Zdeněk Režný

Skupinové testy statistických hypotéz podle dvou kontrolních mezí

Aplikace matematiky, Vol. 4 (1959), No. 4, 290–302

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102670`

SKUPINOVÉ TESTY STATISTICKÝCH HYPOTÉZ PODLE DVOU KONTROLNÍCH MEZÍ

ZDENĚK REŽNÝ

(Došlo dne 5. září 1958.) DT:330.655

V článku jsou popsány testy nulových hypotéz o parametrech základního souboru, založené na třídění výběrových hodnot podle dvou tzv. kontrolních mezí do tří intervalů. Je odvozena asymptotická relativní vydatnost těchto testů a uvedeny některé jejich aplikace.

I. ÚVOD

V aplikacích statistických testů v praxi průmyslových technických kontrol a výzkumu mají stále rostoucí význam testy, které jsou jednoduché a snadno proveditelné. Důvody toho jsou různé. Někdy např. není hospodárné provádět přesná měření na všech prvcích výběru, v jiných případech to ani není možné. Kromě toho výpočet výběrových charakteristik pro nejvydatnější test vede zpravidla k neúměrnému zatížení pracovníka v provozu popř. ke zdražení konstrukce přístroje, sloužícího k mechanisaci statistického testu apod.

V r. 1948 upozornil W. L. STEVENS ve své práci [1] na jednoduchý test, jejž lze popsat takto:

Nechť náhodná proměnná X má distribuční funkci, která závisí právě na dvou parametrech (charakterizujících polohu a rozptyl), o nichž máme testovat určité nulové hypotézy. K tomu účelu určíme předem dvě hodnoty $x_1 > x_2$ (ležící obě ve variačním oboru náhodné proměnné X) a u náhodného výběru stanoveného rozsahu n zjišťujeme nikoli jednotlivé výběrové hodnoty, nýbrž pouze

$$z_+(x_1) \; \dots \; \text{počet výběrových hodnot větších než } x_1 ,$$
$$z_-(x_2) \; \dots \; \text{počet výběrových hodnot menších než } x_2 ,$$

takže zbytek $n - z_+(x_1) - z_-(x_2)$ je počet výběrových hodnot ležících v intervalu $\langle x_2, x_1 \rangle$; hodnoty x_1, x_2 budeme nazývat *kontrolními mezemi*. Test nulové hypotézy o parametru polohy se pak provede pomocí vhodné lineární kombinace

$$l(a_1, a_2; x_1, x_2) = a_1 z_+(x_1) + a_2 z_-(x_2) \tag{1}$$

a test nulové hypotézy o parametru rozptylu pomocí jiné lineární kombinace téhož tvaru s jinou dvojicí koeficientů a_1, a_2.

V práci [1] je nejprve ilustrována vysoká vydatnost *odhadů* obou parametrů pomocí uvedených výběrových charakteristik na příkladech několika základních souborů (normálního, cauchyovského a Γ-rozdělení). Kromě toho jsou v [1], odst. 9.1 odvozeny vzorce pro optimální volbu koeficientů a_1, a_2, jsou-li dány kontrolní meze x_1, x_2. Ze zjištěných vlastností odhadů činí autor závěry i o asymptotické vydatnosti *testů*; pro malé rozsahy výběrů ukazuje na příkladě ([1], obr. 6), že test nulové hypotézy o průměru μ normálního základního souboru pomocí vhodné lineární kombinace (1) při rozsahu výběru $n = 10$ má prakticky tutéž silofunkci jako test pomocí výběrového průměru $\bar{x}$ při rozsahu výběru $n = 8$.

Na Stevensovu práci [1] pak navázal u nás další výzkum tohoto testu, který nazveme skupinovým, se zřetelem na aplikace ve statistické kontrole jakosti [2] a v mechanisaci této kontroly [3]; konstrukce zařízení pro mechanisaci statistické regulace touto metodou je popsáno v pracích [6] a [7].

Hlavním obsahem následujících odstavců je odvození takových kontrolních mezí x_1, x_2 a koeficientů a_1, a_2, při nichž je dosaženo maximální asymptotické vydatnosti. Na příslušném místě (odst. 3) ukážeme shody a rozdíly s výsledky Stevensovými.

2. VÝBĚROVÁ CHARAKTERISTIKA SKUPINOVÉHO TESTU, JEJÍ MOMENTY A RELATIVNÍ ASYMPTOTICKÁ VYDATNOST

Nechť náhodná proměnná X má distribuční funkci $F(x; \Theta)$ a nechť je dána čtveřice reálných čísel a_1, a_2, x_1, x_2 ($|a_1| + |a_2| > 0$, $x_1 > x_2$) a rozsah výběru n. Zavedeme další náhodné proměnné

$$Z_+(x_1) \ \ldots \ \text{počet výběrových hodnot } x > x_1\,,$$
$$Z_-(x_2) \ \ldots \ \text{počet výběrových hodnot } x < x_2\,,$$

