

Aplikace matematiky

František Kroupa

Napětí a deformace v nekonečném pásu, způsobené hranovou dislokací

Aplikace matematiky, Vol. 4 (1959), No. 5, 239 (339)–254 (354)

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102675>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1959

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

NAPĚTÍ A DEFORMACE V NEKONEČNÉM PÁSU, ZPŮSOBENÉ HRANOVOU DISLOKACÍ

FRANTIŠEK KROUPA

(Došlo dne 25. září 1958.)

DT: 539.319

Je podáno řešení základních rovnic klasické matematické teorie pružnosti pro nekonečný pás s hranovou dislokací v centrální rovině. Řešení je provedeno pomocí Fourierových integrálů. Je upozorněno na význam tohoto řešení pro studium deformace tenkých monokrystalických vláken (whiskerů) s hranovou dislokací a pro studium deformace pásu s vnitřními pnutími po lokálním ohřevu.

1. FORMULACE PROBLÉMU, ÚVOD

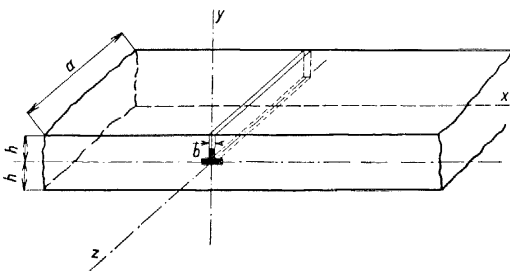
Budeme řešit tento problém:

Problém 1. Určit napětí a posunutí v nekonečném pásu výšky $2h$ a tloušťky a (obr. 1), obsahuje-li v centrální rovině hranovou dislokaci s Burgersovým vektorem \vec{b} . Dislokační čára je kolmá k rovině pásu xy , Burgersův vektor má směr osy pásu x .

Vznik hranové dislokace si můžeme názorně představit tak, jako by po rozříznutí pásu v rovině yz až k ose z byla do vzniklého řezu vsunuta tenká deska tloušťky b z téhož materiálu a provedeno opět spojení.

Z hlediska matematické teorie pružnosti je o dislokacích pojednáno např. v [1], [2], z hlediska poruch v krystalové mřížce v [3], [4]. V pásu vzniknou vnitřní pnutí a tedy i deformace, přičemž pás je bez vnějších zatížení, na povrchu zůstávají normální a smyková napětí nulová.

Kdybychom chtěli, aby napětí, deformace a posunutí byla v celém pásu konečná, musili bychom z tělesa pásu vyříznout (malý) válec kolem osy z . Pro jednoduchost řešení tak



Obr. 1. Pás s hranovou dislokací v centrální rovině.

nečiníme, řešení pak bude mít Δ ose z , to je v dislokační čáře, singularitu, v které vypočtená napětí, deformace a posunutí nabývají nekonečných hodnot. V nejbližším okolí osy z tedy řešení neodpovídá skutečnosti.

Při řešení vyjdeme z předpokladů klasické matematické teorie pružnosti a označíme: složky napětí v pravouhlých souřadnicích $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$, složky deformace $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}$, složky vektoru posunutí u, v, w a Lamého elastické konstanty λ, μ . S Poissonovou konstantou ν souvisí Lamého konstanty vztahem $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$, konstanta μ má význam modulu pružnosti ve smyku.

Při řešení budeme pokládat problém za rovinnou deformaci, tedy platí $w = 0, \varepsilon_z = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0, \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ jsou funkcemi pouze x, y .

Pak, jak známo, je možno převést řešení rovinného statického problému teorie pružnosti na řešení jediné biharmonické rovnice pro tak zvanou Airyho funkci napětí $F(x, y)$,

$$\Delta\Delta F(x, y) = 0, \quad (1)$$

při čemž složky napětí souvisí s Airyho funkcí vztahy

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (2)$$

Krajové podmínky pro napětí případně posunutí můžeme pak vyjádřit přímo pro funkci $F(x, y)$, uijeme-li rovnic (2) a případně ještě Hookova zákona.

Matematicky můžeme nyní problém 1 formulovat takto:

Problém 1': Určit Airyho funkci $F(x, y)$, která splňuje rovnici (1) v pásu $-\infty < x < \infty, -h < y < h$ s výjimkou bodu $x = 0, y = 0$ a pro kterou

a) je splněna krajová podmínka:

pro $y = \pm h$ je

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \quad (3)$$

b) posunutí v jsou jednoznačnou funkcí x, y , pro posunutí u plynoucí z $F(x, y)$ však platí podmínka pro dislokaci

$$\oint_{(s)} \frac{du}{ds} ds = b, \quad (4)$$

kde uzavřená křivka s je vedena uvnitř pásu tak, že obepíná bod $x = 0, y = 0$; integrační cestu volíme proti směru ručiček hodinových. Vzhledem k předpokladům klasické matematické teorie pružnosti musí být $b \ll h$.

Jak plyne z obecných vět teorie pružnosti, řešení tohoto problému 1' existuje a popisuje jediné rozložení napětí.

