František Nožička

Fundamentální principy mechaniky a jejich ekvivalence

Aplikace matematiky, Vol. 4 (1959), No. 4, 243–277

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102668`

SVAZEK 4 (1959) APLIKACE MATEMATIKY ČÍSLO 4

ČLÁNKY

FUNDAMENTÁLNÍ PRINCIPY MECHANIKY A JEJICH EKVIVALENCE

FRANTIŠEK NOŽIČKA

DT: 531.01

(Došlo dne 10. března 1958.)

V práci se odvozují fundamentální pohybové rovnice soustavy hmotných bodů podrobených holonomním vazbám cestou geometrické interpretace a metodou tensorového počtu za striktní formulace předpokladů. Různými vhodnými přepisy těchto fundamentálních rovnic se dochází ke známým diferenciálním principům mechaniky a prokazuje se jejich vzájemná ekvivalence.

Klasická mechanika opírající se o Newtonovy zákony je velmi propracovanou disciplinou teoretické fysiky a je zachycena v řadě encyklopedických prací, učebnicové literatuře, monografiích, souborných článcích a speciálních vědeckých publikacích. Principy mechaniky jsou v této literatuře uváděny a dokazovány různým způsobem.

Účelem tohoto článku je *odvození fundamentálních pohybových rovnic pro soustavu hmotných bodů podrobených holonomním vazbám* cestou vhodné geometrické interpretace, dále odvodit nejznámější přepisy těchto pohybových rovnic a prokázat jejich ekvivalenci ve smyslu v práci uvedeném. Užívá se přitom metody tensorového počtu, tj. téže metody, s kterou se např. pracuje v teorii relativity. Článek je tedy též ukázkou, jak lze využít tensorového počtu v klasické dynamice a čtenář, obeznámen s tímto postupem v klasické mechanice, seznámí se pak velmi snadno s pracovní metodou ve speciální i obecné teorii relativity.

Autor se omezuje v článku pouze na diferenciální principy dynamiky soustav hmotných bodů pro případ holonomních vazeb. Je velmi snadné použít analogického postupu pro případ tzv. anholonomních vazeb. Po úvodním odstavci 1, v němž jsou citována ta nejzákladnější data z teorie m-rozměrných variet v n-rozměrném euklidovském prostoru, vyslovuje se v odstavci 2 základní fysikální princip (axiomatického charakteru), který je v podstatě d'Alembertovým zákonem ve slovní formulaci. Na basi tohoto principu se odvozují fundamentální pohybové rovnice (2, 15) pro soustavu hmotných bodů o daném počtu stupňů volnosti, jejichž různé ekvivalentní přepisy jsou diskutovány v odstavci 3 (d'Alembertův princip, Lagrangeovy rovnice I. a II. druhu, Gaussův princip, Hamiltonovy kanonické rovnice).

Autor se vyhýbá důsledně některým obvykle užívaným pojmům (jako virtuální posuv, neoprávněně používaný pojem variace, variované cesty, virtuální práce, nekonečně malé veličiny aj.), které nejsou ani ryze matematické ani ryze fysikální a jejichž účelnost pro dosažení vytčeného cíle je pochybná.

1. NĚKTERÉ POJMY Z GEOMETRIE m-ROZMĚRNÝCH REGULÁRNÍCH VARIET v n-ROZMĚRNÉM EUKLIDOVSKÉM PROSTORU

Nechť x^A $(A = 1, \ldots, n)$ jsou pravoúhlé kartézské souřadnice v n-rozměrném euklidovském prostoru E_n. Budiž dáno n reálných funkcí $x^A(\eta^a)$ $(A = 1, \ldots, n)$ m reálných proměnných η^a $(a = 1, \ldots, m)$, přičemž $1 \leq m < n$. Předpokládejme:

(I) $x^A(\eta^a)$ mají spojité parciální derivace aspoň druhého řádu v oblasti O proměnných η^a[1])

(II) Matice z elementů

$$B_a^A \equiv \frac{\partial x^A}{\partial \eta^a}, \tag{1,1}$$

tj. matice

$$\begin{pmatrix} B_1^1 \, B_1^2 \; \ldots\ldots \; B_1^n \\ B_2^1 \, B_2^2 \; \ldots\ldots \; B_2^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_m^1 \, B_m^2 \ldots\ldots \; B_m^n \end{pmatrix} \tag{1,2}$$

má v každém bodě $\eta^a \in O$[2]) hodnost m.

Potom říkáme, že rovnicemi

$$x^A = x^A(\eta^a)\,, \quad A = 1, \ldots, n \tag{1,3}$$

je v E_n parametricky popsána *m-rozměrná regulární varieta druhé třídy*. Proměnné $\eta^a (a = 1, \ldots, m)$ nazýváme parametry, oblast O pak definičním oborem této variety.

Varietu s popisem (1,3) budeme v dalším označovat symbolem V_m.

---

[1]) O je m-rozměrná oblast v lineárním prostoru E_m o pravoúhlých kartézských souřadnicích η^a $(a = 1, \ldots, m)$.

[2]) Místo „bod o souřadnicích η^a $(a = 1, \ldots, m)$ v O" říkáme stručněji „bod $\eta^a \in O$".

Budiž $\underset{0}{\eta^a} \in O$. Potom rovnicemi

$$x^A = x^A(\underset{0}{\eta^1}, \underset{0}{\eta^2}, \ldots, \underset{0}{\eta^{a-1}}, \eta^a, \underset{0}{\eta^{a+1}}, \ldots, \underset{0}{\eta^m}) \tag{1,4}$$

je popsána v E_n regulární křivka druhé třídy[3]), která patří k varietě V_m a která prochází bodem $\underset{0}{x^A} = x^A(\underset{0}{\eta^a})$ variety V_m. Tuto křivku nazýváme *parametrickou η^a-křivkou* ($a \in 1, \ldots, m$) procházející bodem $\underset{0}{x^A} = x^A(\underset{0}{\eta^a})$ variety V_m. Veličina B^A_a z definičních rovnic (1,1) v bodě $\underset{0}{\eta^a}$ jest tečným vektorem parametrické η^a-křivky v tomto bodě (jak je z (1,4) zřejmé). Každým bodem $\eta^a \in O$ prochází tedy m parametrických křivek o tečných vektorech B^A_a, $a = 1, \ldots, m$ v tomto bodě. Z předpokladu (II) vyplývá, že vektory $B^A_1, B^A_2 \ldots, B^A_m$ jsou nezávislé v každém bodě $\eta^a \in O$ a definují tedy v každém takovém bodě variety V_m určitý m-rozměrný lineární podprostor ${}^TE_m$ prostoru E_n, který nazýváme *tečným prostorem variety* V_m.

Nechť g_{AB} ($A, B = 1, \ldots, n$) je tzv. metrický tensor prostoru E_n, tj. systém veličin takto definovaných

$$g_{AB} = \left\langle \begin{array}{ll} 1 & \text{pro} \quad A = B\,, \\ 0 & \text{pro} \quad A \neq B\,. \end{array} \right.$$

Potom *prvým metrickým tensorem variety* V_m nazýváme soubor elementů

$${}^*g_{ab} = B^A_a B^C_b g_{AC}\,, \tag{1,5}$$

kde sčítáme ve smyslu Einsteinovy konvence přes indexy A, C od jedné do n. Této Einsteinovy konvence se budeme v celém dalším textu vždy přidržovat. Z předpokladu (II) plyne snadno, že tensor ${}^*g_{ab}$ (který je zřejmě tensorem symetrickým), je positivně definitní, tj. ${}^*g_{ab}y^a y^b > 0$ pro každou m-tici $(y^1, y^2, \ldots$ $\ldots, y^m)$, pro kterou $\sum_{a=1}^{m} (y^a)^2 > 0$. Za těchto okolností jsou systémem rovnic

$${}^*g^{ac}\,{}^*g_{cb} = \delta^a_b \left(\delta^a_b = \left\langle \begin{array}{ll} 1 & \text{pro} \quad a = b \\ 0 & \text{pro} \quad a \neq b \end{array} \right.\right) \tag{1,6}$$

jednoznačně definovány veličiny ${}^*g^{ac}$($a, c = 1, \ldots, m$). Soubor těchto veličin se nazývá kontragredientním tensorem k tensoru ${}^*g_{ab}$. Tensor ${}^*g^{ab}$ je rovněž symetrický, tj. ${}^*g^{ab} = {}^*g^{ba}$.

Podobně jako u plochy v E_3 definujeme elementy

$$\begin{Bmatrix} c \\ ab \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\, {}^*g^{cd}(\partial_a {}^*g_{db} + \partial_b {}^*g_{ad} - \partial_d {}^*g_{ab})^{4)}\,, \tag{1,6}$$

jejichž soubor nazýváme *metrickou konexí variety* V_m.

---

[3]) Tj. regulární křivka druhé třídy v E_n ve smyslu Gaussovy definice.

[4]) $\partial_a {}^*g_{db} = \dfrac{\partial}{\partial \eta^a}\, {}^*g_{db}$.