a jejich lineární kombinaci

$$L(a_1, a_2; x_1, x_2) = a_1 Z_+(x_1) + a_2 Z_-(x_2)\,. \tag{2}$$

Pro zvláštní případy lineární kombinace (2), kdy je $a_1 = |a_2| = 1$, zavádíme názvy a označení *součet*

$$Z(x_1, x_2) = Z_+(x_1) + Z_-(x_2) \tag{3}$$

a *rozdíl*

$$R(x_1, x_2) = Z_+(x_1) - Z_-(x_2)\,. \tag{4}$$

Označme dále p_+ a p_- pravděpodobnosti, že jednotlivá vybraná hodnota náhodné proměnné X bude větší než x_1 resp. menší než x_2; je tedy

$$p_+ = \mathsf{P}\{X > x_1\} = 1 - F(x_1; \Theta)\,, \tag{5}$$

$$p_- = \mathsf{P}\{X < x_2\} = F(x_2 - 0; \Theta)\,. \tag{6}$$

Náhodná proměnná (2) má střední hodnotu

$$\mathsf{E}[L(a_1, a_2; x_1, x_2)] = n(a_1 p_+ + a_2 p_-) \tag{7}$$

a rozptyl

$$\sigma^2[L(a_1, a_2; x_1, x_2)] = n[a_1^2 p_+(1 - p_+) - 2a_1 a_2 p_+ p_- + a_2^2 p_-(1 - p_-)], \tag{8}$$

přičemž p_+ a p_- jsou dány vztahy (5) a (6). Vztahy (7) a (8) lze snadno odvodit pomocí rozkladu náhodné proměnné (2) na součet n nezávislých a stejně rozdělených náhodných proměnných, z nichž každá nabývá pouze tří hodnot: a_1 s pravděpodobností p_+, a_2 s pravděpodobností p_- a 0 s pravděpodobností $1 - p_+ - p_-$.

Podle věty Pitmanovy je za jistých předpokladů[1]) (viz [4]) relativní asymptotická vydatnost výběrové charakteristiky Y_1 vzhledem k výběrové charakteristice Y_2 pro test hypotézy $\Theta = \Theta_0$ dána vztahem

$$\mathsf{e}_\Theta(Y_1, Y_2) = \lim_{n \to +\infty} \frac{e_\Theta(Y_1)}{e_\Theta(Y_2)}, \tag{9}$$

kde je

$$e_\Theta(Y) = \left. \frac{\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Theta}\, \mathsf{E}(Y)\right]^2}{\sigma^2(Y)} \right|_{\Theta = \Theta_0}. \tag{10}$$

Pitmanova věta umožňuje zejména: 1. určit podle vztahu (9) relativní asymptotickou vydatnost dvou lineárních kombinací (2) s různými čtveřicemi (a_1, a_2, x_1, x_2), 2. nalézt asymptoticky nejvydatnější lineární kombinaci (2), tj. takovou čtveřici (a_1, a_2, x_1, x_2), pro kterou nabývá funkce $e_\Theta[L(a_1, a_2, x_1, x_2)]$ maximální hodnoty, a 3. někdy též určit podle vztahu (9) relativní asymptotickou vydatnost libovolné lineární kombinace (2) vzhledem k nejvydatnější výběrové charakteristice.

Definici lineární kombinace (2) lze ještě zjednodušit. Dvě výběrové charakteristiky Y_1 a Y_2, vázané lineárním vztahem $Y_1 = kY_2 + q$ (k a q jsou konstanty vzhledem k testovanému parametru Θ), jsou zřejmě vzhledem k testu

---

[1]) Předpokládejme, že podle hypotézy mají jednotlivá pozorování distribuční funkci $F(x; \Theta_0)$ a podle alternativy distribuční funkci $F(x; \Theta_1)$, přičemž $\Theta_n \to \Theta_0$ při $n \to \infty$. Potom, při platnosti alternativy, testová statistika (2) bude součtem n nezávislých a stejně rozdělených náhodných proměnných, z nichž každá nabývá pouze tří hodnot: a_1 s pravděpodobností $p_+(\Theta_n)$, a_2 s pravděpodobností $p_-(\Theta_n)$ a 0 s pravděpodobností $1 - p_+(\Theta_n) - p_-(\Theta_n)$. Pitmanova věta především předpokládá, že rozdělení testové statistiky je asymptoticky normální při platnosti alternativy (která se mění v závislosti na n). Aby tato podmínka byla splněna, stačí, jak se lze přesvědčit např. pomocí Ljapunovova kritéria, aby $p_+(\Theta_n) \to p_+(\Theta_0)$, $p_-(\Theta_n) \to p_-(\Theta_0)$ a aby $0 < p_+(\Theta_0) < 1$, $0 < p_-(\Theta_0) < 1$. Potom je splněna i další podmínka Pitmanovy věty, spočívající v tom, že podíl rozptylů testové statistiky při platnosti hypotézy a alternativy konverguje při $n \to \infty$ k jedné. Dále je zapotřebí, aby podmíněná střední hodnota testové statistiky jakožto funkce parametru Θ měla derivaci různou od nuly, což bude v příkladech, které budeme v dalším uvažovat, zřejmě splněno.

