}{l} (2\varrho - 1) - \cos \lambda \quad (82)$$

ist; im singularen Fall bestimmen wir die Glieder aus den einfachen Gleichungen

$$j_{2\nu} = -\cos 2\varphi \sin \lambda, \quad (83)$$

$$r_{2\nu} = \cos 2\varphi \cos \lambda. \quad (84)$$

Die abgeleiteten Näherungsformeln gestatten (im Vergleich mit der bisherigen angenäherten Integration der einzelnen Funktionen unter Benutzung der Simpsonschen Regel) eine einfachere und damit auch raschere Berechnung der Koeffizienten der induzierten Geschwindigkeit. Die Anzahl der Korrektionsglieder, die zur Erzielung einer guten Genauigkeit in Betracht gezogen werden muss, hängt vom Teilungsverhältnis  $t/l$  ab. Nach (34) ist für  $t/l > 1$  die Berechnung der Korrektionsglieder bis zu den Werten  $\nu = \pm 4$  völlig ausreichend. (Die schnelle Konvergenz der Näherungsformeln hat ihren Grund darin, dass die Näherungsausdrücke für  $j'_\nu$  und  $r'_\nu$  sehr gut die Schaufelwirkung zum Ausdruck bringen).

Die Koeffizienten der induzierten Geschwindigkeit sind Hauptgrößen die zur Berechnung der Potentialströmung um ein Schaufelgitter mittels des Singularitätenverfahrens erforderlich sind. Die neuen Näherungsformeln (auch wenn selbstverständlich nicht behauptet werden kann, dass sie die beste Lösung dieser Aufgabe darstellen) erleichtern die Berechnung bedeutend und gewähren so die Möglichkeit kompliziertere Fälle von Potentialströmungen zu behandeln wie ein solcher eben beim Spalt-Schaukelgitter vorliegt.

## 5. PRAKTISCHE BEISPIELE VON ANWENDUNGEN DER ANGEgebenEN RECHENMETHODE

Um die bisherigen Auseinandersetzungen zu vervollständigen und anschaulich zu machen führen wir einige Beispiele von Anwendungen der angegebenen Methode an. Zunächst einmal einige einfachere aus der Literatur entnommene

Beispiele für welche die exakte Lösung bekannt ist, um gleichzeitig eine Vorstellung über die erreichbare Genauigkeit der Resultate zu erlangen; das Hauptaugenmerk wenden wir dann der Berechnung der Potentialströmung um ein Spalt-Schaufelgitter zu.

## 5.1 DIE BERECHNUNG DER POTENTIALSTRÖMUNG UM EINEN DOPPELDECKER

Nach der Analogie zwischen einem einfachen isolierten Profil und einem einfachen Gitter können wir den Doppeldecker als Extremfall eines Spalt-Schaufelgitters für  $t/l \rightarrow \infty$  auffassen.

Die Theorie des Doppeldeckers ist (mit Rücksicht auf die wichtige praktische Anwendung) verhältnismässig umfangreich und mit ihrer Ausarbeitung hat sich eine Reihe von Autoren befasst (siehe z. B. E. CARAFOLI [7], S. A. ČAPLYGIN [8], S. 233—260, H. GLAUERT [13], S. 152—160, R. GRAMMEL [15], S. 84—93).

Nach den zitierten Arbeiten ist die genaue theoretische Berechnung des Doppeldeckers nur für Tragflächen in Gestalt von Platten in Tandemanordnung oder für übereinander angeordnete Tragflächen bekannt.

a) Doppeldecker in Tandemanordnung. (Siehe Abb. 6.)

Für die Zirkulationsverteilung werden wir nur die einfachere Form eines Binoms zu Grunde legen

$$\gamma_1(s) = A_0 \cotg \frac{1}{2}\varphi + A_1 \sin \varphi, \quad (85)$$

$$\gamma_2(s) = B_0 \cotg \frac{1}{2}\psi + B_1 \sin \psi. \quad (86)$$

Die allgemeinen Gleichungen (18), (19) für die Berechnung der unbekanntenen Grössen  $A, B$  in den Ausdrücken (85), (86) nehmen die gemeinsame Form

$$-A_0 {}_1R_{0\mu} - A_1 {}_1R_{1\mu} - B_0 {}_2R_{0\mu} - B_1 {}_2R_{1\mu} = K \quad (87)$$

an, wenn wir erwägen, dass für unseren Fall  ${}_1y'_\mu = 0, {}_2y'_\mu = 0$  gilt.

Die Gleichung (87) muss in den Aufpunkten  $\frac{3}{8}$  und  $\frac{7}{8}$  der Tiefe beider Platten erfüllt werden.

Nach der Berechnung der Komponenten der induzierten Geschwindigkeit  ${}_1R_{0\mu}, {}_1R_{1\mu}, {}_2R_{0\mu}, {}_2R_{1\mu}$  für die oben angeführten Aufpunkte und dem Einsetzen dieser Grössen in den Ausdruck (87) bekommen wir ein System von vier linearen Gleichungen für die gesuchten freien Koeffizienten  $A_0, A_1, B_0, B_1$ .

Kennen wir diese Grössen, dann können wir auch den Gesamtauftrieb  $A$  des Doppeldeckers aus der Gleichung

$$A = \rho u_\infty w_\infty l_1 \pi (A_0 + \frac{1}{2}A_1) + \rho u_\infty w_\infty l_2 \pi (B_0 + \frac{1}{2}B_1) \quad (88)$$

bestimmen.

Für die Auftriebskraft einer Vergleichplatte, welche durch Zusammenlegen beider Platten des Doppeldeckers entstanden ist, gilt

$$\bar{A} = \rho u_\infty w_\infty (l_1 + l_2) \pi K, \quad (89)$$

woraus folgt

$$\frac{A}{\bar{A}} = \frac{(A_0 + \frac{1}{2}A_1) l_1 + (B_0 + \frac{1}{2}B_1) l_2}{(l_1 + l_2) K}. \quad (90)$$

Bestimmung der Koeffizienten der induzierten Geschwindigkeit:

Für die erste Platte ergibt sich aus den Gleichungen (56), (83) unmittelbar

$$\begin{aligned} {}_1R_{03/8} &= -1, & {}_1R_{13/8} &= 0,25, \\ {}_1R_{07/8} &= -1, & {}_1R_{17/8} &= -0,75 \end{aligned}$$

und analog finden wir für die zweite Platte

$$\begin{aligned} {}_2R_{03/8} &= -1, & {}_2R_{13/8} &= 0,25, \\ {}_2R_{07/8} &= -1, & {}_2R_{17/8} &= -0,75. \end{aligned}$$

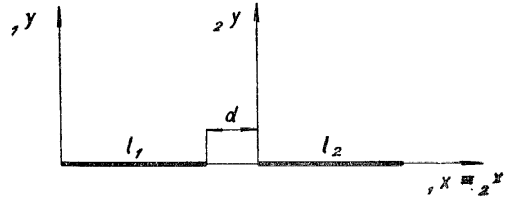


Abb. 6.

Zur Bestimmung der übrigen Koeffizienten der induzierten Geschwindigkeit, welche die Wechselwirkung zwischen den beiden Platten ausdrücken, verwenden wir die Beziehungen (52), (70).