Definujme vektor $\underset{s}{T}_A$ systémem rovnic

$$B_a^A \underset{s}{T}_A = 0\,, \quad a = 1, \ldots, m\,. \tag{1,7}$$

Z našeho předpokladu (II) a ze známé věty z lineární algebry plyne, že vždy existuje (v každém bodě variety V_m) $n - m$ lineárně nezávislých vektorů $\underset{s}{T}_A$ $(s = 1, \ldots, n - m)$, které jsou řešením rovnic (1, 7) a že každé řešení T_A rovnic (1, 7) lze psát jako lineární kombinaci vektorů $\underset{s}{T}_A$, tj.

$$T_A = \sum_{s=1}^{n-m} \underset{s}{\mu} \underset{s}{T}_A \quad (A = 1, \ldots, n)\,, \tag{1,8}$$

kde $\underset{s}{\mu}$ jsou koeficienty této lineární kombinace.

Definujme v E_n vektory

$$\underset{s}{N}^A \equiv g^{AB} \underset{s}{T}_B{}^{5)}\,. \tag{1,9}$$

Vektory $\underset{s}{N}^A$, $s = 1, \ldots, n - m$ jsou v každém bodě variety V_m nezávislé a definují tedy v každém tomto bodě určitý lineární podprostor ${}^N E_{n-m}$ (dimense $n - m$) prostoru E_n, který nazýváme *normálním prostorem variety* V_m v uvažovaném jejím bodě.

Z (1,9), (1,7) plyne

$$g_{AC} B_a^A \underset{s}{N}^C = 0\,, \quad s = 1, \ldots, n - m\,, \tag{1,10}$$

tj. vektory $\underset{s}{N}^A (s = 1, \ldots, n - m)$ jsou kolmé k vektorům $B_a^A (a = 1, \ldots, m)$ v bodě variety V_m, tj. každý vektor $\underset{s}{N}^A$ je kolmý k tečnému prostoru ${}^T E_m$ v bodě variety V_m. Odtud a z předchozího plyne, že též každý vektor

$$N^A \equiv \sum_{s=1}^{n-m} \underset{s}{\mu} \underset{s}{N}^A \tag{1,11}$$

je v uvažovaném bodě kolmý k tečnému lineárnímu prostoru E_m. Není na újmu obecnosti, jestliže vektory $\underset{s}{N}^A$ budeme volit tak, aby byly splněny podmínky[6])

$$g_{AB} \underset{s}{N}^A \underset{r}{N}^B = \delta_{sr} \quad (s, r = 1, \ldots, n - m)\,, \tag{1,12}$$

což je ekvivalentní s předpokladem, že vektory $\underset{s}{N}^A$ $(s = 1, \ldots, n - m)$ jsou jednotkové a vzájemně kolmé.

---

[5]) Složky vektorů $\underset{s}{N}^A$ jsou v témže systému souřadném numericky tytéž jako složky vektoru $\underset{s}{T}_A$ $\left(\text{zde je opět } g^{AB} \equiv < \begin{matrix} 1 \text{ pro } A = B \\ 0 \text{ pro } A \neq B \end{matrix}\right)$.

[6]) $\delta_{rs} = < \begin{matrix} 1 \text{ pro } s = r\,, \\ 0 \text{ pro } s \neq r\,. \end{matrix}$

Libovolný vektor U^A v bodě x^A variety V_m můžeme pak psát jako lineární kombinaci vektorů $B_a^A(a = 1, \ldots, m)$, $\underset{s}{N^A}(s = 1, \ldots, n - m)$; tedy

$$U^A = B_a^A u^a + \sum_{s=1}^{n-m} \underset{s}{r} \underset{s}{N^A} ,$$

kde u^a, $\underset{s}{r}$ jsou koeficienty příslušné lineární kombinace.

Při pevných indexech a, b lze též vektor

$$\partial_b B_a^A \equiv \frac{\partial}{\partial \eta^b} B_a^A$$

psát jako lineární kombinaci vektorů B_a^A, $\underset{s}{N^A}$ v uvažovaném bodě variety V_m, tj.

$$\partial_b B_a^A = \Lambda_{ab}^c B_c^A - \sum_{s=1}^{n-m} \underset{s}{h_{ab}} \underset{s}{N^A} .$$

Z diferenciální geometrie je známo, že pro koeficienty Λ_{ab}^c, $\underset{s}{h_{ab}}$ této lineární kombinace platí

$$\Lambda_{ab}^c = \begin{Bmatrix} c \\ ab \end{Bmatrix}, \quad \underset{s}{h_{ab}} = - \underset{s}{N^A}(\partial_a B_b^C)\, g_{AC} , \tag{1,13}$$

tj. platí formule

$$\partial_b B_a^A = \begin{Bmatrix} c \\ ab \end{Bmatrix} B_c^A - \sum_{s=1}^{n-m} \underset{s}{h_{ab}}\, \underset{s}{N^A}. \tag{1,14}$$

Tato formule se nazývá *Gaussovou formulí pro varietu V_m v E_n*.

Definujme ještě elementy B_A^a takto:

$$B_A^a B_b^A = \delta_b^a \quad \left(\delta_b^a = \left\langle \begin{matrix} 1 \text{ pro } a = b \\ 0 \text{ pro } a \neq b \end{matrix} \right.\right) a, b = 1, \ldots, m ,$$

$$B_A^a \underset{s}{N^A} = 0 , \quad s = 1, \ldots, n - m . \tag{1,15}$$

Dá se snadno ukázat, že elementy B_A^a jsou rovnicemi (1,15) jednoznačně definovány a že vyhovují následujícím relacím:

$$B_A^a = g_{AC} B_b^C {}^* g^{ba} , \tag{1,16)$_a$}$$

$$B_A^a B_a^C = \delta_A^C - \sum_{s=1}^{n-m} \underset{s}{T_A} \underset{s}{N^C} . \tag{1,16)$_b$}$$

Pojmy a relace, které jsme v předchozím uvedli z teorie m-rozměrných regulárních variet v E_n, budou účelné pro další naše teoreticko-fysikální úvahy. Přitom jsme vycházeli z předpokladu, že varieta je dána parametrickým popisem (1,3). Vedle parametrického popisu m-rozměrné variety bude pro další naše úvahy účelné uvést tzv. implicitní definici regulární m-rozměrné variety v E_n.

Budiž dáno $n - m$ $(1 \leqq n - m < n)$ funkcí

$$\underset{s}{F}(x^A), \quad s = 1, \ldots, n - m,$$

o nichž budeme předpokládat:

(1) $\underset{s}{F}(x^A)$ $(s = 1, \ldots, n - m)$ jsou definovány v určitém okolí $U(\underset{0}{x^A})$ bodu $\underset{0}{x^A} \in E_n$ a mají v tomto okolí spojité parciální derivace podle svých argumentů $x^A (A = 1, \ldots, n)$ aspoň druhého řádu.

(2) Jest $\underset{s}{F}(\underset{0}{x^A}) = 0$ pro $s = 1, \ldots, n - m$.

(3) Matice

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \underset{1}{F}}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \underset{1}{F}}{\partial x^2} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{\partial \underset{1}{F}}{\partial x^n} \\ \dfrac{\partial \underset{2}{F}}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \underset{2}{F}}{\partial x^2} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{\partial \underset{2}{F}}{\partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \underset{n-m}{F}}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \underset{n-m}{F}}{\partial x^2} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{\partial \underset{n-m}{F}}{\partial x^n} \end{pmatrix} \tag{1,17}$$

má v bodě $\underset{0}{x^A}$ maximální možnou hodnost, tj. $n - m$.

Za těchto předpokladů říkáme, že systémem rovnic

$$\underset{s}{F}(x^A) = 0, \quad s = 1, \ldots, n - m \tag{1,18}$$

je implicitně — v okolí bodu $\underset{0}{x^A} \in E_n$ — definována regulární varieta druhé třídy (Mongeova definice).

Ze známé věty z teorie implicitních funkcí a z předchozích našich předpokladů (1), (2), (3) vyplývá, že z rovnic (1,18) můžeme (lokálně — v dostatečně malém okolí bodu $\underset{0}{x^A}$) vypočítat $n - m$ neznámých x, jakožto funkce zbývajících m proměnných x. Není na újmu obecnosti, jestliže předpokládáme, že determinant $(n - m)$-tého stupně utvořený z posledních $n - m$ sloupců matice (1,17) je od nuly různý. Potom můžeme (lokálně — v dostatečně malém okolí bodu $\underset{0}{x^A}$) teoreticky místo systému (1,18) psát ekvivalentní systém rovnic

$$\begin{aligned} x^{m+1} &= x^{m+1}(x^1, \ldots x^m), \\ x^{m+2} &= x^{m+2}(x^1, \ldots, x^m), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^n &= x^n(x^1, \ldots, x^m). \end{aligned} \tag{1,19}$$

Přimyslíme-li k systému rovnic (1,19) identity $x^A = x^A (A = 1, \ldots, m)$, potom je zřejmé, že rovnice (1,19) spolu s uvedenými identitami jsou lokálním speciálním parametrickým popisem téže m-rozměrné variety, která je implicitně popsána relacemi (1,18). Ze shora citované věty plyne též ihned, že varieta popsaná relacemi (1,19) jest regulární m-rozměrnou varietou druhé třídy ve smyslu dříve uvedené parametrické definice.