hypotézy $\Theta = \Theta_0$ ekvivalentní. Značme takový lineární vztah $\sim$. Z (10) pak plyne

$$[Y_1 \sim Y_2] \Rightarrow [e_\Theta(Y_1) = e_\Theta(Y_2)] . \tag{11}$$

Mezi náhodnými proměnnými (2) platí ekvivalence

$$L(a_1, a_2; x_1, x_2) \sim L(ka_1, ka_2; x_2, x_2) \quad (k \neq 0) \tag{12}$$

a odtud při $a_1 \neq 0$

$$L(a_1, a_2; x_1, x_2) \sim L\left(1, \frac{a_2}{a_1}; x_1, x_2\right) \tag{13}$$

a při $a_1 = 0$ pro všechna a_2 ($\neq 0$)

$$L(0, a_2; x_1, x_2) \sim Z_-(x_2) . \tag{14}$$

Abychom sjednotili případy (13) a (14), použijeme vztahu (12), podle něhož platí pro $a \neq 0$

$$L\left(\frac{1}{a}, 1; x_1, x_2\right) \sim L(1, a; x_1, x_2) . \tag{15}$$

Limitním přechodem pro $a \to +\infty$ nebo $a \to -\infty$ získáme z (15)

$$L(0, a_2; x_1, x_2) \sim L(1, \pm\infty; x_1, x_2) . \tag{16}$$

Proto budeme v lineární kombinaci (2) vždy předpokládat konstantní koeficient $a_1 = 1$, který již nemusíme v označení uvádět. Budeme tedy uvažovat náhodnou proměnnou

$$L(a; x_1, x_2) = Z_+(x_1) + aZ_-(x_2) , \tag{17}$$

přičemž pro nevlastní hodnoty $a = \pm\infty$ se definice (17) nahrazuje ekvivalencí

$$L(+\infty; x_1, x_2) \sim L(-\infty; x_1, x_2) \sim Z_-(x_2) . \tag{17a}$$

Podle (7) a (8) má náhodná proměnná (17) střední hodnotu a rozptyl

$$\mathsf{E}[L(a; x_1, x_2)] = n(p_+ + p_- a) , \tag{18}$$

$$\sigma^2[L(a; x_1, x_2)] = n[p_+(1 - p_+) - 2p_+p_-a + p_-(1 - p_-) a^2] . \tag{19}$$

Z (10), (18) a (19) pak plyne

$$e_\Theta[L(a; x_1, x_2)] = \left.\frac{n(p'_+ + p'_- a)^2}{p_+(1 - p_+) - 2p_+p_-a + p_-(1 - p_-) a^2}\right|_{\Theta = \Theta_0} . \tag{20}$$

Snano ovčříme, že v souhlasu s (11) a (17a) platí

$$\lim_{a \to \pm\infty} e_\Theta[L(a; x_1, x_2)] = e_\Theta[Z_-(x_2)] . \tag{21}$$

Při pevných hodnotách x_1, x_2 takových, že je $0 < p_\pm < 1$ (a ovšem $p_+ + p_- < 1$), nabývá výraz (20) jako funkce a právě dvou extrémních hodnot:

minimální hodnoty (rovné nule) pro $a = a_{0,\Theta}$ a maximální pro $a = a_{\max,\Theta}$, kde je

$$a_{0,\Theta} = -\left.\frac{p'_+}{p'_-}\right|_{\Theta=\Theta_0}, \tag{22}$$

$$a_{\max,\Theta} = \frac{p_+}{p_-} \cdot \left.\frac{p'_+p_- + p'_-(1 - p_+)}{p'_+(1 - p_-) + p'_-p_+}\right|_{\Theta=\Theta_0}. \tag{23}$$

Rozkladu náhodné proměnné (2), zmíněného výše (v textu za vztahem (8)), lze použít k výpočtu distribuční funkce náhodné proměnné (2) resp. (17) a tím i ke stanovení kritických hodnot l_H, l_D ($l_D < l_H$). Kritický obor je pak vymezen nerovnostmi $L(a; x_1, x_2) \geqq l_H$ nebo $L(a; x_1, x_2) \leqq l_D$.

3. SKUPINOVÉ TESTY PARAMETRŮ NORMÁLNÍHO ROZDĚLENÍ

Normálně rozdělená náhodná proměnná X má distribuční funkci $\Phi(x; \mu, \sigma)$, která závisí na průměru μ (parametru polohy) a směrodatné odchylce σ (parametru rozptylu). Použijeme-li běžného označení

$$\Phi(x) = \Phi(x; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} \,\mathrm{d}z, \tag{24}$$

$$\varphi(x) = \Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{25}$$

pak platí

$$\Phi(x; \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \tag{26}$$

a dále podle (5) a (6)

$$\begin{aligned} p_+ &= 1 - \Phi(x_1; \mu, \sigma) = 1 - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right), \\ p_- &= \Phi(x_2; \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right). \end{aligned} \tag{27}$$