Případ rovinné deformace nastane přesně, je-li pás nekonečný i ve směru osy z (tedy pro $a \rightarrow \infty$). Pro konečné dostatečně velké a ($a \gg h$) můžeme s postačující přesností předpokládat uvnitř pásu rovinnou deformaci, blízko obou čel má však řešení jen přibližnou platnost.

Pro tenkou desku ($a < 2h$) můžeme problém pokládat za rovinnou napjatost. V tomto případě je možno, jak známo, použít pro výpočet průměrných hodnot (průměry jsou brány přes tloušťku desky, tedy ve směru osy z) napětí σ_x , σ_y , τ_{xy} a posunutí u , v stejných vzorců jako pro rovinnou deformaci, pouze se změněnou hodnotou prvé Lamého konstanty $\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}$ (nebo se změněnou hodnotou Poissonovy konstanty $\sigma^* = \frac{\sigma}{1 + \sigma}$).

Pro $a \ll h$ je možno očekávat prostorové vybočení tenké desky, při kterém nastane zmenšení deformační energie dislokace. V této práci nebudeme tento případ vyšetřovat.

2. ŘEŠENÍ

Řešení problému 1' provedeme ve 4 krocích.

Uvedeme nejprve v odstavci 2,0 známé řešení pro hranovou dislokaci umístěnou v neomezeném prostoru a vypočteme normální a smyková napětí na rovinách $y = \pm h$.

Podáme pak řešení nekonečného pásu zatíženého na krajích spojitě rozloženými normálními (v odstavci 2,1) a tečnými (v odstavci 2,2) napětími stejné velikosti jako příslušná napětí z odstavce 2,0, ale opačného znaménka.

Řešení označíme v těchto případech indexy 0, 1, 2. Řešení v 2,1 a v 2,2 nemají v počátku singularitu a vedou k jednoznačným posunutím.

Superposicí řešení z části 2,0, 2,1, 2,2 získáme pak v odstavci 2,3 řešení (značeno bez indexu) pro nekonečný pás s nezatíženým krajem a s hranovou dislokací v ose z , tedy řešení našeho problému 1 resp. 1'.

Pomocí Airyho funkce $F(x, y)$ pak vypočteme složky napětí (v odstavci 2,4) a složky deformace případně posunutí (v odstavci 2,5).

2,0 Hranová dislokace v nekonečné rovině

Řešení pro hranovou dislokaci v nekonečné rovině x, y , umístěnou v počátku souřadnic, s Burgersovým vektorem ve směru osy x (analogicky k obr. 1) je dáno (např. podle [4]) Airyho funkcí $F_0(x, y)$,

$$F_0(x, y) = -Dy \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (5)$$

kde

$$D = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)}. \quad (6)$$

Složky napětí jsou pak dány výrazy

$$\begin{aligned} \sigma_{x0} &= -D \frac{y(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \sigma_{y0} &= D \frac{y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \tau_{xy0} &= D \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned} \quad (7)$$

a složky posunutí (viz např. [3])

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{b}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right], \\ v_0 &= -\frac{b}{8\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \ln(x^2 + y^2) + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Na přímkách $y = \pm h$ (v naší nekonečné rovině jde o přímky myšlené) jsou napětí normální

$$\sigma_{y0}(x, \pm h) = \pm N(x) = \pm D \frac{h(x^2 - h^2)}{(x^2 + h^2)^2} \quad (9)$$

a napětí smyková

$$\tau_{xy0}(x, \pm h) = T(x) = D \frac{x(x^2 - h^2)}{(x^2 + h^2)^2}. \quad (10)$$

2.1 Airyho funkce pro pás s pomocným normálním vnějším zatížením

Vyřešíme nyní tento první pomocný problém: určit Airyho funkci $F_1(x, y)$ v nekonečném pásu, jsou-li krajové hodnoty napětí

$$y = \pm h \dots \sigma_{y_1}(x, \pm h) = \mp N(x), \quad \tau_{xy_1}(x, \pm h) = 0. \quad (11)$$

Odpovídá to zatížení pásu vnějším pouze normálním specifickým zatížením

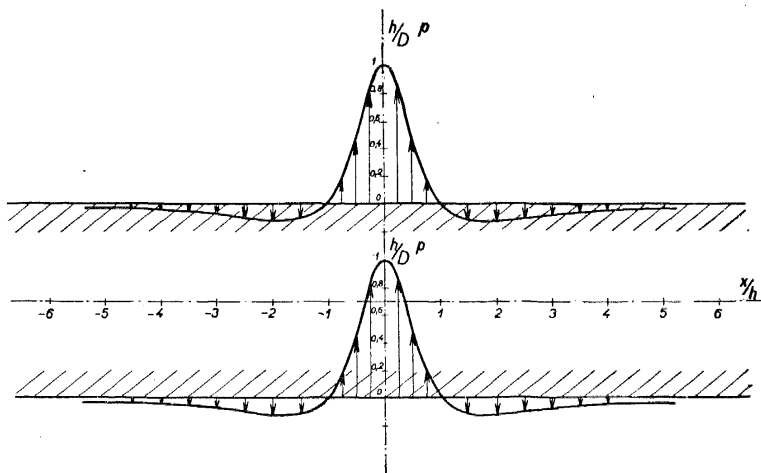
$$\text{pro } y = h \dots p(x) = -N(x) = -D \frac{h(x^2 - h^2)}{(x^2 + h^2)^2},$$

$$\text{pro } y = -h \dots \text{rovněž } p'(x) = -N(x) = -D \frac{h(x^2 - h^2)}{(x^2 + h^2)^2}.$$

Průběh tohoto pomocného vnějšího zatížení na krajích $y = \pm h$ je znázorňen na obr. 2; pás je tímto spojitým zatížením ohýbán.