Z předchozího je evidentní, že v případě, kdy jde o m rozměrnou varietu v E_n implicitně popsanou rovnicemi (1,18) při platnosti předpokladů (1), (2), (3) o funkcích $\underset{s}{F}(x^A)$, je možné vždy myslet si pro takovouto varietu její speciální parametrický popis. Teorie vycházející z parametrického popisu (1, 3) m-rozměrných variet v E_n se vztahuje tedy (pokud se omezujeme jen na lokální vlastnosti) též na variety implicitně popsané, jestliže dosažené výsledné formule vhodně přepíšeme.

Za uvedených předpokladů je každou z relací v (1,18), tj. relací

$$\underset{s}{F}(x^A) = 0\,, \quad (s \in 1, \ldots, n - m)$$

lokálně popsána regulární nadplocha (tj. varieta dimense $n - 1$) ve V_n. Vektor

$$\underset{s}{F}{}^A \equiv g^{AB} \frac{\partial \underset{s}{F}}{\partial x^B} \tag{1,20}$$

je vektorem ve směru normály této nadplochy v uvažovaném jejím bodě. Vektory $\underset{s}{F}{}^A (s = 1, \ldots, n - m)$ definují pak jednoznačně normální prostor ${}^N E_{n-m}$ variety V_m (popsané relacemi (1,18)) v každém jejím bodě.

Tím jsme vyčerpali ta nejnutnější data o m-rozměrných varietách v E_n, která nám budou v dalším užitečná. Zbývá nám ještě pojednat s hlediska matematického o regulární křivce druhé třídy na m-rozměrné varietě V_m.

Nechť rovnicemi (1,3) je parametricky popsána regulární varieta druhé třídy v E_n v nějaké oblasti $O \subset E_m$ parametrů η^{a1}). Buďtež dále dáno m reálných funkcí $\eta^a(t)$ reálného parametru t, které vyhovují těmto předpokladům:

(α)$\eta^a(t)$ ($a = 1, \ldots, m$) mají spojité derivace aspoň druhého řádu podle t v nějakém intervalu I (uzavřeném, otevřeném nebo polootevřeném) parametru t.

(β) Derivace $\dfrac{d\eta^a}{dt}$ ($a = 1, \ldots, m$) nejsou současně rovny nule pro každé $t \in I$.

(γ) Pro každé $t \in I$ je bod $\eta^a = \eta^a(t)$ bodem oblasti $O \subset E_m$ (tedy bodem z definičního oboru funkcí $x^A(\eta^a)$).

Za platnosti těchto předpokladů je rovnicemi

$$x^A = x^A(\eta^a(t))\,, \quad t \in I \;\; (A = 1, \ldots, n) \tag{1,21}$$

popsána v E_n regulární křivka druhé třídy, která leží ve varietě popsané rovnicemi (1,3).

Tečný vektor křivky (1,21) je vektor v E_n o složkách $v^A \equiv \dfrac{dx^A}{dt}$ $(A = 1, \ldots$ $\ldots, n)$ s počátečním bodem v uvažovaném bodě dané křivky. Pro tento vektor plyne z (1,21) a (1,1)

$$v^A \equiv \frac{dx^A}{dt} = B^A_a \frac{d\eta^a}{dt}. \tag{1,22}$$

Pro absolutní velikost tohoto vektoru plyne z (1,22) a (1,5)

$$|v| \equiv \sqrt{g_{AC} \frac{dx^A}{dt} \frac{dx^C}{dt}} = \sqrt{{}^*g_{ab} \frac{d\eta^a}{dt} \frac{d\eta^b}{dt}}. \tag{1,23}$$

Oblouk $s = s(t)$ křivky (1,21) je pak definován následujícím běžným způsobem

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{{}^*g_{ab} \frac{d\eta^a}{dt} \frac{d\eta^b}{dt}}\, dt\,, \quad t \in I\,, \tag{1,24}$$

kde t_0 je pevně zvolená hodnota z intervalu I.

Pro vektor $\dfrac{d^2x^A}{dt^2}$ plyne z (1,22), (1,14)

$$\frac{d^2x^A}{dt^2} = (\partial_b B^A_a) \frac{d\eta^b}{dt} \frac{d\eta^a}{dt} + B^A_a \frac{d^2\eta^a}{dt^2} = \left[B^A_c \begin{Bmatrix} c \\ ab \end{Bmatrix} - \sum_{s=1}^{n-m} \underset{s}{h}_{ab} \underset{s}{N}^A\right] \frac{d\eta^a}{dt} \frac{d\eta^b}{dt} + B^A_a \frac{d^2\eta^a}{dt^2}\,;$$

tedy po úpravě

$$\frac{d^2x^A}{dt^2} = B^A_c \left(\frac{d^2\eta^c}{dt^2} + \begin{Bmatrix} c \\ ab \end{Bmatrix} \frac{d\eta^a}{dt} \frac{d\eta^b}{dt}\right) - \sum_{s=1}^{n-m} \underset{s}{h}_{ab} \frac{d\eta^a}{dt} \frac{d\eta^b}{dt} \underset{s}{N}^A. \tag{1,25}$$

Zavedeme-li označení

$$\nabla_t \frac{d\eta^c}{dt} \equiv \frac{d^2\eta^c}{dt^2} + \begin{Bmatrix} c \\ ab \end{Bmatrix} \frac{d\eta^a}{dt} \frac{d\eta^b}{dt}\,, \tag*{(1,26)$_a$}$$

$$\underset{s}{h} \equiv \underset{s}{h}_{ab} \frac{d\eta^a}{dt} \frac{d\eta^b}{dt} \quad (s = 1, \ldots, n - m)\,, \tag*{(1,26)$_b$}$$

potom můžeme relaci (1,25) přepsat na stručnější tvar

$$\frac{d^2x^A}{dt^2} = B^A_a \nabla_t \frac{d\eta^a}{dt} - \sum_{s=1}^{n-m} \underset{s}{h} \underset{s}{N}^A. \tag{1,27}$$

Symbol ∇_t je tedy symbolem absolutní derivace, známým z diferenciální geometrie. Vztah (1,27) bude pro nás v dalším velmi důležitým vztahem, na který se budeme často odvolávat.

Označíme-li symbolem $\left[\dfrac{d^2x^A}{dt^2}\right]_T$ složku vektoru $\dfrac{d^2x^A}{dt^2}$ do tečného prostoru, symbolem $\left[\dfrac{d^2x^A}{dt^2}\right]_N$ složku téhož vektoru do normálního prostoru variety V_m, potom z (1,27) je ihned vidět, že platí

$$\left[\frac{d^2x^A}{dt^2}\right]_T = B^A_a \nabla_t \frac{d\eta^a}{dt}\,, \quad \left[\frac{d^2x^A}{dt^2}\right]_N = -\sum_{s=1}^{n-m} \underset{s}{h} \underset{s}{N}^A. \tag{1,28}$$

Závěrem tohoto odstavce ještě podotkněme, že každý vektor P^A, definovaný v bodech regulární variety (1,3), lze psát jako lineární kombinaci lineárně nezávislých vektorů B^A_a, $\underset{s}{N}^A$ $(a = 1, \ldots, m; s = m + 1, \ldots, n)$, jak již bylo v textu uvedeno. Tedy

$$P^A = B^A_a w^a + \sum_{s=1}^{n-m} \underset{s}{r} \underset{s}{N}^A . \tag{1,29}$$

Složka vektoru P^A, spadající v uvažovaném bodě do tečného prostoru ${}^T E_m$ dané variety, jest

$$[P^A]_T = B^A_a w^a .$$

Z (1,29), (1,15) plyne pak

$$B^b_A P^A = w^b$$

a tedy

$$[P^A]_T = B^A_b B^b_C P^C . \tag{1,30}$$

2. POHYBOVÉ ROVNICE SOUSTAVY HMOTNÝCH BODŮ O DANÝCH STUPNÍCH VOLNOSTI

Nechť v E_3 je dána soustava o počtu N hmotných bodů $p_1, p_2, \ldots, \underset{N}{p}$ o hmotách $\underset{1}{m}, \underset{2}{m}, \ldots, \underset{N}{m}$ v uvedeném pořadí. Označme $\underset{i}{x}^\alpha (\alpha = 1, 2, 3)$ souřadnice bodu p_i v $E_3 (i \in 1, 2, \ldots, N)$. Nechť $\eta^a (a = 1, \ldots, m;\ 1 \leqq m < 3N)$ jsou nezávislé parametry, jimiž je konfigurace soustavy (tj. poloha všech bodů dané soustavy) jednoznačně určena. Tento předpoklad lze s potřebnými matematicko-teoretickými předpoklady snadno matematicky formulovat.

Budiž dáno $3N$ reálných funkcí $\underset{i}{x}^\alpha(\eta^a)$ $(\alpha = 1, 2, 3;\ i = 1, \ldots, N)$ reálných parametrů $\eta^a (a = 1, \ldots, m)$, $1 \leqq m < 3N$, které vyhovují těmto předpokladům:

(1) $\underset{i}{x}^\alpha(\eta^a)$ $(i = 1, \ldots, N;\ \alpha = 1, 2, 3)$ mají spojité parciální derivace nejméně druhého řádu podle η^a v nějaké oblasti $O \subset E_m$[1]) parametrů η^a.