Budeme vyšetřovat asymptotickou vydatnost lineárních kombinací (17) vzhledem k testům nulových hypotéz o parametrech μ a σ. Budeme proto uvažovat tyto nulové hypotézy: 1. $H_0 \equiv \mu = \mu_0$, přičemž předpokládáme známou hodnotu druhého parametru σ, kterou označíme σ_0, a 2. $H_0 \equiv \sigma = \sigma_0$ za předpokladu známé hodnoty parametru μ, kterou označíme μ_0. Pro jednoduchost výpočtů zavedeme takovou lineární transformaci náhodné proměnné X, aby v obou případech bylo $\mu_0 = 0$, $\sigma_0 = 1$. Tato transformace nemá vliv na hodnoty relativních asymptotických vydatností lineárních kombinací (17) vzhledem k nejvydatnějším výběrovým charakteristikám, ani na hodnoty koeficientu a, ale jen na hodnoty kontrolních mezí $x_{1,2}$. Stručněji řečeno lineární kombinace $L(a; x_1, x_2)$ přechází při zpětné transformaci v lineární kombinaci $L(a; \mu_0 + x_1\sigma_0, \mu_0 + x_2\sigma_0)$.

V dalším budeme psát zkráceně φ_i, Φ_i místo $\varphi(x_i)$, $\Phi(x_i)$ $(i = 1, 2)$.

a) Hypotéza $\mu = 0$ (za předpokladu $\sigma = 1$).

Distribuční funkce náhodné proměnné X je dána vztahem (26), v němž nutno klást $\sigma = 1$. Z (27) plyne

$$p_+ = 1 - \Phi(x_1 - \mu) \,, \quad p_- = \Phi(x_2 - \mu) \tag{28}$$

a odtud dále

$$\begin{aligned} p_+|_{\mu=0} &= 1 - \Phi_1 \,, & p_-|_{\mu=0} &= \Phi_2 \,, \\ p'_+|_{\mu=0} &= \varphi_1 \,, & p'_-|_{\mu=0} &= -\varphi_2 \end{aligned} \tag{29}$$

a podle (22),(23) a (20)

$$\begin{aligned} a_{0,\mu} &= \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \,, \\ a_{\max,\mu} &= \frac{1 - \Phi_1}{\Phi_2} \cdot \frac{\varphi_1\Phi_2 - \varphi_2\Phi_1}{\varphi_1(1 - \Phi_2) - \varphi_2(1 - \Phi_1)} \,, \end{aligned} \tag{30}$$

$$e_\mu[L(a; x_1, x_2)] = \frac{n(\varphi_1 - \varphi_2 a)^2}{\Phi_1(1 - \Phi_1) - 2\Phi_2(1 - \Phi_1)\, a + \Phi_2(1 - \Phi_2)\, a^2} \,. \tag{31}$$

Z (30) a (31) plynou přímým výpočtem tyto výsledky:

A. Asymptoticky nejvydatnější lineární kombinace pro test průměru μ je (v zavedených zde souřadnicích) $L(-1; 0{,}612, -0{,}612)$, tj. rozdíl [viz (4)] při souměrných kontrolních mezích $x_{1,2} = \pm\, 0{,}612$.

B. Při dané hodnotě jedné kontrolní meze je asymptoticky nejvydatnější rozdíl se souměrně položenou druhou kontrolní mezí.

Tedy celkem

$$\begin{aligned} \max_{a, x_1, x_2} e_\mu[L(a; x_1, x_2)] &= e_\mu[L(-1; 0{,}612, -0{,}612)] \,, \\ \max_{a, x_2} e_\mu[L(a; x_1, x_2)] &= e_\mu[L(-1; x_1, -x_1)] \,, \\ \max_{a, x_1} e_\mu[L(a; x_1, x_2)] &= e_\mu[L(-1; -x_2, x_2)] \,. \end{aligned} \tag{32}$$

C. Při souměrných kontrolních mezích je $a_{0,\mu} = 1$, takže lineární kombinací s nulovou asymptotickou vydatností je součet [viz (3)].

D. Ve zvláštním případě třídění pouze podle *jedné meze* (tzn. $a = 0$ nebo $a = \pm\,\infty$) se dosáhne maximální asymptotické vydatnosti při použití kontrolní meze $x = 0$ (mediánový test).