K řešení biharmonického problému v nekonečném pásu při daných krajo-

vých podmínkách pro napětí je vypracováno několik metod, které jsou uvedeny v práci [5]. Užijeme metody, založené na Fourierově transformaci, vypracované v [6], [7], [8], [9].



Obr. 2. Pomocné normální vnější zatížení na horním a dolním kraji pásu.

Hledáme Airyho funkci takovou, aby napětí σ_{y1} jí určená byla sudou funkcí x a lichou funkcí y a aby pro $y = \pm h$ napětí τ_{xy1} jí určená byla rovna nule. Takovou Airyho funkci je podle [6], [7] funkce typu

$$\chi_1(x, y) = \Phi_1(m, y) \cos mx,$$

kde

$$\Phi_1(m, y) = my \operatorname{ch} mh \operatorname{ch} my - mh \operatorname{sh} mh \operatorname{sh} my - \operatorname{ch} mh \operatorname{sh} my. \quad (12)$$

Dosazením se můžeme přesvědčit, že $\chi_1(x, y)$ splňuje biharmonickou rovnici a že její příslušné druhé derivace vyjadřující σ_{y1} a τ_{xy1} mají požadované vlastnosti, a to pro libovolné m .

Obecněji můžeme psát Airyho funkci pro náš problém ve tvaru Fourierova integrálu

$$\psi_1(x, y) = \int_0^{\infty} \Phi_1(m, y) f_1(m) \cos mx \, dm; \quad (13)$$

kteřá zřejmě zachovává vlastnosti funkce $\chi_1(x, y)$. Zatím neznámou funkci $f_1(m)$ určíme z krajové podmínky (11), tedy z požadavku

$$\sigma_{y1}(x, h) = -N(x) = \left(\frac{\partial^2 \psi_1(x, y)}{\partial x^2} \right)_{y=h} = - \int_0^{\infty} \Phi_1(m, h) f_1(m) m^2 \cos mx \, dm. \quad (14)$$

Jelikož pro sudou funkci $N(x)$ platí podle Fourierova teorému

$$N(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos mx \, dm \int_0^{\infty} N(t) \cos mt \, dt,$$

dostáváme po srovnání s rovnicí (14)

$$\Phi_1(m, h) f_1(m) m^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} N(t) \cos mt \, dt$$

a tedy pro funkci $f_1(m)$ dostáváme po dosazení za $N(t)$

$$= \frac{2}{\pi \Phi_1(m, h) m^2} \int_0^{\infty} \frac{Dh(t^2 - h^2)}{(t^2 + h^2)^2} \cos mt \, dt.$$

Po výpočtu tohoto Fourierova integrálu (při užití (10)) a po dosazení za $\Phi_1(m, h)$ z (12) dostáváme pro $f_1(m)$ analytický výraz

$$f_1(m) = \frac{2Dhe^{-mh}}{m(\operatorname{sh} 2mh - 2mh)}. \quad (15)$$

Tím je formálně Airyho funkce $\psi_1(x, y)$ dána, neboť ve výrazu (13) pro ψ_1 známe jak $\Phi_1(m, y)$ podle rovnice (12), tak i $f_1(m)$ podle rovnice (15).

Je třeba nyní zjistit, zda integrál (13) pro ψ_1 konverguje. Integrand, to je funkce $\Phi_1(m, y) f_1(m) \cos mx$, se blíží pro $m \rightarrow \infty$ nule jako funkce $e^{-e^2 m}$, s dostatečnou rychlostí. Pro $m \rightarrow 0$ se však blíží integrand nekonečnu jako $\frac{Dy}{h^2 m} (y^2 - 3h^2)$. Volíme proto funkci Airyho $F_1(x, y)$ v tvaru

$$F_1(x, y) = \int_0^{\infty} \left[\Phi_1(m, y) f_1(m) \cos mx + \frac{1}{2} \frac{Dy}{h^2 m} (3h^2 - y^2) e^{-m} \right] dm. \quad (16)$$

Integrand této funkce má již pro $m = 0$ konečnou hodnotu a integrál (16) je konvergentní. Přidaný člen je biharmonickou funkcí, nemá vliv na $\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}$

a $\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y}$ a nemění tedy hodnoty σ_{y1} a τ_{xy1} . Napětí daná Airyho funkcí $F_1(x, y)$ splňují tudíž krajeovou podmínku (11) a Airyho funkce $F_1(x, y)$ je řešením našeho prvního pomocného problému.