(2) Matice

$$\begin{pmatrix}
\frac{\partial \underset{1}{x}^1}{\partial \eta^1} & \frac{\partial \underset{1}{x}^2}{\partial \eta^1} & \frac{\partial \underset{1}{x}^3}{\partial \eta^1} & \frac{\partial \underset{2}{x}^1}{\partial \eta^1} & \frac{\partial \underset{2}{x}^2}{\partial \eta^1} & \frac{\partial \underset{2}{x}^3}{\partial \eta^1} & \cdots\cdots & \frac{\partial \underset{N}{x}^1}{\partial \eta^1} & \frac{\partial \underset{N}{x}^2}{\partial \eta^1} & \frac{\partial \underset{N}{x}^3}{\partial \eta^1} \\
\frac{\partial \underset{1}{x}^1}{\partial \eta^2} & \frac{\partial \underset{1}{x}^2}{\partial \eta^2} & \frac{\partial \underset{1}{x}^3}{\partial \eta^2} & \frac{\partial \underset{2}{x}^1}{\partial \eta^2} & \frac{\partial \underset{2}{x}^1}{\partial \eta^2} & \frac{\partial \underset{2}{x}^3}{\partial \eta^2} & \cdots\cdots & \frac{\partial \underset{N}{x}^1}{\partial \eta^2} & \frac{\partial \underset{N}{x}^2}{\partial \eta^2} & \frac{\partial \underset{N}{x}^3}{\partial \eta^2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial \underset{1}{x}^1}{\partial \eta^m} & \frac{\partial \underset{1}{x}^2}{\partial \eta^m} & \frac{\partial \underset{1}{x}^3}{\partial \eta^m} & \frac{\partial \underset{2}{x}^1}{\partial \eta^m} & \frac{\partial \underset{2}{x}^2}{\partial \eta^m} & \frac{\partial \underset{2}{x}^3}{\partial \eta^m} & \cdots\cdots & \frac{\partial \underset{N}{x}^1}{\partial \eta^m} & \frac{\partial \underset{N}{x}^2}{\partial \eta^m} & \frac{\partial \underset{N}{x}^3}{\partial \eta^m}
\end{pmatrix} \tag{2,1}$$

má v každém bodě $\eta^a \in O$ hodnost m.

Za těchto předpokladů je systémem rovnic

$$\underset{i}{x}^{\alpha} = \underset{i}{x}^{\alpha}(\eta^{a}) \,, \quad \alpha = 1, 2, 3 \,; \quad i = 1, \ldots, N \tag{2,2}$$

popsána v E_3 soustava N bodů o m stupních volnosti.

Nechť je dáno dále m reálných funkcí $\eta^a(t)$ ($a = 1, 2, \ldots, m$) reálného parametru t, které vyhovují podmínkám (α), (β), (γ) z odstavce 1.

Potom relacemi

$$\eta^{a} = \eta^{a}(t) \,, \quad t \in I \,, \quad a = 1, \ldots, m \tag{2,3}$$

je popsána v E_m[1]) regulární křivka druhé třídy, která leží ve shora citované oblasti $O \subset E_m$.

Dosadíme-li do pravých stran rovnic (2,2) za η^a funkce $\eta^a(t)$ z rovnic (2,3), potom relacemi

$$\underset{i}{x}^{\alpha} = \underset{i}{x}^{\alpha}(\eta^{\alpha}(t)) \,, \quad t \in I \,, \quad \alpha = 1, 2, 3; i = 1, \ldots, N \tag{2,4}$$

je popsána závislost polohy každého bodu dané soustavy na jediném parametru t.

Jestliže parametr t v (2,4) má fysikální význam času, potom relacemi (2, 4) je popsán zcela určitý pohyb dané soustavy hmotných bodů a to takový, že v každém čase $t \in I$ má smysl mluvit o okamžité rychlosti a o okamžitém zrychlení každého jejího bodu; přitom v libovolném čase $t \in I$ je okamžitá rychlost aspoň jednoho bodu dané soustavy nenulová. Tyto okolnosti zdůvodňují účelnost našich ryze matematických předpokladů pro vlastní mechanicko-fysikální problematiku.

Nechť symbol $\underset{i}{P}^{\alpha}$ representuje vektor úhrnné síly[7]) působící na hmotný bod $\underset{i}{p}(i \in 1, \ldots, N)$. Kdyby hmotné body dané soustavy nepodléhaly žádným vazbám, potom pohyb jednotlivých bodů soustavy by byl popsán systémem Newtonových rovnic

$$\underset{i}{m} \frac{\mathrm{d}^2 \underset{i}{x}^{\alpha}}{\mathrm{d}t^2} = \underset{i}{P}^{\alpha}(i = 1, \ldots, N; \alpha = 1, 2, 3) \,. \tag{2,5}$$

Situace by byla pak taková, že pohyb soustavy by byl charakterisován pohybem jednotlivých jejích bodů při naprosté nezávislosti těchto pohybů. Příslušné matematické řešení pro pohyb soustavy je pak realisováno řešením diferenciálních rovnic (2, 5) při každém v úvahu přicházejícím indexu $i \in 1, \ldots$ $\ldots, N$. Rovnice (2, 2) však představují určité vazby mezi body dané soustavy

[7]) $\underset{i}{P}^{\alpha}$ jsou obecně funkcemi proměnných

$$\underset{i}{x}^{\alpha}, t, \frac{\mathrm{d}\underset{i}{x}^{\alpha}}{\mathrm{d}t} \; (\alpha = 1, 2, 3; i = 1, \ldots, N) \,.$$

a to vazby v parametrickém vyjádření. Zde je třeba přijmout a vyslovit určitý fysikální axiom, který je opřen o fysikální zkušenosti a který je fundamentálním pro další studium. Než tento princip vyslovíme, zavedeme si určitá označení, účelná pro náš další postup.

Sestavme souřadnice $\underset{i}{x}^\alpha$ jednotlivých hmotných bodů soustavy v následující matici

$$\begin{pmatrix} \underset{1}{x}^1 & \underset{1}{x}^2 & \underset{1}{x}^3 \\ \underset{2}{x}^1 & \underset{2}{x}^2 & \underset{2}{x}^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \underset{i}{x}^1 & \underset{i}{x}^2 & \underset{i}{x}^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \underset{N}{x}^1 & \underset{N}{x}^2 & \underset{N}{x}^3 \end{pmatrix}. \tag{2,6}$$

Definujme nyní veličiny ξ^A $(A = 1, \ldots, 3N)$ takto:

$$\xi^A \equiv \underset{i}{x}^\alpha \sqrt{\frac{\underset{i}{m}}{2}}\,, \tag{2,7$_\text{a}$}$$

kde

$$A = 3(i-1) + \alpha \quad (i = 1, \ldots, N;\ \alpha = 1, 2, 3)\,. \tag{2,7$_\text{b}$}$$

Je zřejmé, že přiřazením $(2, 7)_\text{b}$ je každé dvojici (i, α) $(i = 1, \ldots, N;\ \alpha = 1, 2, 3)$ jednoznačně přiřazeno číslo $A = 1, \ldots, 3N$. Položíme-li při daném $A = 1, \ldots$ $\ldots, 3N$

$$i = 1 + \left[\frac{A-1}{3}\right], \quad \alpha = A - 3\left[\frac{A-1}{3}\right], \tag{2,7$_\text{c}$}$$

kde obvyklý symbol $\left[\frac{A-1}{3}\right]$ značí takové celé číslo k, pro které

$$k \leqq \left[\frac{A-1}{3}\right] < k + 1\,,$$

potom relacemi $(2,7)_\text{b}$, $(2,7)_\text{c}$ je definováno jedno-jednoznačné přiřazení celých čísel $A (A = 1, \ldots, 3N)$ celočíselným dvojicím (i, α) $(i = 1, \ldots, N;\ \alpha = 1, 2, 3)$. Právě popsaná souvislost mezi indexy A, i, α je evidentní, jestliže použijeme matice (2,6); číslo A značí pořadové číslo „místa" elementu $\underset{i}{x}^\alpha$ v matici (2,6) při obvyklém očíslování „míst" zleva doprava a shora dolů, tak jak čteme jakýkoli text.