Dále lze stanovit relativní asymptotické vydatnosti lineárních forem (17) vzhledem k výběrovému průměru $\bar{X}$, pro nějž platí (za předpokladu $\sigma = 1$) $\mathsf{E}(\bar{X}) = \mu$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\, \mathsf{E}(\bar{X}) = 1$; $\sigma^2(\bar{X}) = \frac{1}{n}$ a tedy podle (10) $e_\mu(\bar{X}) = n$, takže podle (9) a (31) je

$$\mathsf{e}_\mu[L(a;\, x_1,\, x_2),\, \overline{X})] = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2 a)^2}{\Phi_1(1 - \Phi_1) - 2\Phi_2(1 - \Phi_1)\, a + \Phi_2(1 - \Phi_2)\, a^2}\,. \tag{33}$$

Maximální relativní asymptotickou vydatnost vzhledem k výběrovému průměru má (viz výše A) rozdíl při kontrolních mezích $x_{1,2} = \pm\, 0{,}612$, a to 0,8098. Při použití širších kontrolních mezí $x_{1,2} = \pm\, 1$ je tato vydatnost rovna 0,7381. Při kontrole podle *jedné meze* x se dosáhne maximální relativní asymptotické vydatnosti vzhledem k výběrovému průměru $2/\pi = 0{,}6366$ při mediánovém testu ($x = 0$); stanoví-li se (jediná) kontrolní mez $x = 1$ nebo $x = -1$, je snížená vydatnost rovna 0,4386.

K týmž výsledkům dospějeme, nahradíme-li zde výběrový průměr $\overline{X}$ Studentovým $t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{s} \sqrt{n}$.

b) Hypotéza $\sigma = 1$ (za předpokladu $\mu = 0$).

Ze vztahů (27) vyplývá

$$p_+ = 1 - \Phi\left(\frac{x_1}{\sigma}\right), \quad p_- = \Phi\left(\frac{x_2}{\sigma}\right). \tag{34}$$

Dále je

$$\begin{aligned} p_+|_{\sigma=1} &= 1 - \Phi_1\,, & p_-|_{\sigma=1} &= \Phi_2\,, \\ p'_+|_{\sigma=1} &= x_1\varphi_1\,, & p'_-|_{\sigma=1} &= -\,x_2\varphi_2\,, \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} a_{0,\sigma} &= \frac{x_1\varphi_1}{x_2\varphi_2}\,, \\ a_{\max,\sigma} &= \frac{1 - \Phi_1}{\Phi_2} \cdot \frac{x_1\varphi_1\Phi_2 - x_2\varphi_2\Phi_1}{x_1\varphi_1(1 - \Phi_2) - x_2\varphi_2(1 - \Phi_1)}\,, \end{aligned} \tag{36}$$

$$e_\sigma[L(a;\, x_1,\, x_2)] = \frac{n(x_1\varphi_1 - x_2\varphi_2 a)^2}{\Phi_1(1 - \Phi_1) - 2\Phi_2(1 - \Phi_1)\, a + \Phi_2(1 - \Phi_2)\, a^2}\,. \tag{37}$$

Lineární kombinace (17) nyní porovnáváme co do vydatnosti s nestranným odhadem rozptylu

$$s^2 = \frac{1}{n - 1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2\,, \tag{38}$$

jehož násobek $\dfrac{(n - 1)\, s^2}{\sigma^2}$ má rozdělení χ^2 s $n - 1$ stupni volnosti, takže pro něj platí

$$\mathsf{E}(s^2) = \sigma^2\,, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\, \mathsf{E}(s^2)\bigg|_{\sigma=1} = 2\,; \quad \sigma^2(s^2)|_{\sigma=1} = \frac{2}{n - 1} \tag{39}$$

a odtud

$$e_\sigma(s^2) = 2(n - 1)\,. \tag{40}$$

Z (37) a (40) plyne podle (9)

$$\mathsf{e}_\sigma[L(a;\, x_1,\, x_2),\, s^2] = \frac{\frac{1}{2}(x_1\varphi_1 - x_2\varphi_2 a)^2}{\Phi_1(1 - \Phi_1) - 2\Phi_2(1 - \Phi_1)\, a + \Phi_2(1 - \Phi_2)\, a^2}\,. \tag{41}$$

Uvedeme zde tyto důsledky:

Součet při souměrných kontrolních mezích $x_{1,2} = \pm 1{,}482$ dosahuje maximální asymptotické vydatnosti, která vzhledem k výběrové charakteristice s^2 je podle (41) rovna 0,6522. Vůbec při souměrných kontrolních mezích je součet nejvydatnější lineární kombinací, kdežto asymptotická vydatnost *rozdílu* je právě naopak nulová.

Součet při kontrolních mezích $x_{1,2} = \pm 1$ má relativní asymptotickou vydatnost 0,5406.

Při použití *jedné kontrolní meze* x je nejvyšší relativní asymptotická vydatnost (Z_+ nebo Z_- vzhledem k s^2) rovna 0,3042, a to v případě $|x| = 1{,}576$.

Pro libovolné *souměrné* rozdělení s parametrem polohy Θ_1 a rozptylu Θ_2 (tj. $F(x; \Theta_1, \Theta_2) = 1 - F(2\Theta_1 - x; \Theta_1, \Theta_2)$ pro všechna x) zůstávají v platnosti obecné závěry o maximální resp. minimální (nulové) asymptotické vydatnosti rozdílu a součtu. Naproti tomu ovšem optimální kontrolní meze, relativní asymptotické vydatnosti atd. závisejí na zákonu rozdělení náhodné proměnné X.