, Airyho funkce pro pás s pomocným tečným vnějším zatížením

Podáme dále řešení druhého pomocného problému: Určit Airyho funkci $F_2(x, y)$ v nekonečném pásu, jsou-li krajeové hodnoty napětí pro

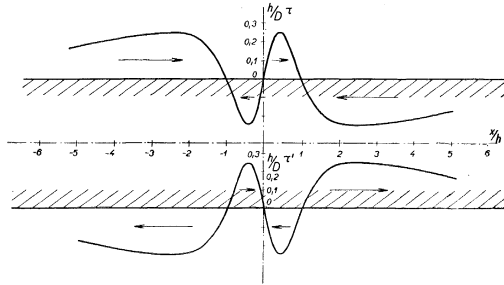
$$y = \pm h \dots \sigma_{y2}(x, \pm h) = 0, \tau_{xy2}(x, \pm h) = -T(x). \quad (17)$$

Odpovídá to zatížení pásu vnějším pouze tečným napětím

$$\text{pro } y = h \dots \tau(x) = -T(x) = -D \frac{x(x^2 - h^2)}{(x^2 + h^2)^2},$$

$$\text{pro } y = -h \dots \tau(x) = T(x) = D \frac{x(x^2 - h^2)}{(x^2 + h^2)^2}.$$

Průběh tohoto pomocného vnějšího zatížení je vyneseno na obr. 3. Vidíme, že pro totéž x mají vnější tečná napětí na obou krajích opačný smysl, působí tedy momentem a jejich účinkem je opět nosník ohýbán.



Obr. 3. Pomocné tečné vnější zatížení na horním a dolním kraji pásu.

Hledáme nyní Airyho funkci takovou, aby napětí τ_{xy2} byla lichou funkcí x a sudou funkcí y a aby napětí σ_{y2} jí určená byla pro $y = \pm h$ rovna nule. Takovou Airyho funkci je funkce typu

$$\chi_2(x, y) = \Phi_2(m, y) \cos mx,$$

kde

$$\Phi_2(m, y) = h \operatorname{ch} mh \operatorname{sh} my - y \operatorname{sh} mh \operatorname{ch} my, \quad (18)$$

nebo obecněji

$$\psi_2(x, y) = \int_0^{\infty} \Phi_2(m, y) f_2(m) \cos mx \, dm. \quad (19)$$

Funkci $f_2(m)$ určíme z krajové podmínky (17), tedy ze vztahu

$$\tau_{xy2}(x, h) = -T(x) = -\left(\frac{\partial^2 \psi_2(x, y)}{\partial x \partial y}\right)_{y=h} = \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi_2(m, y)}{\partial y}\right)_{y=h} f_2(m) m \sin mx \, dm. \quad (20)$$

Podobně jako v předchozím odstavci, dostaneme po srovnání (20) s Fourierovým teorémem pro lichou funkci $T(x)$ a po výpočtu

$$f_2(m) = \frac{2D(1 - mh) e^{-mh}}{m (\operatorname{sh} 2mh - 2mh)}. \quad (21)$$

Tím je opět formálně určen výraz pro $\psi_2(x, y)$. Podobně jako v předchozím odstavci je možno ukázat, že integrál v (19) nekonverguje. Aby měl integrand pro $m = 0$ konečnou hodnotu, musíme volit Airyho funkce

$$F_2(x, y) = \int_0^\infty \left[\Phi_2(m, y) f_2(m) \cos mx + \frac{Dy}{2h^2m} (y^2 - h^2) e^{-m} \right] dm. \quad (22)$$

Tato funkce je biharmonická, splňuje krajovou podmínku (17) a je tedy řešením druhého pomocného problému.

2,3 Airyho funkce pro pás s hranovou dislokací

Podle výše naznačeného postupu řeší náš problém 1', to je problém nekonečného pásu s hranovou dislokací, Airyho funkce $F(x, y)$,

$$F(x, y) = F_0(x, y) + F_1(x, y) + F_2(x, y). \quad (23)$$

Po výpočtu dostaneme pro $F(x, y)$

$$F(x, y) = -Dy \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 2D \int_0^\infty \left[\Phi(m, y) f(m) \cos mx + \frac{y}{2m} e^{-m} \right] dm, \quad (24)$$

kde

$$f(m) = \frac{e^{-mh}}{m (\operatorname{sh} 2mh - 2mh)} \quad (25)$$

a

$$\begin{aligned} \Phi(m, y) = & [(mh - 1) \operatorname{sh} mh + mh \operatorname{ch} mh] y \operatorname{ch} my - \\ & - mh^2 (\operatorname{sh} mh + \operatorname{ch} mh) \operatorname{sh} my. \end{aligned} \quad (26)$$

Integrand v (24) je pro $m = 0$ omezený a interál konverguje.

Funkce $F(x, y)$ splňuje v nekonečném pásu (s výjimkou bodů $x = 0, y = 0$) biharmonickou rovnici, napětí určená touto funkcí splňují, jak plyne z její konstrukce, krajovou podmínku (3) a posunutí splňují podmínku pro hranovou dislokaci (4). Je možno se o tom přímo přesvědčit dosazením do výrazů pro napětí a posunutí, uvedených v dalších odstavcích 2,4 a 2,5.