Mit Rücksicht auf die einfache geometrische Anordnung können wir den Gleichungen (52), (70) die Form geben

$$R_{0\mu} = -1 + \sqrt{1 - \frac{l}{x_\mu}}, \quad (91)$$

$$R_{1\mu} = -2 \frac{x_\mu}{l} + 1 + 2 \frac{\frac{x_\mu}{l} - 1}{\sqrt{1 - \frac{l}{x_\mu}}}. \quad (92)$$

Nach dem angedeuteten Verfahren wurde die numerische Berechnung für zwei geometrische Anordnungen des Doppeldeckers mit diesem Resultat durchgeführt:

1.  $l_1 = l_2 = l, \quad d = l,$

$$A_0 = 1,2193K, \quad A_1 = 0,0760K, \quad B_0 = 0,7130K, \quad B_1 = 0,0592K.$$

Das Auftriebsverhältnis hat für diesen Fall den Wert

$$\frac{A}{\bar{A}} = \frac{1,2193 + 0,0380 + 0,7130 + 0,0296}{2} = 1.$$

2.  $l_1 = l_2 = l, \quad d = \frac{1}{2}l,$

$$A_0 = 1,2767K, \quad A_1 = 0,1497K, \quad B_0 = 0,5941K, \quad B_1 = 0,1069K,$$

$$\frac{A}{\bar{A}} = \frac{1,2767 + 0,07485 + 0,5941 + 0,05345}{2} = 0,99955.$$

Aus der exakten Lösung für den Doppeldecker in Tandemanordnung, erhalten nach der Methode der konformen Abbildung, ergibt sich, dass der gesammte Auftrieb des Doppeldeckers gleich ist dem Auftrieb einer einfachen Platte deren Tiefe ebenso gross ist wie die Summe der Tiefen beider Tragflächen des Doppeldeckers oder gemäss unserer Beziehung  $\frac{A}{\bar{A}} = 1$ .

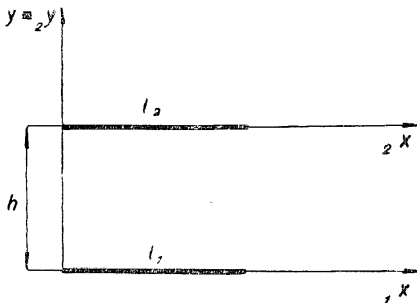


Abb. 7.

Aus dem Beispiel ersehen wir, dass trotz bedeutender Vereinfachung die neue Berechnungsmethode ein Resultat liefert, das praktisch mit dem nach der exakten Methode erhaltenem übereinstimmt.

b) Der Doppeldecker mit übereinander angeordneten Tragflächen.

Als weiteres Beispiel führen wir die Lösung für einen Doppeldecker an, dessen Anordnung schematisch auf Abb. 7 wiedergegeben ist.

Die theoretische Lösung, welcher die Methode der konformen Abbildung zugrunde liegt, ist aus der Literatur bekannt (siehe E. CARAFOLI [7], S. 191, H. GLAUERT [13], S. 156, R. GRAMMEL [15], S. 88), woraus sich das im folgenden angeführte Resultat ergibt, das für den Fall gilt, dass beide Platten gleich sind, d. h.  $l_1 = l_2 = l$ .

Bezeichnen wir mit dem Symbol  $\bar{c}_A$  die Auftriebszahl einer Platte, deren Flächeninhalt gleich ist der Summe der Flächeninhalte des Doppeldeckers bei gleichen Anstellwinkel, dann bestimmen wir die Auftriebszahl  $c_A$  des Doppeldeckers aus der Beziehung

$$c_A = \bar{c}_A \cdot B. \quad (93)$$

Für kleine Anstellwinkel gilt weiter die Bedingung

$$\alpha = \bar{\alpha} + \beta c_A, \quad (94)$$

wobei

$$\beta = \frac{1 - B}{2\pi B} \quad (95)$$

gesetzt ist.

In der Gleichung (94) bedeutet  $\alpha$  einen solchen Anstellwinkel, für welchen der Doppeldecker den gleichen Auftrieb besitzt wie eine isolierte Platte, welche mit der Strömung den Anstellwinkel  $\bar{\alpha}$  bildet.

Der Koeffizient  $B$  in den Gleichungen (93) und (95) ist definiert (siehe [13], S. 156) durch die Beziehung

$$B = \frac{\sqrt{(p^2 - m^2)(m^2 - q^2)}}{m \cdot l}$$

und zu seiner Berechnung für eine gegebene Länge  $l$  und Entfernung  $h$  der Platten muss man folgende Beziehungen benutzen

$$h = 2p \left[ E' - \frac{p^2 - m^2}{p^2} K' \right], \quad l = 2p \left[ E(k, \tau) - \frac{m^2}{p^2} F(k, \tau) \right],$$

$$\tau = \sqrt{\frac{p^2 - m^2}{p^2 - q^2}}, \quad k' = \frac{q}{p}, \quad k = \sqrt{\frac{p^2 - q^2}{p^2}},$$

$$E' = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k'^2 x^2}{1 - x^2}} dx, \quad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k'^2 x^2)}},$$

$$E(k, \tau) = \int_0^\tau \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} dx, \quad F(k, \tau) = \int_0^\tau \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}.$$

Die Berechnung ist verhältnismässig kompliziert, denn die zur Bestimmung des Koeffizienten  $B$  notwendigen Werte sind in den Gleichungen implizite enthalten. Bei der Berechnung ist es deshalb notwendig so vorzugehen, dass wir einen Modul  $k$  wählen, dann den ihm entsprechenden Modul  $k'$  bestimmen die Werte der elliptischen Integrale berechnen und endlich die Werte der geometrischen Parameter  $h$  und  $l$ . Den Modul  $k$  ändern wir solange, bis sich Übereinstimmung mit den gegebenen Werten  $h$  und  $l$  ergibt.

In der Literatur ist die numerische Lösung für einige Lagen der Platten angegeben ([13], S. 157, Tab. 17) und das Resultat ist in der beigefügten Tabelle 1 angeführt.

Tabelle 1.

$h/l$	$B$	$\beta$	$\beta'$
0,50	0,730	0,059	0,159
0,75	0,800	0,039	0,071
1,00	0,855	0,027	0,040
1,25	0,895	0,019	0,026
1,50	0,920	0,014	0,018

In der Tabelle ist auch der Wert des Koeffizienten  $\beta$  angegeben (mit  $\beta'$  bezeichnet), zu dem H. Glauert durch eine Näherungslösung gelangte (siehe S. 158—160, Tab. 18).

Führen wir nun die Berechnung nach unserer Methode durch: Ebenso wie beim Doppeldecker in Tandemanordnung setzen wir die Zirkulationsverteilung auf den Platten in der Form (85) bzw. (86) voraus.

Die Gleichungen für die Berechnung der freien Koeffizienten der Zirkulationsverteilung haben für den gegebenen Fall die Form

I. Platte:

$$\begin{aligned} A_0 - 0,25A_1 - {}_2R_{0\ 3/8} B_0 - {}_2R_{1\ 3/8} B_1 &= K, \\ A_0 + 0,75A_1 - {}_1R_{0\ 7/8} B_0 - {}_2R_{17/8} B_1 &= K; \end{aligned} \quad (96)$$

II. Platte:

$$\begin{aligned} - {}_1R_{0\ 3/8} A_0 - {}_1R_{1\ 3/8} A_1 + B_0 - 0,25B_1 &= K, \\ - {}_1R_{0\ 7/8} A_0 - {}_1R_{1\ 7/8} A_1 + B_0 + 0,75B_1 &= K. \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen gilt

$$\begin{aligned} {}_1R_{0\ 3/8} &= {}_2R_{0\ 3/8}, & {}_1R_{1\ 3/8} &= {}_2R_{1\ 3/8} \\ {}_1R_{0\ 7/8} &= {}_2R_{0\ 7/8}, & {}_1R_{1\ 7/8} &= {}_2R_{1\ 7/8} \end{aligned} \quad (97)$$

(Zur Berechnung der Koeffizienten der induzierten Geschwindigkeit benutzen wir die Beziehungen (52) und (70).)