Asymptotickou vydatnost součtu (pro test parametru rozptylu souměrného rozdělení) nelze zvýšit ani tím, že by se součet $Z(x, -x)$ nahradil *kvadratickou funkcí*

$$Q(b_1, b_2; x) = Z_+^2 + Z_-^2 + b_1 Z_+ Z_- + b_2(Z_+ + Z_-)\,, \tag{42}$$

kde je $Z_+ = Z_+(x)$, $Z_- = Z_-(-x)$. Výpočtem lze totiž ověřit, že relativní asymptotická vydatnost kvadratické funkce (42) vzhledem k součtu s týmiž kontrolními mezemi $\pm x$ je rovna jedné, a to nezávisle na volbě koeficientů b_1, b_2.

Porovnání výsledků odst. 2 a 3 s příslušnými výsledky Stevensovy práce [1] lze shrnout takto:

Postup, jímž se podle [1] (odst. 9.1) při daných kontrolních mezích stanoví koeficient a, který je optimální (vzhledem k odhadu parametru), vede k závěru, že pro odhad parametru Θ_1 (Θ_2) je optimální nikoli $a_{\max,\Theta_1(\Theta_2)}$, nýbrž $a_{0,\Theta_2(\Theta_1)}$. Při testu nulové hypotézy o parametru by tedy tento postup vedl k použití lineární kombinace, která je asymptoticky nejméně citlivá vůči druhému parametru, avšak obecně nikoli nejvydatnější pro parametr testovaný.

Stevens rovněž uvádí ([1], tab. III a IV spolu s grafickým znázorněním na obr. 4 a 5) pro různé kombinace hodnot p_+ a p_- relativní asymptotické vydatnosti (vzhledem k $\bar{X}$ resp. s^2) lineárních kombinací (17) s koeficientem a stanoveným, jak bylo uvedeno.

Rozdílnost v závěrech o optimální lineární kombinaci (17) je způsobena tím, že Stevens považuje *oba* parametry μ, σ zároveň za neznámé a hledá jejich *odhady* pomocí lineárních kombinací (2) (viz [1], odst. 7.2 a 7.4). Naproti tomu cílem, k němuž směřuje použití věty Pitmanovy, je získání nejvydatnějšího *testu* hypotézy o *jednotlivém* parametru.

4. SKUPINOVÉ TESTY PARAMETRŮ EXPONENCIÁLNÍHO ROZDĚLENÍ

Exponenciální rozdělení náhodné proměnné X budeme definovat distribuční funkcí

$$\begin{aligned} F(x; \mu, \sigma) &= 1 - e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}} \quad (x \geqq \mu)\,, \\ &= 0 \qquad\qquad (x \leqq \mu)\,. \end{aligned} \tag{43}$$

Parametr polohy μ je roven dolní hranici variačního oboru, jak vyplývá přímo z definice (43), a parametr σ je roven směrodatné odchylce. Funkce hustoty pravděpodobnosti, střední hodnota a rozptyl náhodné proměnné X jsou

$$\begin{aligned} f(x; \mu, \sigma) &= \frac{1}{\sigma}\, e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}} \quad (x > \mu)\,, \\ &= 0 \qquad\qquad (x < \mu)\,, \end{aligned} \tag{44}$$

$$\mathsf{E}(X) = \mu + \sigma\,, \tag{45}$$

$$\sigma^2(X) = \sigma^2\,. \tag{46}$$

Při skupinových testech se zřejmě můžeme omezit na volbu kontrolních mezí x_1, x_2 takových, že je $\mu \leqq x_2 < x_1$. Za tohoto předpokladu budou platit podle (5), (6) a (43) vztahy

$$\begin{aligned} p_+ &= 1 - F(x_1; \mu, \sigma) = e^{-\frac{x_1-\mu}{\sigma}}\,, \\ p_- &= F(x_2; \mu, \sigma) = 1 - e^{-\frac{x_2-\mu}{\sigma}}\,. \end{aligned} \tag{47}$$

Souřadnice hodnot náhodné proměnné zvolíme opět jako v předešlém případě normálního rozdělení tak, že testované nulové hypotézy budou: 1. $\mu = 0$ za předpokladu $\sigma = 1$ a 2. $\sigma = 1$ za předpokladu $\mu = 0$.

a) Hypotéza $\mu = 0$ (za předpokladu $\sigma = 1$).

Ze vztahů (47) vyplývá

$$p_+ = e^{-(x_1-\mu)}\,, \quad p_- = 1 - e^{-(x_2-\mu)} \tag{48}$$

a odtud

$$\begin{aligned} p_+|_{\mu=0} &= e^{-x_1}\,, \quad p_-|_{\mu=0} = 1 - e^{-x_2}\,, \\ p'_+|_{\mu=0} &= e^{-x_1}\,, \quad p'_-|_{\mu=0} = -\,e^{-x_2}\,, \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} a_{0,\mu} &= \frac{e^{-x_1}}{e^{-x_2}}\,, \\ a_{\max,\mu} &= \pm\,\infty\,, \end{aligned} \tag{50}$$

$$e_\mu[L(a; x_1, x_2)] = \frac{n(e^{-x_1} - e^{-x_2}\,a)^2}{e^{-x_1}(1 - e^{-x_1}) - 2e^{-x_1}(1 - e^{-x_2})\,a + e^{-x_2}(1 - e^{-x_2})\,a^2}\,. \tag{51}$$