Analogicky definujme

$$P^A \equiv \frac{1}{\sqrt{2\underset{i}{m}}}\underset{i}{P}^\alpha\,. \tag{2,8}$$

Při symbolice $(2, 7)_a$, (2, 8) můžeme — v případě soustavy hmotných bodů bez vazeb — Newtonovy pohybové rovnice (2,5) přepsat na jednodušší tvar

$$\frac{d^2\xi^A}{dt^2} = P^A\,, \quad A = 1, \ldots, 3N\,. \tag{2,9}$$

Dosadíme-li za $\underset{i}{x}^\alpha$ elementy ξ^A z definičních relací $(2,7)_a$ do levých stran v (2,2), potom rovnice (2,2) lze uvést na tvar

$$\xi^A = \xi^A(\eta^a)\,, \quad A = 1, \ldots, 3N\,, \tag{2,10}$$

kde funkce ξ^A vyhovují zřejmě požadavkům (1), (2) uvedeným na začátku odst. 2, přičemž

$$B^A_a \equiv \frac{\partial \xi^A}{\partial \eta^a} = \sqrt{\frac{\underset{i}{m}}{2}}\,\frac{\partial \underset{i}{x}^\alpha}{\partial \eta^a}\ (A = 1, \ldots, N;\, a = 1, \ldots, m)\,. \tag{2,11}$$

K zavedení nové symboliky vedla tato úvaha: Pohyb dané soustavy N hmotných bodů v uvažovaném časovém intervalu budeme znát, jestliže budeme znát souřadnice $\underset{i}{x}^\alpha$ každého hmotného bodu soustavy jakožto funkce času v příslušném časovém intervalu, tj. dráhu jednotlivých hmotných bodů soustavy. Pohyb soustavy je pak popsán systémem rovnic $\underset{i}{x}^\alpha = \underset{i}{f}^\alpha(t)$ ($\alpha = 1, 2, 3; i = 1, \ldots, N$) anebo — při označení $(2,7)_a$ — systémem rovnic

$$\xi^A = F^A(t), \quad A = 1, \ldots, 3N\,. \tag{2,12}$$

Za určitých předpokladů o funkcích $F^A(t)$ je rovnicemi (2,12) popsána regulární křivka v euklidovském prostoru E_{3N} v kartézských souřadnicích $\xi^A (A = 1, \ldots, 3N)$. Pohyb dané soustavy můžeme tedy interpretovat jako „pohyb určitého abstraktního bodu" po křivce v prostoru E_{3N}. Pro souřadnice tohoto bodu ξ^A platí však relace (2,10), které — vzhledem k našim předpokladům a vzhledem k definicím z odstavce 1 — představují regulární varietu dimense m v E_{3N}.

Pohyb dané soustavy N hmotných bodů, která má m stupňů volnosti ($1 \leqq m < 3N$), *můžeme tak převést na pohyb jediného (geometrického) bodu po křivce, která leží na určité m-rozměrné varietě v E_{3N}. S tohoto hlediska budou vedeny další naše úvahy. Je samozřejmé, že výsledek vždy přepíšeme tak, abychom přešli opět k původní soustavě hmotných bodů v E_3.*

Vyslovme nyní důležitý fysikální axiom v následující geometricky průznačné formulaci:

Budiž dána v E_3 soustava N hmotných bodů o m stupních volnosti ($1 \leqq m < 3N$) *parametrickým popisem* (2,2) *resp.* (2,10), *který představuje lokálně geometrické vazby mezi jednotlivými body soustavy. Potom síly kolmé k vazbám se nezúčastní pohybu a Newtonovy pohybové rovnice* (2,5) *resp.* (2,9) *platí lokálně v tečném prostoru variety* (2,10)[8]).

[8]) Varieta (2, 10) představuje vazby soustavy.

Tomuto zákonu dáme ihned následující matematickou formulaci:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\xi^A}{\mathrm{d}t^2} - P^A\right)_T = 0\,, \quad A = 1, \ldots, N\,,$$

tj. složka vektoru $\dfrac{\mathrm{d}^2\xi^A}{\mathrm{d}t^2} - P^A$ v E_{3N}, která spadá do tečného prostoru variety (2,10), je rovna nule[9]). Zřejmě můžeme předchozí systém rovnic přepsat na tvar

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2\xi^A}{\mathrm{d}t^2}\right]_T = [P^A]_T\,. \tag{2,13}$$

Podle (1,28) je

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2\xi^A}{\mathrm{d}t^2}\right]_T = B^A_a\, \nabla_t \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}\,, \tag{2,14}$$

kde B^A_a mají význam z (2,11), symbol $\nabla_t \dfrac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}$ je definován v $(1{,}26)_a$. Dosadíme-li z (2,14) a (1,30) do (2,13), dostaneme po úpravě

$$B^A_a\left(\nabla_t \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} - B^a_C P^C\right) = 0\,,$$

a tedy vzhledem k lineární nezávislosti vektorů B^A_a $(a = 1, \ldots, m)$

$$\nabla_t \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} = B^a_C P^C\,, \quad a = 1, \ldots, m\,, \tag{2,15}$$

což jsou pohybové rovnice dané soustavy o m stupních volnosti. Rovnice (2,15) popisují pohyb dané soustavy v tzv. invariantním tvaru s hlediska tensorového počtu. Rovnice (2,15) představují systém obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu pro neznámé funkce $\eta^a = \eta^a(t)$. Za platnosti existenčního teorému Cauchyova, např. v tom případě, kdy funkce $\underset{i}{x}^\alpha(\eta^a)$ z (2,2) mají v uvažovaném oboru proměnných η^a spojité parciální derivace nejméně třetího řádu a funkce $\underset{i}{P}^\alpha$[7]) mají spojité parciální derivace podle svých argumentů v příslušném svém definičním oboru (který jsme shora vymezili), je počátečními podmínkami

$$(\eta^a)_{t=\underset{0}{t}} = \underset{0}{\eta}^a\,, \quad \left(\frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}\right)_{t=\underset{0}{t}} = \underset{0}{\dot\eta}^a \quad (a = 1, \ldots, m)$$

lokálně jednoznačně definováno řešení $\eta^a = \eta^a(t)$ rovnic (2,15). Těmito počátečními podmínkami jsou však — podle (2,2) — jednoznačně určeny hodnoty

$$(\underset{i}{x}^\alpha)_{t=\underset{0}{t}} = \underset{i}{x}^\alpha(\underset{0}{\eta}^a)\,, \quad (\underset{i}{v}^\alpha)_{t=\underset{0}{t}} = \left(\frac{\mathrm{d}\underset{i}{x}^\alpha}{\mathrm{d}t}\right)_{t=\underset{0}{t}} = \left(\frac{\partial \underset{i}{x}^\alpha}{\partial\eta^a}\frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}\right)_{t=\underset{0}{t}}\,,$$

tj. počáteční poloha a počáteční rychlosti všech bodů dané soustavy.

---

[9]) Viz též označení v (1,28).

Z rovnic (2,15) můžeme zjistit bezprostředně některé fysikálně závažné okolnosti, které uvedeme v dalším sub (I) až (VII).

(I) Nechť daná soustava nepodléhá žádným vnějším silám, tj. $\underset{i}{P^\alpha} = 0$ pro $i = 1, \ldots, N$; $\alpha = 1, 2, 3$. Potom pohybové rovnice (2,15) se redukují na tvar

$$\nabla_t \frac{d\eta^a}{dt} = 0\,, \quad a = 1, \ldots, m\,,$$

tj. podle $(1,26)_a$

$$\frac{d^2\eta^a}{dt^2} + \begin{Bmatrix} a \\ bc \end{Bmatrix} \frac{d\eta^b}{dt}\frac{d\eta^c}{dt} = 0\,, \quad a = 1, \ldots, m\,. \tag{2,16}$$

Rovnice (2,16) představují rovnice tzv. geodetických čar variety V_m v E_{3N} s popisem (2,10) známých z diferenciální geometrie. Výsledek můžeme formulovat takto:

Není-li soustava hmotných bodů, která je podrobena vazbám a která je soustavou o m stupních volnosti ($1 \leq m < 3N$) *pod vlivem vnějších sil, potom pohyb dané soustavy probíhá tak, že jej lze — při zvolené interpretaci geometrické*[10]) *— popsat jako pohyb jediného (geometrického) bodu po geodetické čáře m-rozměrné variety, representující vazby dané soustavy (princip setrvačnosti v prostoru V_m, tzv. Hertzův princip).*

Z (2,16) však dostaneme další zajímavý důsledek.

Z (1,24) plyne

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{{}^*g_{ab}\frac{d\eta^a}{dt}\frac{d\eta^b}{dt}}\,,$$

tj.

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = {}^*g_{ab}\frac{d\eta^a}{dt}\frac{d\eta^b}{dt}\,.$$

Poněvadž křivka ve V_m je současně křivkou v E_{3N}, je zřejmě

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{AB}\frac{d\xi^A}{dt}\frac{d\xi^B}{dt}$$

a tedy, podle $(2,7)_a$,

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \sum_{A=1}^{3N}\left(\frac{d\xi^A}{dt}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\underset{i}{m}}{2}\left(\frac{d\underset{i}{x^\alpha}}{dt}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N}\frac{\underset{i}{m}}{2}\,\underset{i}{(v)^2}\,,$$

kde

$$\underset{i}{(v)^2} = g_{\alpha\beta}\underset{i}{v^\alpha}\underset{i}{v^\beta} = g_{\alpha\beta}\frac{d\underset{i}{x^\alpha}}{dt}\frac{d\underset{i}{x^\beta}}{dt}$$

je čtverec okamžité rychlosti bodu $\underset{i}{p}$ dané soustavy. Označíme-li symbolem

---

[10]) Viz též *Cornelius Lanczos*: The variational Principles of Mechanics, Toronto 1949, str. 23.