Aus den Gleichungen (96) und (97) folgt

$$A_0 = B_0, \quad A_1 = B_1. \quad (98)$$

Das System (96) nimmt damit die einfachere Form

$$\begin{aligned} A_0(1 - R_{0\ 3/8}) - A_1(R_{1\ 3/8} + 0,25) &= K, \\ A_0(1 - R_{0\ 7/8}) - A_1(R_{1\ 7/8} - 0,75) &= K \end{aligned} \quad (99)$$

an.

Durch seine Auflösung bestimmen wir die Werte von  $A_0$ ;  $A_1$ ; für den gesuchten Auftriebskoeffizienten  $B$  gilt schliesslich die Beziehung

$$B = \frac{A_0 + \frac{1}{2}A_1}{K}. \quad (100)$$

Nach dem angedeuteten Verfahren wurde die Berechnung des Doppeldeckers durchgeführt und zwar für die gleichen Plattenlagen wie sie in Tabelle 1 angeführt wurden und die Ergebnisse wurden in Tabelle 2 zusammengefasst.

Tabelle 2.

$h/l$	$B$	$\beta$
0,50	0,726	0,060
0,75	0,798	0,040
1,00	0,852	0,027
1,25	0,889	0,020
1,50	0,915	0,015

Aus dem Vergleich beider Tabellen geht hervor, dass die neue Rechenmethode sehr gute Resultate liefert (wesentlich bessere als nach dem Glauert'schen Näherungsverfahren).

## 5.2 DER SPALTFLÜGEL NACH ČAPLYGIN

Mit der Frage des Spaltflügels beschäftigte sich auch in seinen Arbeiten S. A. ČAPLYGIN [8], S. 233—260.

Eine geeignete Transformation bei Anwendung der Methode der konformen Abbildung ermöglichte es dem zitierten Autor die Umströmung des aus einigen Kreisbögen zusammengesetzten Spaltflügels zu lösen, wobei alle Kreisbögen auf einem gemeinsamen Kreis liegen. Das Resultat der Berechnung gibt eine Formel, welche das Verhältnis des Auftriebes eines so gebildeten Spaltflügels zu jenem eines einfachen Flügels angibt, der von einem einzigen Kreisbogen gebildet wird (vom gleichen Halbmesser und dessen Länge gleich ist der Summen der einzelnen Bogenlängen des Spaltflügels und für den gleichen Anstellwinkel).

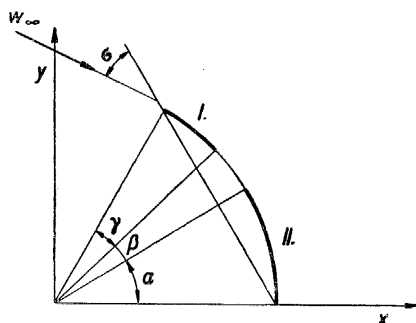


Abb. 8.

Für einen Spaltflügel, der von zwei Kreisbögen gebildet wird (siehe Abb. 8) hat die abgeleitete Formel die Form

$$\kappa = \frac{A}{\bar{A}} = \frac{\sin(\frac{1}{2}\beta + 2q)}{\sin 2q} + \sin \frac{1}{2}\beta \frac{\sin(2q' - q - \sigma)}{\sin 2q \sin(\sigma + q)},$$

wo  $q = \frac{\alpha + \gamma}{4}$ ,  $q' = \frac{\alpha - \gamma}{4}$ ,  $\sigma \dots$  den Anstellwinkel,

$A \dots$  den Auftrieb des Spaltflügels,

$\bar{A} \dots$  den Auftrieb des einfachen Flügels, bedeutet.

Entsprechend Abb. 8 bedeutet

$\gamma \dots$  den Zentriwinkel des zugehörigen Bogens des ersten Flügels,

$\beta \dots$  den Winkel, welcher dem Spalt zwischen den Flügeln entspricht,

$\alpha \dots$  den Zentriwinkel des zugehörigen Bogens des zweiten Flügels.

Der Autor löste ein konkretes Beispiel (siehe [8], § 5, S. 244) für die folgende Anordnung

$$\alpha = 24^\circ, \quad \beta = 9^\circ, \quad \gamma = 3^\circ$$

und für die Anstellwinkel

$$\sigma = 0^\circ, \quad 3^\circ 45', \quad 10^\circ.$$



Durch die Berechnung nach der angegebenen Formel gelangt er zu dem Resultat, dass für einen Anstellwinkel von  $\sigma = 0^\circ$  das Auftriebsverhältnis den Wert  $\varkappa = 1,51075$ , für  $\sigma = 3^\circ 45'$  den Wert  $\varkappa = 1,32370$ , für  $\sigma = 10^\circ$  den Wert  $\varkappa = 1,19674$  hat.

Der Spaltflügel nach Čaplygin ist für uns dadurch interessant, dass hier das Problem der Wechselwirkung zwischen gekrümmten Profilen gelöst wird (zum Unterschied von den bisher aus ebenen Platten zusammengesetzten Flügeln).

Ebenso wie in den vorhergehenden Fällen gehen wir von einer Zirkulationsverteilung aus, welche durch die einfache Form des Binoms gemäss Gleichungen (85) und (86) gegeben ist.

Das Gleichungssystem (18) und (19) nimmt folgende Form an:

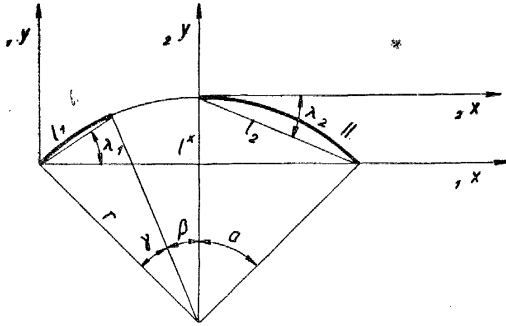


Abb. 9.

I. Flügel:

$$A_0(1y'_\mu 1J_{0\mu} - 1R_{0\mu}) + A_1(1y'_\mu 1J_{1\mu} - 1R_{1\mu}) + \\ + B_0(1y'_\mu 2J_{0\mu} - 2R_{0\mu}) + B_1(1y'_\mu 2J_{1\mu} - 2R_{1\mu}) = K - 1y'_\mu;$$

II. Flügel:

$$A_0(2y'_\mu 1J_{0\mu} - 1R_{0\mu}) + A_1(2y'_\mu 1J_{1\mu} - 1R_{1\mu}) + \\ + B_0(2y'_\mu 2J_{0\mu} - 2R_{0\mu}) + B_1(2y'_\mu 2J_{1\mu} - 2R_{1\mu}) = K - 2y'_\mu \quad (101)$$

für  $\mu = \frac{3}{8}$  und  $\frac{7}{8}$ .

Wählen wir die Orientierung der Koordinatenachsen nach Abb. 9 so gilt

$$K = \operatorname{tg} \sigma, \quad l_1 = 0,05236r, \quad \lambda_1 = 16^\circ 30', \\ l_2 = 0,41582r, \quad \lambda_2 = -6^\circ, \quad (102)$$

$$1y'_{3/8} = 0,3025, \quad 1y'_{7/8} = 0,2742, \\ 2y'_{3/8} = 0,0521, \quad 2y'_{7/8} = -0,1580. \quad (103)$$

Die Koeffizienten der induzierten Geschwindigkeit  $J, R$  berechnet aus den Gleichungen (55), (56), (71), (72) für die singulären Komponenten und aus den Gleichungen (48), (52), (69), (70) für die Komponenten der Wechselwirkung der Flügel haben die Werte:

I. Flügel:

$$1J_{03/8} = 1J_{07/8} = 0,2840, \quad 1R_{03/8} = 1R_{07/8} = -0,9588, \\ 1J_{13/8} = -0,071, \quad 1R_{13/8} = 0,2397, \\ 1J_{17/8} = 0,213, \quad 1R_{17/8} = -0,719, \quad (104)$$

$$\begin{aligned}
{}_2J_{0\ 3/8} &= -0,1060, & {}_2R_{0\ 3/8} &= 0,784, \\
{}_2J_{1\ 3/8} &= -0,0190, & {}_2R_{1\ 3/8} &= 0,2840, \\
{}_2J_{0\ 7/8} &= -0,1053, & {}_2R_{0\ 7/8} &= 0,879, \\
{}_2J_{1\ 7/8} &= -0,015, & {}_2R_{1\ 7/8} &= 0,309.
\end{aligned} \tag{104}$$

II. Flügel:

$$\begin{aligned}
{}_2J_{0\ 3/8} &= {}_2J_{0\ 7/8} = -0,1045, & {}_2R_{0\ 3/8} &= {}_2R_{0\ 7/8} = -0,9945, \\
{}_2J_{1\ 3/8} &= 0,0261, & {}_2R_{1\ 3/8} &= 0,2486, \\
{}_2J_{1\ 7/8} &= -0,0784, & {}_2R_{1\ 7/8} &= -0,743, \\
{}_1J_{0\ 3/8} &= 0,005, & {}_1R_{0\ 3/8} &= -0,075, \\
{}_1J_{1\ 3/8} &= 0,002, & {}_1R_{1\ 3/8} &= -0,038, \\
{}_1J_{0\ 7/8} &= 0,0002, & {}_1R_{0\ 7/8} &= -0,0475, \\
{}_1J_{1\ 7/8} &= 0,0002, & {}_1R_{1\ 7/8} &= -0,0277.
\end{aligned} \tag{105}$$

Durch Einsetzen der berechneten Werte (103), (104) und (105) in die Gleichungen (101) und nach entsprechender Umordnung erhalten wir das System der linearen Gleichungen

$$\begin{aligned}
1,0447A_0 - 0,2612A_1 - 0,8161B_0 - 0,2897B_1 &= K - 0,3025, \\
1,0366A_0 + 0,7774A_1 - 0,9079B_0 - 0,3131B_1 &= K - 0,2742, \\
0,0747A_0 + 0,0379A_1 + B_0 - 0,2500B_1 &= K + 0,0524, \\
0,0475A_0 + 0,0277A_1 + 1,0225B_0 + 0,7670B_1 &= K + 0,2679.
\end{aligned}$$

Aus der Auflösung des Systems ergibt sich

$$\begin{aligned}
A_0 &= 1,6742K - 0,1343, & A_1 &= 0,0958K + 0,0409, \\
B_0 &= 0,8781K + 0,1125, & B_1 &= 0,0262K + 0,2062.
\end{aligned}$$

Weil nach (102)  $K = \operatorname{tg} \sigma$ , erhalten wir für die Anstellwinkel  $\sigma = 0^\circ, 3^\circ 45'$  und  $10^\circ$  diese Endwerte der Zirkulationskoeffizienten

$$\begin{aligned}
\sigma = 0^\circ: & \quad A_0 = -0,1343, \quad A_1 = 0,0409, \\
& \quad B_0 = 0,1125, \quad B_1 = 0,2062; \\
\sigma = 3^\circ 45': & \quad A_0 = -0,0246, \quad A_1 = 0,0472, \\
& \quad B_0 = 0,1700, \quad B_1 = 0,2079; \\
\sigma = 10^\circ: & \quad A_0 = 0,1609, \quad A_1 = 0,0578, \\
& \quad B_0 = 0,2673, \quad B_1 = 0,2108.
\end{aligned} \tag{106}$$

Der Auftrieb des Spaltflügels ist definiert durch die Beziehung

$$A = u_\infty w_\infty \pi [l_1(A_0 + \frac{1}{2}A_1) + l_2(B_0 + \frac{1}{2}B_1)] \tag{107}$$

und seine Zahlenwerte erhalten wir durch Einsetzen der berechneten Koeffizienten (106) und der Beziehungen (102) in (107)

$$\begin{aligned}
\sigma = 0^\circ, & \quad A = 0,0837u_\infty w_\infty \pi r, \\
\sigma = 3^\circ 45', & \quad A = 0,1139u_\infty w_\infty \pi r, \\
\sigma = 10^\circ, & \quad A = 0,1649u_\infty w_\infty \pi r.
\end{aligned} \tag{108}$$

Um einen Vergleich mit den Ergebnissen von Čaplygin durchführen zu können ist es notwendig noch die entsprechenden Auftriebswerte für den einfachen Bogen zu bestimmen, der durch Zusammenlegen beider Bögen des Spaltflügels zu einem einzigen entsteht (in unserem Falle für einen Bogen mit Zentriwinkel  $\alpha + \gamma = 27^\circ$ ). Die Berechnung nach dem Singularitätenverfahren (wenn man zwei Aufpunkte in Betracht zieht) ergibt

$$A_0 = K + 0,0007, \quad A_1 = 0,2365, \quad \text{Sehnenlänge } l = 0,4669r. \quad (109)$$

Der Auftrieb des einfachen Flügels nimmt dann für die einzelnen Anstellwinkel die Werte an

$$\begin{aligned} \sigma = 0^\circ, & \quad \bar{A} = 0,0556u_\infty w_\infty \pi r, \\ \sigma = 3^\circ 45', & \quad \bar{A} = 0,0861u_\infty w_\infty \pi r, \\ \sigma = 10^\circ, & \quad \bar{A} = 0,1379u_\infty w_\infty \pi r. \end{aligned} \quad (110)$$

Das Verhältnis der Auftriebe (nach den Werten (108) und (109)) ist dann

$$\begin{aligned} \sigma = 0^\circ, & \quad \kappa = 1,5054, \\ \sigma = 3^\circ 45', & \quad \kappa = 1,3229, \\ \sigma = 10^\circ, & \quad \kappa = 1,1958. \end{aligned}$$

Drücken wir die Abweichung zwischen unserem Resultat und der Berechnung nach Čaplygin als prozentuellen Fehler aus, so erhalten wir für den Anstellwinkel  $\sigma = 0^\circ$  einen Fehler von etwa 0,4% und für den Anstellwinkel  $\sigma = 3^\circ 45'$  und  $\sigma = 10^\circ$  einen Fehler von ungefähr 0,1%, welches Ergebnis als sehr gut bezeichnet werden kann, wenn wir die Reihe von Vereinfachungen in Betracht ziehen, die wir bei der Berechnung vorgenommen haben.

### 5.3 DIE BERECHNUNG DER POTENTIALSTRÖMUNG UM EIN SPALT-SCHAUFELGITTER

Nach einer Reihe von Berechnungsbeispielen für die Potentialströmung um Platten und Kreisbögen kommen wir zum Kern unseres Problems, welches die Durchrechnung eines numerischen Beispiels der Potentialströmung um ein Spalt-Schaufelgitter ist.

In der Einleitung haben wir einige experimentelle Arbeiten erwähnt, welche dem Problem des Spalt-Schaufelgitters gewidmet waren.

Von diesen Arbeiten ist die verhältnismässig umfangreichste eine Experimentalstudie von K. FICKERT [11]. Der Autor hat vergleichende Messungen an einigen Typen von Spaltgittern durchgeführt. Die besten Ergebnisse wurden dabei mit einem Spaltgitter erhalten das von Blehschaufeln gebildet wurde, welche die Gestalt von kongruenten Kreisbögen hatten (d. h.  $l_1 = l_2$ ; der Zentriwinkel eines Kreisbogens betrug  $27^\circ 30'$ ) bei einer verhältnismässigen Spaltbreite von etwa 4% (bezogen auf die gemeinsame Sehne  $\bar{l}$ ). Dem Autor

zufolge wurde in dieser Anordnung ein etwa um 80% höherer Wert der Auftriebszahl erzielt gegenüber dem Fall des einfachen Gitters ohne Spalt, wobei die Widerstandszahl nur um etwa 20% anstieg.