2,4 Složky napětí

Pro složky napětí dostáváme z rovnic (2), (24)

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -D \frac{y(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + 2D \int_0^\infty \frac{\partial^2 \Phi(m, y)}{\partial y^2} f(m) \cos mx \, dm, \\ \sigma_y &= D \frac{y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} - 2D \int_0^\infty \Phi(m, y) f(m) m^2 \cos mx \, dm, \\ \tau_{xy} &= D \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + 2D \int_0^\infty \frac{\partial \Phi(m, y)}{\partial y} f(m) m \sin mx \, dm,\end{aligned}\quad (27)$$

kde $\Phi(m, y)$ je dáno rovnicí (26), $f(m)$ rovnicí (25) a derivace $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ a $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ výrazy

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi(m, y)}{\partial y} &= [(mh - 1) \operatorname{sh} mh + mh \operatorname{ch} mh] (\operatorname{ch} my + ym \operatorname{sh} my) - \\ &\quad - m^2 h^2 (\operatorname{sh} mh + \operatorname{ch} mh) \operatorname{ch} my,\end{aligned}\quad (28)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi(m, y)}{\partial y^2} &= [(mh - 1) \operatorname{sh} mh + mh \operatorname{ch} mh] (2m \operatorname{sh} my + ym^2 \operatorname{ch} my) - \\ &\quad - m^3 h^2 (\operatorname{sh} mh + \operatorname{ch} mh) \operatorname{sh} my.\end{aligned}\quad (29)$$

Po dosazení do krajové podmínky (3) se výrazy za integrálem pro $y = \pm h$ pro σ_y a τ_{xy} tak zjednoduší, že integrace vede na elementární funkce a je možno se přesvědčit o tom, že nabývají tato napětí na kraji nulových hodnot. Snadno se dále přesvědčíme, že pro $y = 0$ je $\sigma_x(x, 0) = \sigma_y(x, 0) = 0$. Napětí σ_x , σ_y jsou v x sudé, v y liché funkce, τ_{xy} je v x lichou a v y sudou funkcí.

Pro ostatní hodnoty vypočteme integrály v (27) numericky.

Jako příklad uvedeme výsledky výpočtu pro $\sigma_x(x, h)$ a $\tau_{xy}(x, 0)$. Pro výpočet zavedeme bezrozměrné veličiny vztahy

$$\xi = \frac{x}{h}, \quad t = mh \quad (30)$$

a po úpravě dostáváme

$$\frac{h}{D} (\sigma_x)_{y=h} = -\frac{4\xi^2}{(1 + \xi^2)^2} + 4 \int_0^\infty \frac{t^2 + (t-1) \operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{sh} 2t - 2t} e^{-t} \cos \xi t \, dt \quad (31)$$

a

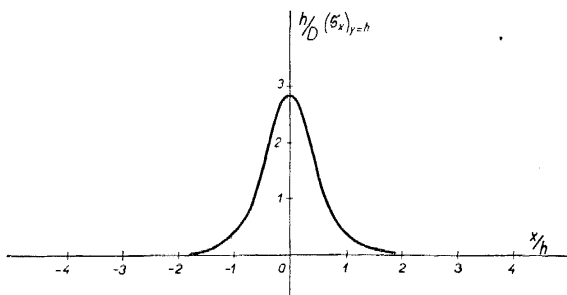
$$\frac{h}{D} (\tau_{xy})_{y=0} = \frac{1}{\xi} + \int_0^\infty \frac{2t(1-t) + e^{-2t} - 1}{\operatorname{sh} 2t - 2t} \sin \xi t \, dt. \quad (32)$$

Vztahy (31) a (32) jsou po numerickém výpočtu znázorněny na obr. 4.

2.5 Složky deformace a posunutí

Složky deformace můžeme vypočítat z Hookova zákona

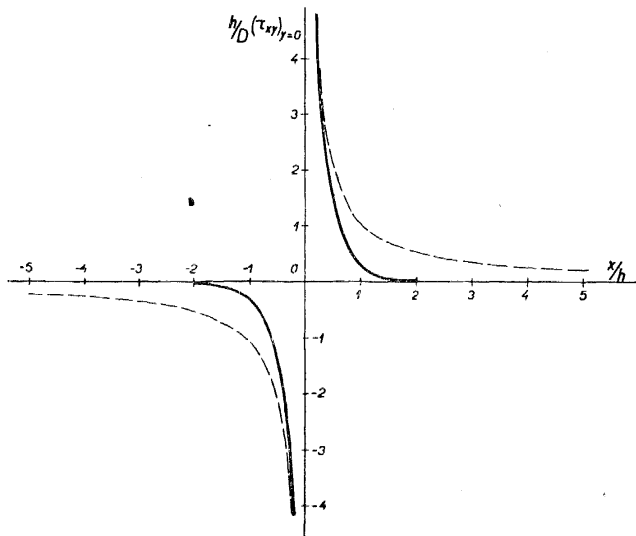
$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)} \left(\sigma_x - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_y \right), \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)} \left(\sigma_y - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_x \right), \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \tau_{xy}.\end{aligned}\quad (33)$$



Obr. 4a. Průběh normálního napětí $\frac{h}{D} (\sigma_x)_{y=0}$.