E_{kin} kinetickou energii dané soustavy, pak plyne z předchozího

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = {}^*g_{ab}\frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} = E_{\mathrm{kin}}\,. \tag{2,17}$$

Použijeme-li vztahů $(1,26)_{\mathrm{a}}$, (2,17), (1,6), pak můžeme psát (pro regulární křivku druhé třídy s popisem $\eta^a = \eta^a(t)$)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{\mathrm{kin}} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}{}^*g_{ab}\right)\frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} + 2{}^*g_{ab}\frac{\mathrm{d}^2\eta^a}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} = (\partial_c{}^*g_{ab})\frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\eta^c}{\mathrm{d}t} +$$
$$+ 2{}^*g_{ab}\left(\nabla_t\frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} - \begin{Bmatrix} a \\ cd\end{Bmatrix}\frac{\mathrm{d}\eta^c}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\eta^d}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} = 2{}^*g_{ab}\left(\nabla_t\frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} + (\partial_c{}^*g_{ab})\frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\eta^c}{\mathrm{d}t} -$$
$$- {}^*g_{ab}\,{}^*g^{ae}(\partial_c\,{}^*g_{ed} + \partial_d\,{}^*g_{ce} - \partial_e\,{}^*g_{cd})\frac{\mathrm{d}\eta^c}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\eta^d}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} =$$
$$= 2{}^*g_{ab}\left(\nabla_t\frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\eta^c}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\eta^d}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t}(\partial_c{}^*g_{db} - \partial_c{}^*g_{bd} - \partial_d{}^*g_{cb} + \partial_b{}^*g_{cd})\,.$$

Snadno si ověříme, že druhý sčítanec na pravé straně předchozí rovnice je roven nule. Tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{\mathrm{kin}} = 2{}^*g_{ab}\left(\nabla_t\frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t}\,. \tag{2,18}$$

Pro pohyb soustavy, popsaný rovnicemi (2,16), plyne z (2,18) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{\mathrm{kin}} = 0$, tj. E_{kin} je konstanta. Máme tak výsledek, který lze intuitivně očekávat:

Kinetická energie takové soustavy hmotných bodů, která není pod vlivem vnějšího silového pole, je konstantní.

(II) Povšimněme si ještě, že kinetická energie dané soustavy je funkcí proměnných η^a, $\dot\eta^a \equiv \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}$ $(a = 1, \ldots, m)$. To plyne z (2,17), jestliže si uvědomíme definici (1,5) veličin ${}^*g_{ab}$ (při významu (2,11) symbolů B^A_a). Je tedy

$$E_{\mathrm{kin}} = {}^*g_{ab}(\eta^c)\,\dot\eta^a\dot\eta^b\left(\dot\eta^a \equiv \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}\right). \tag{2,19}$$

Odtud plyne

$$\frac{\partial E_{\mathrm{kin}}}{\partial\dot\eta^e} = {}^*g_{ab}\delta^a_e\dot\eta^b + {}^*g_{ab}\dot\eta^a\delta^b_e = 2{}^*g_{ea}\dot\eta^a\,,$$

z kterýchžto rovnic plyne dále — s použitím $(1,26)_{\mathrm{a}}$ —

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_{\mathrm{kin}}}{\partial\dot\eta^e} = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}({}^*g_{ea}\dot\eta^a) = 2\left(\frac{\partial}{\partial\eta^c}{}^*g_{ea}\right)\dot\eta^c\dot\eta^a + 2{}^*g_{ea}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot\eta^a =$$
$$= 2(\partial_c{}^*g_{ea})\,\dot\eta^c\dot\eta^a + 2{}^*g_{ea}\nabla_t\dot\eta^a - {}^*g_{ea}{}^*g^{ad}(\partial_c{}^*g_{db} + \partial_b{}^*g_{cd} - \partial_d{}^*g_{cb})\,\dot\eta^b\dot\eta^c =$$
$$= 2{}^*g_{ea}\nabla_t\dot\eta^a + \dot\eta^b\dot\eta^c(2\partial_c{}^*g_{eb} - \partial_c{}^*g_{eb} - \partial_b{}^*g_{ce} + \partial_e{}^*g_{cb}) =$$
$$= 2{}^*g_{ea}\nabla_t\dot\eta^a + \dot\eta^b\dot\eta^c\,\partial_c{}^*g_{eb} - \dot\eta^b\dot\eta^c\,\partial_b{}^*g_{ce} + \dot\eta^b\dot\eta^c\,\partial_e{}^*g_{cb}\,. \tag{2,20}$$

Vzhledem k symetrii tensoru $*g_{ab}$ je

$$\dot{\eta}^b\dot{\eta}^c\,\partial_c{}^*g_{eb} = \dot{\eta}^b\dot{\eta}^c\,\partial_b{}^*g_{ce}\,,$$

takže dostaneme z předchozího

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_{\mathrm{kin}}}{\partial\dot{\eta}^e} = 2{}^*g_{ea}\,\nabla_t\dot{\eta}^a + \dot{\eta}^c\dot{\eta}^b\,\partial_e{}^*g_{cb}\,.$$

Z (2,19) plyne však

$$\frac{\partial E_{\mathrm{kin}}}{\partial\eta^e} = (\partial_e{}^*g_{cb})\,\dot{\eta}^c\dot{\eta}^b\,,$$

takže můžeme relace (2,20) přepsat na tvar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_{\mathrm{kin}}}{\partial\dot{\eta}^e} - \frac{\partial E_{\mathrm{kin}}}{\partial\eta^e} = 2{}^*g_{ea}\,\nabla_t\dot{\eta}^a\,. \qquad (2,21)$$

Rovnice (2,21) budou nám velmi užitečné v další kapitole.

(III) Z diferenciální geometrie je známo, že systémem rovnic

$$\frac{\mathrm{d}^2\eta^a}{\mathrm{d}t^2} + \begin{Bmatrix} a \\ bc \end{Bmatrix}\frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\eta^c}{\mathrm{d}t} = f(t)\,\frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}\,,\quad a = 1, \ldots, m\,, \qquad (2,22)$$

kde $f(t)$ je spojitě diferencovatelná funkce proměnné t, je popsána obecně geodetická čára variety V_m[11]); v případě, že $f(t)$ není identicky rovna nule v uvažovaném časovém intervalu, potom parametr t není metrickým obloukem této křivky ve V_m.

Položme si nyní otázku, jaká je závislost kinetické energie dané soustavy na čase v případě, že popis pohybu soustavy je vyjádřen rovnicemi (2,22).

Z (2,18), (2,17), $(1,26)_a$ a (2,22) plyne pak

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{\mathrm{kin}} = 2{}^*g_{ab}f(t)\frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} = 2E_{\mathrm{kin}}f(t)\,,\quad \text{tj.}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log E_{\mathrm{kin}} = 2f(t)\,,$$

z čehož plyne

$$E_{\mathrm{kin}} = \underset{0}{E}_{\mathrm{kin}}\,e^{2\int_{t_0}^{t} f(t)\mathrm{d}t}\,, \qquad (2,23)$$

kde $\underset{0}{E}_{\mathrm{kin}}$ je kinetická energie soustavy v čase $t = 0$.

Ve speciálním případě $f(t) \equiv -\frac{k^2}{2}$, kde $k \neq 0$ je konstanta, přejde formule (2,23) na tvar

$$E_{\mathrm{kin}} = \underset{0}{E}_{\mathrm{kin}}\,e^{-k^2(t-t_0)}\,,$$

což odpovídá (zidealisovanému) stavu, kdy daná soustava je „brzděna" ve směru pohybu jednotlivých svých bodů homogenním prostředím, v němž se pohybuje.

[11]) Viz např.: *J. A. Schouten-D. J. Struik*: Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, Groningen-Batavia 1935, str. 97.

(IV) Dosaďme do (2,18) za $\nabla_t \dfrac{d\eta^a}{dt}$ z rovnic (2,15). Dostaneme tak, vzhledem k $(1{,}16)_a$, (1,6), (2,11)

$$\frac{d}{dt} E_{\text{kin}} = 2^* g_{ab} B^a_C P^C \frac{d\eta^b}{dt} = 2^* g_{ab} {}^* g^{ac} B^A_c P^C g_{CA} \frac{d\eta^b}{dt} =$$

$$= 2 B^A_b \frac{d\eta^b}{dt} P^C g_{AC} = 2 g_{AC} P^C \frac{d\xi^A}{dt} .$$

Je však podle $(2{,}7)_a$, (2,8)

$$2 g_{AC} P^C \frac{d\xi^A}{dt} = 2 \sum_{A=1}^{3N} P^A \frac{d\xi^A}{dt} = 2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2 \underset{i}{m}}} \underset{i}{P}^\alpha \frac{\sqrt{\underset{i}{m}}}{2} \frac{d\underset{i}{x}^\alpha}{dt} = \sum_{i=1}^{N} g_{\alpha\beta} \underset{i}{P}^\alpha \frac{d\underset{i}{x}^\beta}{dt} ,$$

kde

$$g_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 \text{ pro } \alpha = \beta \\ 0 \text{ pro } \alpha \neq \beta \end{cases} \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3 . \tag{2,23*}$$

Je tedy

$$\frac{d}{dt} E_{\text{kin}} = \sum_{i=1}^{N} g_{\alpha\beta} \underset{i}{P}^\alpha \frac{d\underset{i}{x}^\beta}{dt} .$$

Nechť $\underset{0}{E}_{\text{kin}}$ značí kinetickou energii dané soustavy v počátečním čase $\underset{0}{t}$, symbol E_{kin} pak kinetickou energii téže soustavy v čase t (t je z uvažovaného časového intervalu), potom plyne z předchozí rovnice

$$E_{\text{kin}} - \underset{0}{E}_{\text{kin}} = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_0}^{t} g_{\alpha\beta} \underset{i}{P}^\alpha \frac{d\underset{i}{x}^\beta}{dt} dt = \sum_{i=1}^{N} \int_{k_i} g_{\alpha\beta} \underset{i}{P}^\alpha d\underset{i}{x}^\beta , \tag{2,24}$$

kde $\int_{k_i} g_{\alpha\beta} \underset{i}{P}^\alpha d\underset{i}{x}^\beta$ je křivkový integrál (druhého druhu) podél trajektorie hmotného bodu $\underset{i}{p}$ v časovém intervalu $\langle \underset{0}{t}, t \rangle$. Veličiny

$$\underset{i}{A} = \int_{\underset{i}{k}} g_{\alpha\beta} \underset{i}{P}^\alpha d\underset{i}{x}^\beta , \quad i = 1, \ldots, m \tag{2,25}$$

jsou skaláry v E_3, při čemž A_i představuje — jak z mechaniky známo — práci vynaloženou silou representovanou vektorem $\underset{i}{P}^\alpha$ při přemístění hmotného bodu $\underset{i}{p}$ dané soustavy podél jeho trajektorie z jeho počáteční polohy v čase $\underset{0}{t}$ do jeho polohy v čase t.