Da wir für dieses Gitter die hauptsächlichsten experimentellen Daten kennen, welche den bedeutenden Einfluss des Spalts auf die Strömung um das Gitter bestätigen und dann auch aus dem Grunde, dass die Schaufeln von dünnen Blechen gebildet wurden, sodass es nicht notwendig ist den Einfluss der Dicke des Profils zu berücksichtigen, so wählten wir für die numerische Berechnung ein Spaltgitter von einer Form, welche dem optimalen Fall Fickerts nahe kommt.

Abb. 10 zeigt das gewählte Schaufelgitter und die ihm zugrunde liegenden geometrischen Parameter.

Die Schaufeln beider Teilgitter haben eine Form von Kreisbogen mit einem Zentriwinkel von  $30^\circ$  (gegenüber dem Fickertschen Wert von  $27^\circ 30'$ , haben wir zwecks Erleichterung der numerischen Rechnung diese ganz unwesentliche Vereinfachung vorgenommen). Die relative Verschiebung beider Gitter (festgelegt durch die Spaltparameter  $x_s = 0, y_s = 0, l$ ) entspricht ungefähr den Abmessungen des optimalen Spalts des Fickertschen Gitters.

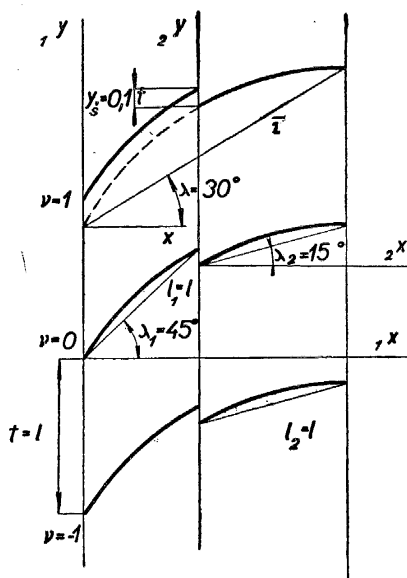


Abb. 10.

Aus der Abbildung ergeben sich folgende zugrunde gelegten geometrischen Parameter, die für die Berechnung benötigt werden

$$\lambda_1 = 45^\circ, \quad \lambda_2 = 15^\circ, \quad l_1 = l_2 = l, \quad t/l = 1.$$

Die Berechnung führen wir so genau durch wie es uns unsere Berechnungsmethode erlaubt.

Das heisst, dass wir die Schaufeln durch eine Zirkulationsverteilung ersetzen, die durch ein Trinom bestimmt wird

$$\gamma_1 = u_\infty (A_0 \cotg \frac{1}{2}\varphi + A_1 \sin \varphi + A_2 \sin 2\varphi), \quad (111)$$

$$\gamma_2 = u_\infty (B_0 \cotg \frac{1}{2}\psi + B_1 \sin \psi + B_2 \sin 2\psi). \quad (112)$$

Die Richtungstangenten in jenen Profilpunkten, welche den zugehörigen Aufpunkten entsprechen, haben die Werte:

I. Teilgitter:

$${}_1y'_{3/12} = 1,301, \quad {}_1y'_{7/12} = 0,917, \quad {}_1y'_{11/12} = 0,638;$$

II. Teilgitter:

(113)

$${}_2y'_{3/12} = 0,413, \quad {}_2y'_{7/12} = 0,222, \quad {}_2y'_{11/12} = 0,045.$$

Die Koeffizienten  $J, R$  der induzierten Geschwindigkeit können wir in zwei Gruppen zerlegen:

die Koeffizienten, welche die Wirkung des eigentlichen Gitters charakterisieren (d. h. jenes Teilgitters auf welchem sich der betreffende Aufpunkt befindet) und die Koeffizienten, welche die Wechselwirkung zwischen beiden Teilgittern kennzeichnen.

Die Koeffizienten der ersten Gruppe können wir in unserem Fall (für die geometrischen Parameter  $\lambda_1 = 45^\circ$ ,  $\lambda_2 = 15^\circ$ ,  $t/l = 1$  und die Lagen der Aufpunkte  $\frac{3}{12}$ ,  $\frac{7}{12}$  und  $\frac{11}{12}$ ) sehr bequem mit Hilfe der Schlichtingschen Gitter-Abwindtafeln [26] bestimmen.

Aus den Schlichtingschen Gitter-Abwindtafeln erhalten wir nach Umrechnung auf die gewählten Koordinatensysteme:

I. Teilgitter:

$$\begin{aligned} {}_1J_{0\ 3/12} &= 0,692, & {}_1J_{1\ 3/12} &= -0,236, & {}_1J_{2\ 3/12} &= 0,246, \\ {}_1R_{0\ 3/12} &= -0,702, & {}_1R_{1\ 3/12} &= 0,513, & {}_1R_{2\ 3/12} &= -0,513, \\ {}_1J_{0\ 7/12} &= 0,559, & {}_1J_{1\ 7/12} &= 0,108, & {}_1J_{2\ 7/12} &= 0,765, \\ {}_1R_{0\ 7/12} &= -1,609, & {}_1R_{1\ 7/12} &= -0,242, & {}_1R_{2\ 7/12} &= -1,161, \\ {}_1J_{0\ 11/12} &= 0,284, & {}_1J_{1\ 11/12} &= 0,414, & {}_1J_{2\ 11/12} &= -0,347, \\ {}_1R_{0\ 11/12} &= -1,566, & {}_1R_{1\ 11/12} &= -0,857, & {}_1R_{2\ 11/12} &= 0,111; \end{aligned}$$

II. Teilgitter:

(114)

$$\begin{aligned} {}_2J_{0\ 3/12} &= 0,250, & {}_2J_{1\ 3/12} &= -0,093, & {}_2J_{2\ 3/12} &= 0,097, \\ {}_2R_{0\ 3/12} &= -0,978, & {}_2R_{1\ 3/12} &= 0,660, & {}_2R_{2\ 3/12} &= -0,653, \\ {}_2J_{0\ 7/12} &= 0,165, & {}_2J_{1\ 7/12} &= 0,030, & {}_2J_{2\ 7/12} &= 0,203, \\ {}_2R_{0\ 7/12} &= -1,438, & {}_2R_{1\ 7/12} &= -0,221, & {}_2R_{2\ 7/12} &= -1,094, \\ {}_2J_{0\ 11/12} &= 0,131, & {}_2J_{1\ 11/12} &= 0,162, & {}_2J_{2\ 11/12} &= -0,120, \\ {}_2R_{0\ 11/12} &= -1,793, & {}_2R_{1\ 11/12} &= -1,087, & {}_2R_{2\ 11/12} &= 0,228. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten der induzierten Geschwindigkeit, welche die Wechselwirkung zwischen beiden Teilgittern kennzeichnen, wurden die Näherungsformeln aus Kapitel 4 verwendet. (Bei der Berechnung wurden die Korrektionsglieder bis zu den Werten  $\nu = \pm 4$  berücksichtigt.)