Podle (50) je při dvou kontrolních mezích x_1, x_2 nejvydatnější test pomocí výběrové charakteristiky $Z_-(x_2)$, tj. s použitím pouze jedné, a to dolní kontrolní meze. Odtud plyne dále, že asymptotická vydatnost při tomto testu je nerostoucí funkcí x, kde x je kontrolní mez, a dále podle (51) je (pro $a = \pm \infty$)

$$\lim_{x \to 0+} e_\mu[Z_-(x)] = \pm \infty . \tag{52}$$

Skupinový test parametru μ je tedy optimální při třídění podle jedné meze, položené do testované hodnoty průměru ($x = 0$). Je zřejmé, že nulová hypotéza se zamítá v případě $z_- \geqq 1$. Tedy tento test je vlastně totožný s testem hypotézy $\mu = 0$ proti alternativní $\mu < 0$ pomocí nejmenší výběrové hodnoty s nulovým risikem chyby I. druhu. (Omezení na alternativní hypotézu $\mu < 0$ není v praxi na závadu, neboť o takové testy většinou jde, např. při ověřování požadované minimální životnosti výrobku.)

Je-li ξ nejmenší hodnota náhodné proměnné X ve výběru rozsahu n, platí pro její momenty vztahy

$$\mathsf{E}(\xi) = \mu + \frac{\sigma}{n}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \mathsf{E}(\xi) = 1 ; \quad \sigma^2(\xi) = \frac{\sigma^2}{n^2}, \tag{53}$$

takže je

$$e_\mu(\xi) = n^2 \tag{54}$$

a tedy podle (9) a (51)

$$\mathrm{e}_\mu[L(a; x_1, x_2), \xi] = 0 \tag{55}$$

při jakkoli pevně zvolených x_1, x_2, a takových, že výraz (51) je řádu $O(n)$.

b) Hypotéza $\sigma = 1$ (za předpokladu $\mu = 0$).

Ze vztahů (47) vyplývá

$$p_+ = e^{-\frac{x_1}{\sigma}}, \quad p_- = 1 - e^{-\frac{x_2}{\sigma}}, \tag{56}$$

takže je

$$\begin{aligned} p_+|_{\sigma=1} &= e^{-x_1}, \quad & p_-|_{\sigma=1} &= 1 - e^{-x_2}, \\ p'_+|_{\sigma=1} &= x_1 e^{-x_1}, \quad & p'_-|_{\sigma=1} &= - x_2 e^{-x_2}, \end{aligned} \tag{57}$$

$$a_{0,\sigma} = \frac{x_1 e^{-x_1}}{x_2 e^{-x_2}}, \tag{58}$$

$$a_{\max,\sigma} = \frac{x_1 e^{-x_1}(1 - e^{-x_2}) - x_2 e^{-x_2}(1 - e^{-x_1})}{(x_1 - x_2)\, e^{-x_2}\, (1 - e^{-x_2})}, \tag{58}$$

$$e_\sigma[L(a; x_1, x_2)] = \frac{n(x_1 e^{-x_1} - x_2 e^{-x_2} a)^2}{e^{-x_1}(1 - e^{-x_1}) - 2e^{-x_1}(1 - e^{-x_2})a + e^{-x_2}(1 - e^{-x_2})\, a^2}. \tag{59}$$

Maxima výrazu (59) je dosaženo při hodnotách $x_1 = 2{,}59$, $x_2 = 1{,}01$, $a = -0{,}5924$. Test podle *jedné meze* x je asymptoticky nejvydatnější při $x = 1{,}59$.

Výběrový průměr $\overline{X}$ má podle (45) a (46) momenty

$$\mathsf{E}(\overline{X}) = \mu + \sigma , \quad \sigma^2(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}, \tag{60}$$

takže je

$$e_\sigma(\overline{X}) = n\,. \tag{61}$$

Ze vztahů (59) a (61) pak podle (9) vyplývá pro maximální relativní asymptotickou vydatnost vzhledem k $\overline{X}$ při testu podle dvou kontrolních mezí

$$\mathrm{e}_\sigma[L(-0{,}5924;\, 2{,}59,\, 1{,}01),\, \overline{X}] = 0{,}8215^-$$

a při testu podle jedné kontrolní meze

$$\mathrm{e}_\sigma[Z_\pm(1{,}59),\, \overline{X}] = 0{,}5155^+\,.$$

5. POZNÁMKY K NĚKTERÝM APLIKACÍM

Pro aplikaci skupinového testu ve statistické kontrole jakosti za předpokladu normálního rozdělení výrobních chyb stanoví čs. státní norma [5] kontrolní meze $\mu_0 \pm \sigma_0$ (tj. $x_{1,2} = \pm 1$). Je to hlavně z těchto důvodů: 1. Další zúžení kontrolních mezí (k dosažení větší vydatnosti pro test průměru μ) by ve většině případů ve strojírenské výrobě nebylo možné, a to vzhledem k její přesnosti. 2. Takto stanovené kontrolní meze slouží k testům obou parametrů; jsou proto voleny jako kompromis mezi kontrolními mezemi $x_{1,2} = \pm 0{,}612$, nejlepšími pro test průměru μ, a kontrolními mezemi $x_{1,2} = \pm 1{,}482$, nejlepšími pro test směrodatné odchylky σ.