Formuli (2,24) můžeme tedy fysikálně interpretovat takto: Pro uvažovanou soustavu hmotných bodů je úhrnná práce všech sil na soustavu působících za dobu $t - \underset{0}{t}$ *rovna přírůstku kinetické energie soustavy.*

(V) Nechť je dána funkce $V(x^\alpha_1, x^\alpha_2, \ldots, x^\alpha_N) \equiv V(x^\alpha_i)$, která je spojitě diferencovatelnou funkcí aspoň druhého řádu v nějaké $3N$-rozměrné jednoduše souvislé oblasti U prostoru E_{3N}, a to takové, že pro všechny hodnoty parametrů η^a $(a = 1, \ldots, m)$ z oblasti $O \subset E_m$, v níž platí předpoklady (1), (2) z počátku odstavce 2, jsou body $x^\alpha_i = x^\alpha_i(\eta^a)$ z oblasti U.

Předpokládejme dále, že platí

$$g_{\alpha\beta} \underset{i}{P^\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial \underset{i}{x^\beta}} \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, N\,, \tag{2,26}$$

což je známý případ tzv. konservativních sil. Užitím (2,26) přejde formule (2,24) na tvar

$$E_{\text{kin}} - \underset{0}{E}_{\text{kin}} = -\sum_{i=1}^{N} \int_{t_0}^{t} \frac{\partial V}{\partial \underset{i}{x^\beta}} \frac{\mathrm{d}\underset{i}{x^\beta}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial \underset{i}{x^\beta}} \frac{\mathrm{d}\underset{i}{x^\beta}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = -\int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = -(V - \underset{0}{V})\,,$$

kde

$$V = V(\underset{i}{x^\alpha})|_t\,, \quad \underset{0}{V} = V(\underset{i}{x^\alpha})|_{t_0}\,.$$

V tomto speciálním případě platí tedy

$$E_{\text{kin}} + V = \underset{0}{E}_{\text{kin}} + \underset{0}{V}\,. \tag{2,27}$$

Platí-li pro silové pole, působící na danou soustavu, relace (2,26), potom příslušným silám říkáme *síly konservativní* a funkci $V(\underset{i}{x^\alpha})$ nazýváme *potenciální energií soustavy*. Výsledek (2,27) má následující běžnou fysikální formulaci: *Při pohybu soustavy hmotných bodů v poli konservativních sil je úhrnná energie, tj. součet energie kinetické a potenciální, konstantní (na čase nezávislá).*

(VI) Obraťme se nyní k té složce vektoru $\dfrac{\mathrm{d}^2\xi^A}{\mathrm{d}t^2}$, která spadá do normálního prostoru ${}^N E_{3N-m}$ variety V_m (popsané parametricky rovnicemi (2,10)) v každém z uvažovaných bodů této variety V_m. Podle označení zavedeného v (1,28) jde tedy o složku

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2\xi^A}{\mathrm{d}t^2}\right]_N = -\sum_{s=1}^{3N-m} \underset{s}{h} \underset{s}{N^A}\,, \tag{2,28}$$

kde $\underset{s}{h}$ mají význam z $(1,26)_b$ a $\underset{s}{N^A}$, $s = 1, \ldots, 3N - m$ jsou jednotkové vektory v E_{3N} vzájemně k sobě kolmé a ležící v prostoru ${}^N E_{3N-m}$ v uvažovaném bodě.

Podle (1,27) je však, při označení zvoleném v (2,10),

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2\xi^A}{\mathrm{d}t^2}\right]_N = \frac{\mathrm{d}^2\xi^A}{\mathrm{d}t^2} - B^A_a \nabla_t \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}$$

a tedy, podle (2,15), $(1,16)_b$,

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2\xi^A}{\mathrm{d}t^2}\right]_N = \frac{\mathrm{d}^2\xi^A}{\mathrm{d}t^2} - B^A_a B^a_C P^C = \frac{\mathrm{d}^2\xi^A}{\mathrm{d}t^2} - \left(\delta^A_C - \sum_{s=1}^{3N-m} \underset{s}{T}_C \underset{s}{N}^A\right) P^C =$$

$$= \frac{\mathrm{d}^2\xi^A}{\mathrm{d}t^2} - P^A + \sum_{s=1}^{3N-m} (\underset{s}{T}_C P^C)\, \underset{s}{N}^A .$$

Odtud a z (2,28) vyplývá

$$Z^A \equiv \frac{\mathrm{d}^2\xi^A}{\mathrm{d}t^2} - P^A = - \sum_{s=1}^{3N-m} (\underset{s}{T}_C P^C + \underset{s}{h})\, \underset{s}{N}^A .$$

Pro čtverec absolutní velikosti vektoru Z^A v E_{3N} plyne pak z předchozího s ohledem na $(2,7)_a$, (2,8)

$$|Z|^2 = g_{AB} Z^A Z^B = g_{AB} \left(\frac{\mathrm{d}^2\xi^A}{\mathrm{d}t^2} - P^A\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2\xi^B}{\mathrm{d}t^2} - P^B\right) =$$

$$= g_{AB} \frac{\mathrm{d}^2\xi^A}{\mathrm{d}t^2} \frac{\mathrm{d}^2\xi^B}{\mathrm{d}t^2} - 2 g_{AB} \frac{\mathrm{d}^2\xi^A}{\mathrm{d}t^2} P^B + g_{AB} P^A P^B =$$

$$= \sum_{A=1}^{3N} \left\{\left(\frac{\mathrm{d}^2\xi^A}{\mathrm{d}t^2}\right)^2 - 2 \frac{\mathrm{d}^2\xi^A}{\mathrm{d}t} P^A + (P^A)^2\right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{3} \left\{\frac{\underset{i}{m}}{2} \left(\frac{\mathrm{d}^2 \underset{i}{x}^\alpha}{\mathrm{d}t^2}\right)^2 - 2 \frac{\sqrt{\underset{i}{m}}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2\underset{i}{m}}} \frac{\mathrm{d}^2 \underset{i}{x}^\alpha}{\mathrm{d}t^2} \underset{i}{P}^\alpha + \frac{1}{2\underset{i}{m}} (\underset{i}{P}^\alpha)^2\right\},$$

anebo, s použitím symbolu $g_{\alpha\beta}$

$$|Z|^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\underset{i}{m}}{2} g_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}^2 \underset{i}{x}^\alpha}{\mathrm{d}t^2} \frac{\mathrm{d}^2 \underset{i}{x}^\beta}{\mathrm{d}t^2} - \sum_{i=1}^{N} g_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}^2 \underset{i}{x}^\alpha}{\mathrm{d}t^2} \underset{i}{P}^\beta + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2\underset{i}{m}} g_{\alpha\beta} \underset{i}{P}^\alpha \underset{i}{P}^\beta . \quad (2,29)$$

Vektor Z^A nazveme vektorem vazbové síly, skalár $|Z|$ pak mírou vazby hmotné soustavy[12]).

Pro soustavu volnou, pro niž platí Newtonovy rovnice (2,5), je $|Z| = 0$, což je z předchozího evidentní.