Auf diese Weise wurden folgende Werte gewonnen:

I. Teilgitter:

$$\begin{aligned}
 {}_2J_{0\ 3/12} &= -0,017, & {}_2J_{1\ 3/12} &= -0,008, & {}_2J_{2\ 3/12} &= -0,017, \\
 {}_2R_{0\ 3/12} &= 1,526, & {}_2R_{1\ 3/12} &= 0,781, & {}_2R_{2\ 3/12} &= -0,009, \\
 {}_2J_{0\ 7/12} &= -0,219, & {}_2J_{1\ 7/12} &= -0,030, & {}_2J_{2\ 7/12} &= -0,036, \\
 {}_2R_{0\ 7/12} &= 1,599, & {}_2R_{1\ 7/12} &= 0,781, & {}_2R_{2\ 7/12} &= 0,003, \\
 {}_2J_{0\ 11/12} &= 0,824, & {}_2J_{1\ 11/12} &= 0,002, & {}_2J_{2\ 11/12} &= 0,040, \\
 {}_2R_{0\ 11/12} &= 3,233, & {}_2R_{1\ 11/12} &= 0,969, & {}_2R_{2\ 11/12} &= 0,240;
 \end{aligned}$$

II. Teilgitter:

(115)

$$\begin{aligned}
 {}_1J_{0\ 3/12} &= 0,025, & {}_1J_{1\ 3/12} &= 0,037, & {}_1J_{2\ 3/12} &= -0,026, \\
 {}_1R_{0\ 3/12} &= -1,583, & {}_1R_{1\ 3/12} &= -0,820, & {}_1R_{2\ 3/12} &= 0,063, \\
 {}_1J_{0\ 7/12} &= 0,003, & {}_1J_{1\ 7/12} &= 0,006, & {}_1J_{2\ 7/12} &= -0,007, \\
 {}_1R_{0\ 7/12} &= -1,578, & {}_1R_{1\ 7/12} &= -0,789, & {}_1R_{2\ 7/12} &= 0,005, \\
 {}_1J_{0\ 11/12} &= 0,001, & {}_1J_{1\ 11/12} &= 0,001, & {}_1J_{2\ 11/12} &= -0,001, \\
 {}_1R_{0\ 11/12} &= -1,575, & {}_1R_{1\ 11/12} &= -0,782, & {}_1R_{2\ 11/12} &= 0,001.
 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der berechneten Werte der Richtungstangenten (113) und der Koeffizienten der induzierten Geschwindigkeiten (114), (115) in die Formeln (25) und (26) und nach entsprechender Umordnung erhalten wir folgendes System linearer Gleichungen für die Berechnung der freien Koeffizienten  $A$ ,  $B$  der Zirkulationsverteilung

$$\begin{aligned}
 3,173A_0 - 0,035A_1 + 0,833A_2 + 0,023B_0 - 0,007B_1 - 0,014B_2 &= \\
 &= \cotg \beta_1 - 1,301, \\
 3,071A_0 + 1,026A_1 + 1,317A_2 - 0,229B_0 - 0,024B_1 - 0,036B_2 &= \\
 &= \cotg \beta_1 - 0,917, \\
 3,318A_0 + 1,906A_1 - 0,332A_2 - 1,136B_0 - 0,183B_1 - 0,214B_2 &= \\
 &= \cotg \beta_1 - 0,638, \\
 3,164A_0 + 1,620A_1 - 0,074A_2 + 2,652B_0 + 0,087B_1 + 0,693B_2 &= \\
 &= \cotg \beta_1 - 0,413, \\
 3,150A_0 + 1,575A_1 - 0,007A_2 + 3,046B_0 + 1,013B_1 + 1,139B_2 &= \\
 &= \cotg \beta_1 - 0,222, \\
 3,146A_0 + 1,567A_1 - 0,001A_2 + 3,370B_0 + 1,879B_1 - 0,234B_2 &= \\
 &= \cotg \beta_1 - 0,045.
 \end{aligned}$$

Durch Auflösen des Gleichungssystems nach der Eliminationsmethode erhalten wir für verschiedene Zuströmwinkel  $\beta_1$  die Werte

$$\begin{aligned}
 \beta_1 = 25^\circ: \quad A_0 &= 0,265, & A_1 &= 0,402, & A_2 &= 0,020, \\
 B_0 &= 0,084, & B_1 &= 0,190, & B_2 &= 0,008;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_1 = 30^\circ: & A_0 = 0,140, \quad A_1 = 0,397, \quad A_2 = 0,001, \\ & B_0 = 0,080, \quad B_1 = 0,190, \quad B_2 = 0,007; \\ \beta_1 = 35^\circ: & A_0 = 0,048, \quad A_1 = 0,394, \quad A_2 = -0,013, \\ & B_0 = 0,077, \quad B_1 = 0,191, \quad B_2 = 0,007; \\ \beta_1 = 40^\circ: & A_0 = -0,024, \quad A_1 = 0,391, \quad A_2 = -0,024, \\ & B_0 = 0,073, \quad B_1 = 0,195, \quad B_2 = 0,009. \end{aligned}$$

Mit der Bestimmung der Koeffizienten der Zirkulation ist der wesentlichste Teil des Problems gelöst. Mit ihrer Hilfe können wir nun die hauptsächlichsten aerodynamischen Beiwerte des gegebenen Gitters bestimmen:

Die Gesamtzirkulation der Schaufeln (Formeln (22), (23)):

$$\begin{aligned} \beta_1 = 25^\circ: & \Gamma_1 = u_\infty l \pi 0,466, \quad \Gamma_2 = u_\infty l \pi 0,179; \\ \beta_1 = 30^\circ: & \Gamma_1 = u_\infty l \pi 0,338, \quad \Gamma_2 = u_\infty l \pi 0,175, \\ \beta_1 = 35^\circ: & \Gamma_1 = u_\infty l \pi 0,245, \quad \Gamma_2 = u_\infty l \pi 0,172; \\ \beta_1 = 40^\circ: & \Gamma_1 = u_\infty l \pi 0,172, \quad \Gamma_2 = u_\infty l \pi 0,170. \end{aligned}$$

Der Abströmwinkel nach dem Gitter, Formel (27):

$$\begin{aligned} \beta_1 = 25^\circ: & \cotg \beta_2 = 0,118, \\ \beta_1 = 30^\circ: & \cotg \beta_2 = 0,120, \\ \beta_1 = 35^\circ: & \cotg \beta_2 = 0,118, \\ \beta_1 = 40^\circ: & \cotg \beta_2 = 0,117. \end{aligned}$$

Die Gesamtauftriebszahl des Spaltgitters, Gleichung (29):

$$\begin{aligned} \beta_1 = 25^\circ: & c_A = 1,389, \\ \beta_1 = 30^\circ: & c_A = 1,224, \\ \beta_1 = 35^\circ: & c_A = 1,073, \\ \beta_1 = 40^\circ: & c_A = 0,931, \end{aligned}$$

Die Auftriebszahlen beider Teilgitter, Gleichungen (32), (33):

$$\begin{aligned} \beta_1 = 25^\circ: & {}_1c_A = 1,690, \quad {}_2c_A = 1,040; \\ \beta_1 = 30^\circ: & {}_1c_A = 1,362, \quad {}_2c_A = 1,020; \\ \beta_1 = 35^\circ: & {}_1c_A = 1,063, \quad {}_2c_A = 1,005; \\ \beta_1 = 40^\circ: & {}_1c_A = 0,794, \quad {}_2c_A = 0,996. \end{aligned}$$

Aus den so gewonnenen Werten geht auf den ersten Blick hervor, dass der Winkel der Abströmgeschwindigkeit von dem Zuströmwinkel praktisch unabhängig ist.

Auch die Auftriebszahl des zweiten Teilgitters  ${}_2c_A$  (und selbstverständlich auch seine Zirkulation) hängen nur sehr geringfügig vom Zuströmwinkel ab; dagegen ist die Veränderung der Auftriebszahl des ersten Teilgitters  ${}_1c_A$  beträchtlich.

Dieses Ergebnis ist auch ganz logisch, wenn wir die Gleichrichterwirkung des ersten Teilgitters bedenken.

Ebenso wie bei den vorigen Beispielen wollen wir nun den Vergleich mit dem einfachen Gitter von in den geometrischen Hauptwerten übereinstimmenden Abmessungen durchführen.

Ein solches Vergleichsgitter erhalten wir in unserem Fall sehr einfach durch blosser Verschiebung beider Teilgitter in eine solche Lage, dass der Spalt verschwindet.

Das Vergleichsgitter hat folgende geometrische Parameter:  $\lambda = 30^\circ$ ,  $\frac{t}{l} = 0,5175$ .