Pro rovinnou napjatost je v těchto rovnicích λ^* místo λ . Je dále $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$. Při rovinné deformaci je $\varepsilon_z = 0$, při rovinné napjatosti $\varepsilon_z = -\frac{\lambda^*}{2\mu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$.

Výrazy (33) jsou po dosazení z (27) vyjádřeny pomocí známých funkcí a jejich Fourierových integrálů.



Obr. 4b. Průběh smykového napětí $\frac{h}{D} (\tau_{xy})_{y=0}$ (čárkovaně vyznačena rovnoosá hyperbola).

Složky posunutí byehom mohli získat dalšími integracemi rovnic (33). Vzhledem k tomu, že posunutí způsobená pomocným zatížením pásu jsou jednoznačnou funkcí x, y , mají zřejmě výrazy pro posunutí tvar

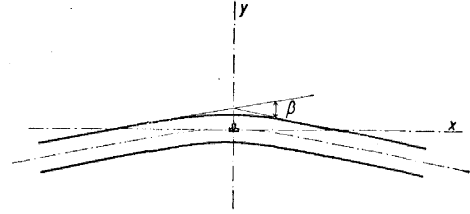
$$u(x, y) = \frac{b}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + u^*(x, y),$$

$$v(x, y) = v^*(x, y),$$

kde hvězdičkou jsou označeny jednoznačné funkce x, y .

Je možno očekávat, že vlivem hranové dislokace se pás prohne podle obr. 5. Přímkou $y = c$ v ne-deformovaném pásu přejde po deformaci v křivku, která svírá v místě x s osou x úhel α ,

$$\alpha(x, c) = \frac{\partial v(x, c)}{\partial x}. \quad (34)$$



Obr. 5. Prohnutí pásu vlivem hranové dislokace.

Celkové pronutí β (viz obr. 5) je dáno výrazem

$$\beta = -2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial v(x, c)}{\partial x}; \quad (35)$$

tato limita zřejmě nezávisí na hodnotě c (pro $|c| \leq h$).

Při výpočtu $\frac{\partial v}{\partial x}$ vyjdeme z výrazu (viz např. [7])

$$2\mu v = -\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (36)$$

kde pomocná funkce $\psi(x, y)$ souvisí s Airyho funkcí $F(x, y)$ vztahem

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad (37)$$

a je harmonická, tedy splňuje rovnici

$$\Delta \psi(x, y) = 0. \quad (38)$$

Po dvojí derivaci výrazu (36) podle x , užití vztahu (38), (37) a jedné integraci přes x dostáváme po úpravě

$$\frac{\partial v}{\partial x} = a_1 \tau_{xy} - a_2 \int_0^x \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} dx, \quad (39)$$

kde

$$a_1 = \frac{1}{2\mu} \frac{3\lambda + 4\mu}{2(\lambda + \mu)} = \frac{2 - \nu}{2\mu}, \quad (40)$$

$$a_2 = \frac{1}{2\mu} \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} = \frac{1 - \nu}{2\mu}.$$

$\frac{\partial v}{\partial x}$ je tedy známo, neboť τ_{xy} je dáno rovnicí (27) a $\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}$ plyne z (24).

V dalším se omezíme na výpočet $\frac{\partial v}{\partial x}$ pro $y = h$, zajímáme se tedy o prohnutí horního kraje pásu. Výraz (39) se zjednoduší, neboť pro $y = h$ je $\tau_{xy} = 0$. Po dosazení za F a po delším výpočtu a úpravách dostaneme s použitím bezrozměrných veličin podle (30)

$$\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{y=h}}{b/h} = -\frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\xi}{(\xi^2 + 1)^2} + \int_0^\infty \frac{t(t-1) + t \operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{sh} 2t - 2t} e^{-t} \sin \xi t dt \right\}. \quad (41)$$

Snadno vypočteme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial v(x, h)}{\partial x}$. Užijeme k tomu tohoto teorému pro Fourierovy integrály (viz [8]): Splňuje-li funkce $g(t)$ Dirichletovu podmínku v intervalu $(0, \infty)$, pak pro ξ blížíci se libovolně nekonečnu kladnými hodnotami je

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_0^\infty g(t) \frac{\sin \xi t}{t} dt = \frac{\pi}{2} g(+0).$$

Pro naši funkci

$$g(t) = \frac{t^2(t-1) + t^2 \operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{sh} 2t - 2t} e^{-t}$$

dostáváme limitu

$$g(+0) = \frac{3}{4}$$

a tedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial v(x, h)}{\partial x} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\partial v(x, h)}{\partial x} = -\frac{3}{8} \frac{b}{h}.$$

Podle (35) je pak celkové prohnutí pásu dáno jednoduchým výrazem

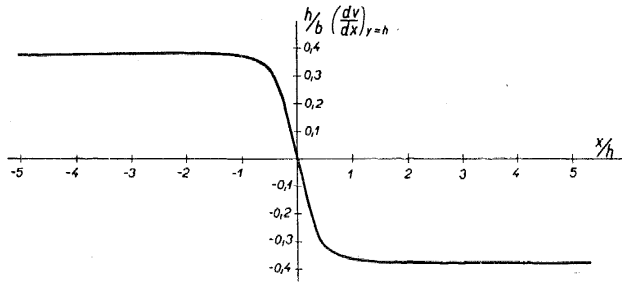
$$\beta = \frac{3}{4} \frac{b}{h}. \quad (42)$$

Průběh $\frac{\partial v(x, h)}{\partial x}$ jsme podle (41) vypočetli numericky, graficky je znázorněn na obr. 6a. Na obr. 6b je znázorněn průběh $v(x, h)$, získaný grafickou integrací.