O skupinových testech parametrů normálního rozdělení při běžných malých rozsazích výběru pojednává práce [3], jejíchž některých výsledků bylo použito jednak na příslušném místě normy [5], jednak při vývoji zařízení pro mechanisaci statistické regulace (viz [6] a [7]).

Z jiných vhodných aplikací skupinového testu lze uvést např. zkoušky odolnosti součástí vůči cyklickému namáhání. Rozdělení života součásti (tj. času od počátku zkoušky až do selhání) lze při nich většinou s dostatečnou přesností aproximovat exponenciálním rozdělením s distribuční funkcí (43). (K těmto otázkám viz blíže [8].) Skupinový test má zde dvě výhody: 1. maximální čas jednotlivé zkoušky, nutný pro získání výsledku k testu, je vždy shora omezen hodnotou x_1 (horní kontrolní mez) a 2. nevyžaduje se znalost přesných hodnot životů, nýbrž jen situace ve dvou časových okamžicích x_2 a x_1.

Literatura

[1] *Stevens:* Control by Gauging. Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B, vol. X, No 1, 1948, pp. 54–98.

[2] *Sedláček:* Neparametrické jakostní třídění. Výzkumná zpráva VT-Z-5216, Praha 1952.

[3] *Režný:* Skupinová metoda statistické regulace měřitelného znaku. Výzkumná zpráva VÚTT-57-01016, Praha 1957.

[4] *Fraser:* Nonparametric Methods in Statistics. John Wiley & Sons, New York 1957.

[5] ČSN 01 0265 Statistická regulace.

[6] *Hrabák:* Zařízení pro mechanisaci statistické regulace metodou skupinovou. Výzkumná zpráva VÚTT-56-01030, Praha 1956.

[7] *Hrabák, Osvald:* Způsob a zařízení pro mechanisaci statistické skupinové metody. Výzkumná zpráva VÚTT-57-01017, Praha 1957.

[8] *Sedláček:* Statistické metody vymezování základní dynamické únosnosti ložisek se zaměřením na zkracování zkoušek životnosti. Výzkumná zpráva SVÚTT-58-01005, Praha 1958.

Резюме

ГРУППОВЫЕ ПРОВЕРКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ ПО ДВУМ КОНТРОЛЬНЫМ ПРЕДЕЛАМ

ЗДЕНЕК РЕЖНЫ (Zdeněk Režný)

(Поступило в редакцию 5/IX 1958 г.)

Если распределение случайной переменной X зависит только от двух параметров, определяющих его положение и рассеяние, то можно — как показал Стивенс в работе [1] — проверять нулевые гипотезы об этих параметрах с помощью линейных комбинаций вида

$$a_1 Z_+(x_1) + a_2 Z_-(x_2)\,,$$

где x_1 и x_2 — контрольные пределы, $(x_1 > x_2)$, $Z_+(x_1)$ и $Z_-(x_1)$ — числа выборочных значений $x > x_1$ и $x < x_2$.

В статье изложен новый метод построения оптимальных линейных комбинаций приведенного вида путем максимализации асимптотической эффективности.

Конкретное решение этой задачи произведено для случаев нормального и экспоненциального распределений случайной переменной X вместе с вычислением относительной асимптотической эффективности по отношению к наилучшим выборочным характеристикам.

В конце статьи отмечены некоторые практические применения полученных результатов, касающиеся главным образом статистического контроля качества и его механизации и испытаний долговечности.

Summary

ON TESTS OF STATISTICAL HYPOTHESES BY GAUGING WITH RESPECT TO TWO LIMITS

Zdeněk Režný

(Received September 5th, 1958.)

Let a random variable have a distribution depending on only two parameters, one of them indicating the location and the other the scaling of the distribution. As Stevens has shown in [1], the null hypothesis concerning each of these parameters may be tested by means of a linear combination

$$a_1 Z_+(x_1) + a_2 Z_-(x_2) ,$$

where $Z_+(x_1)$ and $Z_-(x_2)$ are the numbers of sample values $x > x_1$ and $x < x_2$ respectively ($x_1 > x_2$ being referred to as the gauging limits).

In the paper a new method is proposed of obtaining the optimum linear combination of the type described, by maximalising its asymptotic efficiency. Then, these optimum characteristics for the cases of normal and exponential distributions are found, and their relative asymptotic efficiency with respect to the best sample characteristics is evaluated. Finally, there are mentioned some practical applications of the results obtained, mainly concerning statistical quality control and its mechanisation and life testing.