Die Berechnung der aerodynamischen Parameter für das einfache Vergleichsgitter wurde auf analoge Weise durchgeführt wie für Spaltgitter mit diesem Resultat:

$$\begin{aligned} \beta_1 = 25^\circ: \quad \cotg \beta_2 &= 0,117, \quad \bar{c}_A = 1,390; \\ \beta_1 = 30^\circ: \quad \cotg \beta_2 &= 0,111, \quad \bar{c}_A = 1,234; \\ \beta_1 = 35^\circ: \quad \cotg \beta_2 &= 0,117, \quad \bar{c}_A = 1,074; \\ \beta_1 = 40^\circ: \quad \cotg \beta_2 &= 0,117, \quad \bar{c}_A = 0,931. \end{aligned}$$

Vergleichen wir die Ergebnisse der beiden Gitter so sehen wir, dass die Gesamtauftriebszahl des Spaltschaufelgitters wie auch die Auftriebszahl des Vergleichsgitters ungefähr gleich gross sind (die kleine Differenz von etwa 1% für  $\beta_1 = 30^\circ$  kann nicht berücksichtigt werden, wenn wir bedenken, dass beide Lösungen nur Annäherungen sind), was eine gewisse Analogie zum Ergebnis der exakten Berechnung des Doppeldeckers in Tandemanordnung darstellt (siehe Beispiel 5.1).

Diese Feststellung steht aber in einem scheinbaren Widerspruch zu den experimentellen Ergebnissen Fickerts, (welche einen grossen Unterschied zwischen der Funktion beider Gittertypen andeuten) und es ist notwendig diese Tatsache etwas näher zu betrachten.

Bei der Berechnung der Potentialströmung gehen wir von der Čaplygin-Bedingung eines glatten Abflusses aus, nach welcher mit wachsendem Zuströmwinkel auch ständig der Schaufelauftrieb wächst.

Die Wirklichkeit ist aber anders, denn infolge der Viskosität des strömenden Mediums kommt es zur Bildung einer Grenzschicht auf der Oberfläche der Schaufeln und zu ihrem Anwachsen unter Wirkung des Druckgradienten, was unter ungünstigen Bedingungen zum vorzeitigen Abreissen der Strömung von den Schaufeln führt.

In einem solchen Falle kann natürlich nicht der wirkliche Schaufelauftrieb die Werte erreichen, die durch Berechnung der Potentialströmung ermittelt wurden.



Die wesentlich kleineren Werte für die Auftriebszahl des einfachen Gitters (grössenordnungsmässig etwa 0,7) welche K. Fickert in seinen Versuchen feststellte, kann man also durch eine Instabilität der Strömung beim Umfliessen der einfachen Schaufeln erklären. Im Gegenteil bei den Spaltgittern, deren Schaufeln mässigere Wölbung besitzen, kann man durch passende Spaltanordnung die Strömung ohne Abreissen in grösserer Masse erhalten, so dass der wirkliche Auftrieb nahe dem theoretischen Wert liegen wird. Nach dieser Vorstellung macht sich also der günstige Einfluss der Spaltanordnung nur dadurch geltend, dass der durch den Spalt fliessende Strom ein vorzeitiges Abreissen der Grenzschicht von der Schaufeloberfläche verhindert.

Zu demselben Ergebnis sind wir auch durch die experimentelle Untersuchung gelangt [33]. Die Versuche zeigen in überzeugender Weise, dass eine Erhöhung des Grenzwertes des Auftriebs beim Spaltschaufelgitter nur dann eintritt, wenn die Grenzschicht an der Schaufeloberfläche durch die Wirkung des Spalts ausreichend stabilisiert ist. Wurde nämlich zur Stabilisierung der Grenzschicht ein anderes Mittel benutzt (im vorliegenden Fall Konfusorwirkung der Seitenwände des Schaufelgitters) so war die Wirkung der Spaltanordnung des Gitters negativ.

Die Existenz einer Grenzschicht bewirkt natürlich auch ausser Profilverlusten im Zusammenhang mit dem Abreissen des Stromes auch Reibungsverluste. Zur Abschätzung des Verhältnisses zwischen den Reibungsverlusten beider Gitteranordnungen führen wir folgenden einfachen Vergleich durch:

Die Reibungsverluste an der Oberfläche einer umströmten Platte (von der Breite  $b$  und der Länge  $l$ ) werden für den Fall einer turbulenten Grenzschicht ohne Druckgradienten durch die Beziehung

$$W = 0,036 \rho u_{\infty}^2 b l \left( \frac{u_{\infty} l}{\nu} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

gegeben (siehe [27], S. 424).

Aus dieser Gleichung ergibt sich für das Verhältnis zwischen den Reibungsverlusten  $\bar{W}$  einer Platte von der Länge  $2l$  und den Gesamtverlusten  $W$  zweier Platten der halben Länge der Wert

$$\frac{W}{\bar{W}} = \frac{2}{2^{\frac{1}{2}}} = 1,41.$$

Die Reibungsverluste zweier Platten sind also grob genommen um 15% grösser als bei einer einzigen Platte, welche durch Vereinigung beider Einzelplatten entstanden ist.

Bei grober Annäherung (wenn wir den Einfluss des Druckgefälles vernachlässigen) können wir voraussetzen, dass beim Schaufelgitter ähnliche Verhältnisse vorliegen werden. Daraus ergibt sich, dass die Reibungsverluste beim Spalt-Schaufelgitter im Vergleich mit den Verlusten beim einfachen Gitter

höher sein werden (nach Versuchen von Fickert beträgt diese Steigerung etwa 20% was grössenordnungsmässig mit der vorhergehenden Abschätzung übereinstimmt).

Da wir durch die Berechnung der Potentialströmung zur Feststellung gelangt sind, dass ein Spalt-Schauflgitter ungefähr dieselben aerodynamischen Eigenschaften hat wie ein einfaches Gitter von übereinstimmender geometrischer Grundform, so ergibt sich aus der angestellten Betrachtung folgende praktisch wichtige Schlussfolgerung:

Ein Spalt-Schauflgitter kann man mit Vorteil nur bei stark belasteten Gittern von Kompressor-Charakter verwenden.

#### 6. ZUSAMMENFASSUNG (SCHLUSSBEMERKUNG)

In dieser Arbeit wird die Berechnung der Potentialströmung für ein Spalt-Schauflgitter durchgeführt, ergänzt durch einige numerische Anwendungsbeispiele. Die Berechnung wird nach dem Singularitätenverfahren von H. Schlichting vorgenommen, welches zur Berechnung einfacher Gitter angewendet wurde. Zur Vereinfachung des Rechenverfahrens werden Näherungsformeln für die Berechnung der Koeffizienten der induzierten Geschwindigkeit angegeben.

Aus der numerischen Auswertung für ein Spalt-Schauflgitter ergibt sich, dass dieses Gitter theoretisch etwa den gleichen Auftrieb liefert wie ein einfaches Gitter mit übereinstimmender geometrischer Grundform. Für die wirkliche Strömung eines viskosen Mediums weist das Spalt-Schauflgitter grössere Reibungsverluste auf als das einfache Gitter. Die Verwendung von Spaltgittern kann man daher nur für stark belastete Gitter von Kompressor-Charakter empfehlen, bei welchen der Gewinn aus der Erhöhung der Grenze des optimalen Auftriebes (welche dadurch erreicht wird dass die durch den Spalt fliessende Strömung ein vorzeitiges Abreissen der Grenzschicht verhindert) die Verschlechterung überwiegt, welche durch Erhöhung der Reibungsverluste verursacht wird.