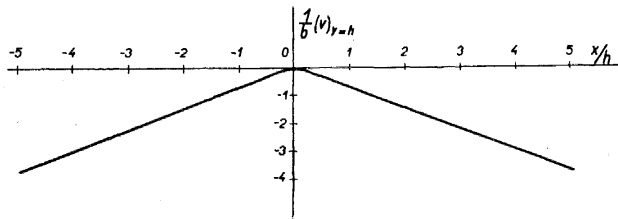
3. DISKUSE

V posledních letech nabyl pojem dislokace, zavedený již dříve v teorii pružnosti, neobyčejného významu ve fyzice pevných látek. Ukázalo se, že atomová mřížka krystalů obsahuje velké množství poruch a že jejich přítomnost závažně

ovlivňuje některé vlastnosti krystalů; pro některé vlastnosti jsou poruchy přímo rozhodující. Jednou z nejdůležitějších poruch jsou právě dislokace, které hrají rozhodující úlohu při plastické deformaci. Jejich zvláštním případem je dislokace hranová. Má mezi dvě atomové roviny vloženu část další atomové roviny (nebo několik rovin), jejíž ohraničení (na obr. 1 osa z) je dislokační čára, kolem které je atomová mřížka silně deformována. Burgersův vektor dislokace v krystalové mřížce je pak roven nejkratší vzdálenosti dvou atomů nebo celistvému násobku této vzdálenosti.



Obr. 6a. Průběh úhlu, který svírá hrana pásu s osou x .



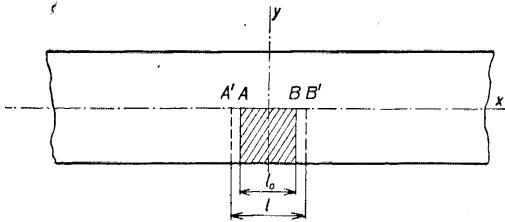
Obr. 6b. Posunutí ve směru osy y na hraně pásu (udává tvar hrany pásu po deformaci).

Pro studium některých vlastností dislokace v krystalové mřížce vystačíme s představou dislokace ve spojitém prostředí; takové prostředí je možno pokládat za anisotropní a tak se více přiblížit vlastnostem skutečných krystalů, anebo pro jednoduchost výpočtu za isotropní.

Velkou pozornost vzbudila dále v posledních letech ve fyzice tenká monokrystalická vlákna (whiskery), která mají délku až několik cm, příčné rozměry však pouze řádově kolem mikronu. Jejich vlastnosti se blíží vlastnostem ideální krystalové mřížky, neboť obsahují velmi málo poruch. Mají např. velmi vysokou mez skluzu a pevnost. Whiskery nemusí obsahovat dislokaci nebo obsahují jednu nebo několik dislokací. Vzhledem k tomu, že jeden jejich rozměr značně převládá, může deformace způsobená i jedinou dislokací být u whiskerů již značná. Ukázal to např. ESHELBY [11] pro whisker obsahující tzv. šroubovou dislokaci v ose whiskeru. Z našeho řešení pak můžeme udělat závěry pro de-

formaci whiskeru s hranovou dislokací kolmou k jeho ose. K srovnání se skutečností může nejlépe sloužit celkové prohnutí β , které podle (42) je řádově rovno b/h . Pro velký Burgersův vektor (např. jde-li o skupinu hranových dislokací téhož znaménka) nebo pro extrémně tenké whiskery by bylo možno již toto prohnutí pozorovat.

Podrobnější diskuse je provedena v článku [12], kde jsme podali přibližně



Obr. 7. K vzniku dislokace po ohřevu.

řešení téhož problému. Deformace pásu vlivem dislokace je zde určena z deformace tenkého nosníku, zatěžovaného spojitě rozloženým normálním napětím a spojitě rozloženým momentem, odpovídajícím účinkům napětí $-\sigma_{y0}$, $-\tau_{xy0}$ na krajích nosníku (viz naše rovnice (9), (10)).

Uvedené výsledky je však možno aplikovat i v jiných oborech. Představme si (velmi schematicky), že obdélníková oblast pásu vyčárkovaná na obr. 7 byla zahřáta na teplotu T , okolní materiál má teplotu 0. Původní šířka oblasti byla l_0 , zahřátím se zvětšila na $l = l_0(1 + \alpha T)$, kde α je koeficient teplotní roztažnosti. V případě, kdy $\alpha T > \frac{\sigma_T}{E}$, kde σ_T je mez průtažnosti při vyšší teplotě,

E modul pružnosti, nemůže horní část sledovat elasticky deformaci spodní části a dojde k prokluzu v rovině xz . Za předpokladu, že při nižší teplotě nemůže k opačnému prokluzu dojít, je po vychladnutí spojena délka l_0 v dolní části s délkou $l_0\left(1 + \alpha T - \frac{\sigma_T}{E}\right)$ v horní části a vytvoří se hranová dislokace podle

obr. 1 s Burgersovým vektorem $b = l_0\left(\alpha T - \frac{\sigma_T}{E}\right)$ a nastane deformace podle

obr. 5. I když naše úvaha má pouze kvalitativní platnost, (uvažuje nespojitě rozdělení teploty a neuvažuje teplotní vodivost, zjednodušuje značně plastické chování), vystihuje dobře charakter vzniklé deformace. Domníváme se, že zavedení pojmu dislokace ke studiu vnitřních pnutí a deformace po ohřevu by bylo velmi užitečné zvláště při použití pojmů spojitě rozložené dislokací [13].

Závěrem ještě poznamenejme, že jednoduchým i když pracným zobecněním našeho postupu je možno řešit obecnější případ, kdy dislokace není umístěna právě v centrální rovině, ale má od krajů pásu vzdálenosti h_1 , h_2 . Velikost prohnutí β pak závisí na poloze dislokace a je maximální právě tehdy, je-li dislokace umístěna v centrální rovině.

Za cennou diskusi děkuji soudruhům IVO BABUŠKOVÍ a JANU KACZÉROVI, za provedení numerických výpočtů s. MARIÍ HONEGROVÉ a s. JANU VAŇKOVÍ.

Literatura

- [1] *Volterra V.*: Ann. Éc. Norm., Ser. 3, 24 (1907), 401.
- [2] *Мусхелишвили Н. И.*: Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва 1954.
- [3] *Read W. T.*: Dislocations in Crystals. London 1953.
- [4] *Cottrell A. H.*: Dislocations and Plastic Flow in Crystals. Oxford 1953.
- [5] *Babuška I.*: Aplikace matematiky 1 (1956), 34.
- [6] *Filon L. N. G.*: Phil. Trans. Roy. Soc. A 201 (1903), 63.
- [7] *Coker E. G. Filon L. N. G.*: A Treatise on Photoelasticity. Cambridge 1931.
- [8] *Sneddon I. N.*: Fourier Transforms. New York 1951.
- [9] *Howland R. C. J.*: Proc. Roy. Soc A 124 (1929), 89.
- [10] *Рыжик И. М., Градштейн И. С.*: Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва 1951.
- [11] *Eshelby J. D.*: Phil. Mag. 3 (1958), 440.
- [12] *Kroupa F.*: Čs. čas. fys. 9 (1959), 117
- [13] *Kröner E.*: Kontinuumstheorie der Versetzungen. Berlin 1958.

Резюме

НАПРЯЖЕНИЕ И ДЕФОРМАЦИЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЕ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ЛИНЕЙНОЙ ДИСЛОКАЦИЕЙ

ФРАНТИШЕК КРОУПА (František Kroupa)

(Поступило в редакцию 25/IX 1958.)

В статье дается точное решение следующей плоской задачи математической теории упругости: определить напряжение и смещение в бесконечной полосе, содержащей в центральной плоскости линейную дислокацию (по рис. 1).

Решение производится при помощи функции Эри путем суперпозиции трех решений: решения для случая линейной дислокации, расположенной в неограниченном пространстве (отд. 2,0) и решения для случая бесконечной полосы при отсутствии дислокации, нагруженной по краям непрерывно распределенными внешними нормальными (отд. 2,1) и касательными напряжениями (отд. 2,2), удобно выбранными с расчетом, чтобы решение, полученное в результате суперпозиции, соответствовало краям без нагрузки. Решение для полосы получено при помощи интегралов Фурье.

При помощи функции Эри получены формулы для напряжений и смещений а также простая формула для прогиба полосы; некоторые результаты отмечены графически.

Затем автор обращает внимание на значение дислокаций в кристаллической решетке и на возможность применения полученных результатов

к объяснению деформации тонких монокристаллических волокон (*whisker*) под влиянием линейной дислокации. В последнем замечании указана возможность применения понятия дислокации при изучении внутреннего напряжения после нагрева.

Summary

STRESS AND DEFORMATION OF AN INFINITE STRIP, CAUSED BY AN EDGE DISLOCATION

FRANTIŠEK KROUPA

(Received September 25th, 1958.)

The subject of this paper is the precise solution of the following problem in the theory of plane elasticity to determine the stress and displacement of an infinite strip caused by an edge dislocation.

The problem is solved by use of Airy's function, by the superposition of the following three solutions: that for the edge dislocation in unbounded space (section 2.0), that for an infinite strip without dislocation, whose boundary is loaded with continuously distributed normal stresses (section 2.1), and tangential stresses (section 2.2); these are chosen in such a manner that the resulting superposed solution corresponds to free boundaries. The solutions for the strip are obtained by means of the Fourier integrals.

Expressions for the stress, the displacement and the deflection are then obtained, using Airy's function; some of the results are treated graphically.

In a discussion of these results, the effect of dislocations in a crystalline lattice is noted, and also the possibility of using the results to explain the deformation of thin monocrystalline fibers (*whiskers*) by edge dislocation. A final remark notes the possibility of using dislocations in discussing thermal stresses.