#### *Literaturverzeichnis*

- [1] *G. H. Abramowitz*: Прикладная газовая динамика. Госиздат, Москва 1953.
- [2] *J. Ackert*: Zum Entwurf dichtstehender Schauflgitter. Schweiz. Bauzeitung, Bd. 60 (1942).
- [3] *H. J. Allen*: General theory of airfoil sections having arbitrary shape or pressure distribution. NACA, T. R., Nr. 833, Washington 1945.
- [4] *A. Betz*: Die Wirkungsweise von unterteilten Flügelprofilen. Berichte und Abhandlungen d. Wiss. Gesellschaft für Luftfahrt, Bd. 6 (1922).
- [5] *A. Betz*: Diagramme zur Berechnung von Flügelreihen. Ing. Arch., Bd. 2 (1931), str. 359—371.

- [6] *W. Birnbaum*: Die tragende Fläche als Hilfsmittel zur Berechnung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 3 (1923), str. 290—297.
- [7] *E. Carafoli*: Tragflügeltheorie. Berlin 1954.
- [8] *C. A. Чаплыгин*: Избранные труды по механике и математике. Госиздат, Москва 1954.
- [9] *A. E. Doenhoff*: Present status of research on boundary-layer control. Journal of aeronautical sciences 16 (1949), str. 729—740.
- [10] *B. Eckert*: Axialkompressoren und Radialkompressoren. Berlin 1953.
- [11] *K. Fickert*: Versuche an Beschauelungen von Verzögerungsgittern mit grosser Umlenkung. Forschung, Band 16, Heft 5.
- [12] *B. A. Fuks*: Funkce komplexní proměnné. Praha 1953.
- [13] *H. Glauert*: Grundlagen der Tragflügel und Luftschraubentheorie. Berlin 1929.
- [14] *S. Goldstein*: Low-drag and suction airfoils. Journal of the aeronautical sciences, vol. 15, 1948.
- [15] *R. Grammel*: Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges. Braunschweig 1917.
- [16] *Hufton-Joung*: Note of the lift and profil drag effects on split and slotted flaps. Reports and Memoranda, No 2545 (1941).
- [17] *W. H. Isay*: Beitrag zur Potentialströmung durch axiale Schaufelgitter. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 33 (1953), Heft 12.
- [18] *W. H. Isay*: Zur Berechnung der Strömung durch axiale Schaufelgitter. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 37 (1957), Heft 9/10.
- [19] *V. Jarník*: Úvod do počtu integrálního. JČMF 1948.
- [20] *G. V. Lachmann*: Grenzschicht Steuerung zur Vermeidung der Ablösung und zur Erzielung geringen Luftwiderstandes. Flugwelt 8 (1956), Nr. 5.
- [21] *V. Lieblein*: Zur Berechnung der Auftriebscharakteristik eines Profiles im Gitterverband. Ing. Archiv, Bd. 18 (1950), str. 281—290.
- [22] *O. Pokorná*: Schema pro řešení soustav lineárních algebraických rovnic eliminací. Příloha časopisu Aplikace matematiky sv. 2 (1957), č. 3.
- [23] *J. Polásek*: Výpočet obtékání lopatkových mříží z tenkých silně prohnutých profilů. Aplikace matematiky, sv. 3 (1958), č. 5.
- [24] *F. Riegels*: Das Umströmungsproblem bei inkompressiblen Potentialströmungen. Ing. Archiv, Bd. 16 (1948), str. 373—376 a Bd. 17 (1949), str. 94—106.
- [25] *H. E. Sheet*: The slotted-blade axial-flow blower. Transactions of ASME, October 1956.
- [26] *H. Schlichting*: Berechnung der reibungslosen inkompressiblen Strömung für ein vorgegebenes ebenes Schaufelgitter. VDI — Forschungsheft 447, Bd. 21 (1955).
- [27] *Г. Шаухманс*: Теория пограничного слоя. Госиздат, Москва 1956.
- [28] *N. Scholz*: Strömungsuntersuchungen an Schaufelgittern. VDI — Forschungsheft 442, Bd. 20 (1954).
- [29] *N. Scholz*: Berechnung der Druckverteilung der ebenen Platte im Gitterverband. Abhandlung Braunsch. Wiss. Ges., Bd. 5 (1953), str. 152—163.
- [30] *N. Scholz*: Ein einfaches Singularitätenverfahren zur Erzeugung von Schaufelgittern. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 30 (1930).
- [31] *M. Schülhansl*: Näherungsweise Berechnung von Auftrieb und Druckverteilung in Flügelgittern. Jb. 1927 Wiss. Ges. Luftf., str. 151—167.
- [32] *W. Schmeidler*: Integralgleichungen I. Leipzig 1950.
- [33] *F. Slepíčka*: Možnosti použití šterbinových lopatek u rovnolátkých axiálních ventilátorů. Zpráva ÚVS č. 40/56.
- [34] *F. Slepíčka*: Řešení potenciálního obtékání šterbinové lopatkové mříže. Zpráva ÚVS č. 72/58.

- [35] *R. A. Spurr*: A theory of unstaggered airfoil cascades in compressible flow. NACA T. R., Nr. 888, Washington 1947.
- [36] *Степанов*: Построение двухрядных решеток по методу годографа скорости. Прикладная математика и механика, том XVII, 1953.
- [37] *F. Weinig*: Die Strömungsverhältnisse im Felde dünner schwachgewölbter Tragflügelprofile. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 18 (1938), Heft 2.
- [38] *J. Williams*: An analysis of aerodynamic data on blowing over trailing edge flaps for increasing lift. Aeronautic Res. Council Paper 1955, No 209.

## Souhrn

### ŘEŠENÍ POTENCIÁLNÍHO OBTĚKÁNÍ ŠTĚRBINOVÉ LOPATKOVÉ MŘÍŽE

FRANTIŠEK SLEPIČKA

(Došlo dne 1. října 1958.)

V článku je podáno řešení potenciálního obtékání štěrbinové lopatkové mříže (s lopatkami zanedbatelné tloušťky).

Řešení vychází z klasické metody singularit v úpravě H. Schlichtinga a je doplněno novými aproximačními vzorci, usnadňujícími numerický výpočet složek indukované rychlosti. Výklad je doložen několika praktickými příklady řešení potenciálního obtékání izolovaných profilů, pro něž je z literatury známo exaktní řešení (deskový dvouplošník v tandemovém uspořádání a s deskami nad sebou, štěrbinové křídlo Čaplyginovo).

V závěru článku je odvozené výpočtové metody použito k řešení štěrbinové lopatkové mříže (tvaru blízkého optimální štěrbinové lopatkové mříži K. Fickerta), z něhož vyplývá, že při potenciálním obtékání má štěrbinová mříž přibližně stejný součinitel vztlaku jako jednoduchá mříž shodného základního geometrického tvaru.

## Резюме

### РАСЧЕТ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ОБТЕКАНИЯ ЦЕЛЕВОЙ ЛОПАТОЧНОЙ РЕШЕТКИ

ФРАНТИШЕК СЛЕПИЧКА (František Slepíčka)

(Поступило в редакцию 1/X 1958 г.)

В статье производится расчет потенциального обтекания целевой лопаточной решетки (толщиной лопаток можно пренебречь).

Решение опирается на классический метод сингулярностей, обработанный Г. Шлихтингом, и дополняется новыми приближенными формулами, облегчающими численные вычисления компонент индуцированной скорости. Изложение дополнено несколькими практическими примерами расчета потенциального обтекания изолированных профилей, для которых в литературе имеется точное решение (биплан в упорядочении таден и с крыльями над собой, разрывное крыло Чаллыгина).

В заключении работы применяется разработанный метод к расчету целевой лопаточной решетки (вида, похожего на вид оптимальной целевой лопаточной решетки К. Фикерта), из которого ясно, что при потенциальном обтекании целевая решетка имеет приблизительно тот же коэффициент подъемной силы, как простая решетка одинакового основного геометрического вида.