(VII) V odstavci 2 jsme předpokládali, že je $1 \leq m < 3N$. Položme si nyní otázku, jaký význam mají relace (2,2) resp. (2,10) v případě $m = 3N$. S hle-

[12]) Termín „vektor vazbové síly" v uvedeném pojetí se zde nově zavádí. Termín „míra vazby" nahrazuje v naší literatuře nevhodně užívaný pojem „vázanost" nebo „nutkání".

diska fysikálního mohli bychom tuto situaci interpretovat tak, že jde o soustavu N hmotných bodů, která má $3N$ stupňů volnosti. V takovémto případě můžeme (2,10) psát ve tvaru

$$\xi^A = \xi^A(\eta^B)\,, \quad A, B = 1, \ldots, 3N\,. \tag{2,30}$$

Za předpokladu, že funkce $\xi^A(\eta^B)$ mají v nějaké $3N$ rozměrné oblasti proměnných η^B spojité parciální derivace druhého řádu a že hodnost čtvercové matice z elementů $\frac{\partial \xi^A}{\partial \eta^B} \equiv A^A_B$ je v každém bodě uvažované oblasti rovna $3N$, potom relace (2,30) představují lokálně regulární transformaci souřadnic v prostoru E_{3N}. To je známá věc z diferenciální geometrie. Zaveďme v tomto případě obvyklejší symboliku $*\xi^B \equiv \eta^B$; potom relace (2,30) mají přepis

$$\xi^A = \xi^A(*\xi^B)\,, \quad A, B = 1, \ldots, 3N\,, \tag{2,31}$$

přičemž definujeme

$$A^A_{*B} \equiv \frac{\partial \xi^A}{\partial *\xi^B}\,.$$

Metrický tensor z definice (1,15) má tvar

$$*g_{*A*B} = A^C_{*A} A^D_{*B} g_{AD}\,;$$

je to tensor g_{AD} v novém systému souřadném $*\xi^A$. Snadno se přesvědčíme, že pohybové rovnice (2,15) mají v tomto uvažovaném případě tvar

$$\nabla_t \frac{\mathrm{d}*\xi^A}{\mathrm{d}t} = *P^A\,, \tag{2,32}$$

kde $*P^A = A^{*A}_B P^B$ a ∇_t je symbol absolutní derivace příslušný konexi

$$*\begin{Bmatrix} A \\ BC \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\, *g^{*A*D}\,(\partial_{*B} *g_{*D*C} + \partial_{*C} *g_{*B*D} - \partial_{*D} *g_{*B*C})\,.$$

Rovnice (2,32) nejsou pak ničím jiným než přepisem Newtonových pohybových rovnic do nových (obecně křivočarých) souřadnic.

S tohoto hlediska můžeme tzv. volnou soustavu o N hmotných bodech uvažovat jako soustavu o $3N$ stupních volnosti a zahrnout ji do naši předchozí teorie (tj. uvažovat v dalším $1 \leq m \leq 3N$).

Všimněme si ještě, že pro volnou soustavu, pro kterou platí v souřadnicích ξ^A pohybové rovnice (2,9), je míra vazby, zavedená v (VI), nulová. To opravňuje též název veličiny Z^A v (VI).

3. DIFERENCIÁLNÍ PRINCIPY MECHANIKY A JEJICH EKVIVALENCE

V odstavci 2 jsme odvodili pohybové rovnice soustavy N hmotných bodů, o které se předpokládá, že má m stupňů volnosti. Tyto pohybové rovnice (2,15), která jsou vlastně popisem „pohybu jediného bodu v m-dimensionální varietě vnořené v E_{3N}“, nevystihují názorným způsobem to, co jsme si položili jako úkol, tj. najít pohybové rovnice dané soustavy o m-stupních volnosti v E_3. Je proto žádoucí přepsat rovnice (2,15) na rovnice jim ekvivalentní, v nichž by vystupovali jednak souřadnice (a jejich derivace podle času) jednotlivých hmotných bodů dané soustavy v E_3, jednak skutečné síly $\underset{i}{P}^\alpha (i = 1, \dots$ $\dots, N; \alpha = 1, 2, 3)$, které na body soustavy působí. Uvedeme v dalším nejznámější a nejčastěji užívané přepisy a prokážeme jejich vzájemnou ekvivalenci tak, že ukážeme, že každý z těchto přepisů je ekvivalentní[13]) sám o sobě s rovnicemi (2,15).

(1) **Princip d'Alembertův.** Vyjdeme z pohybových rovnic (2,15). Násobme tyto rovnice elementem B^A_a a sečtěme přes index a $(a = 1, \dots, m)$, tedy

$$B^A_a \nabla_t \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} = B^A_a B^a_C P^C .$$

Odtud a z (1,27) plyne

$$\ddot{\xi}^A + \sum_{s=1}^{n-m} \underset{s}{h} \underset{s}{N}^A = B^A_a B^a_C P^C . \qquad (3,1)$$

Jest však podle (1,10), (1,5), $(1,16)_a$, (1,6),

$$g_{AD}\Big(\ddot{\xi}^A + \sum_{s=1}^{n-m} \underset{s}{h} \underset{s}{N}^A\Big) B^D_b = g_{AD} \ddot{\xi}^A B^D_b \quad (b = 1, \dots, m) ,$$

$$g_{AD} B^A_a B^a_C P^C B^D_b = {}^*g_{ab} B^a_C P^C = {}^*g_{ab} g_{CE} B^E_d \, {}^*g^{da} P^C = g_{CE} B^E_b P^C = g_{AD} B^D_b P^A .$$

Odtud a z (3,1) plyne

$$g_{AD}(\ddot{\xi}^A - P^A) B^D_b = 0 \quad \text{pro} \quad b = 1, \dots, m . \qquad (3,2)$$

Systém rovnic (3,2) přepišme na tvar

$$\sum_{A=1}^{3N} (\ddot{\xi}^A - P^A) B^A_b = 0 \quad (b = 1, \dots, m) .$$

S použitím $(2,7)_a$, (2,8), (2,11) plyne pak odtud

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\frac{\sqrt{\underset{i}{m}}}{\sqrt{2}} \underset{i}{\ddot{x}}^\alpha - \frac{1}{\sqrt{2\underset{i}{m}}} \underset{i}{P}^\alpha \right) \frac{\sqrt{\underset{i}{m}}}{\sqrt{2}} \frac{\partial \underset{i}{x}^\alpha}{\partial \eta^b} = 0$$

a tedy po úpravě

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{3} (\underset{i}{m} \underset{i}{\ddot{x}}^\alpha - \underset{i}{P}^\alpha) \frac{\partial \underset{i}{x}^\alpha}{\partial \eta^b} = 0 .$$

[13]) Pojmu ekvivalence jest zde rozuměti takto: Máme dva systémy diferenciálních rovnic, systém I a systém II. Nechť každé řešení systému I je současně řešením systému II a každé řešení systému II je též řešením systému I. Potom říkáme, že systémy I a II jsou ekvivalentní.

Jestliže ještě použijeme symbolu $g_{\alpha\beta}$ definovaného v (2,23)*, dostaneme

$$\sum_{i=1}^{N} g_{\alpha\beta}(m\underset{i}{\ddot{x}^\alpha} - \underset{i}{P^\alpha}) \frac{\partial \underset{i}{x^\alpha}}{\partial \eta^b} = 0 \quad (b = 1, \ldots, m) . \tag{3,3}$$

Nechť $v^b (b = 1, \ldots, m)$ jsou zcela libovolná čísla, z nichž aspoň jedno je od nuly různé. Potom vektory

$$\underset{i}{v^\alpha} \equiv \frac{\partial \underset{i}{x^\alpha}}{\partial \eta^b} v^b , \quad i = 1, \ldots, N \tag{3,4}$$

v E_3, jichž počáteční bod klademe do příslušných hmotných bodů $\underset{i}{p}$, vyhovují relaci

$$\sum_{i=1}^{N} g_{\alpha\beta}(m\underset{i}{\ddot{x}^\alpha} - \underset{i}{P^\alpha}) \underset{i}{v^\beta} = 0 . \tag{3,5}$$

Vektory $\underset{i}{v^\beta}$ jsou tedy vektory v E_3, které se dají psát ve tvaru (3,4), jinak jsou zcela libovolné. Definujeme-li

$$v^A \equiv \underset{i}{v^\alpha}$$

při indexové korespondenci $(2,7)_b$, $(2,7)_c$, potom je, jak plyne z (2,11), (3,4),

$$v^A = B^A_a v^a ,$$

tj. vektor v^A, který representuje soubor vektorů $\underset{i}{v^\alpha} (i = 1, \ldots, N)$ v E_{3N}, leží v tečném prostoru m-dimensionální variety v E_{3N}, která representuje příslušné vazby mezi body uvažované soustavy. Říkáme stručně, že vektor v^A udává za těchto okolností směr incidentní s vazbami. Je to tedy směr, který charakterisuje možný pohyb soustavy při daných vazbách. Poznamenejme zde, že v klasické mechanice se místo symbolů $\underset{i}{v^\alpha}$ užívá symbolů $\delta \underset{i}{v^\alpha}$. My se však tomuto označení vyhýbáme, poněvadž zde nejde vůbec o žádné variace, pro které je užívání symbolu δ obvyklé.

Relace (3,5) nazývá se v dynamice zákonem d'Alembertovým (*princip d'Alembertův*).

Dokažme nyní, že z (3,5) plyne (2,15). Platí-li pro pohyb dané soustavy relace (3,5) při každém souboru vektorů $\underset{i}{v^\alpha} (i = 1, \ldots, N)$, které jsou tvaru (3,4), potom platí zřejmě (3,3) a tedy též (s použitím definičních vztahů $(2,7)_a$, (2,8)) též rovnice (3,2). Avšak rovnice (3,2) říkají právě tolik, že složka $[F^A]_T$ vektoru $F^A \equiv \xi^A - P^A$, spadající do tečného prostoru ${}^TE_m$ variety V_m[14]) v jejím

[14]) V_m je varieta, representující v E_{3N} vazby hmotných bodů dané soustavy.

uvažovaném bodě, je nulová. To si ověříme takto: Vektor F^A pišme (podle (1,29)) ve tvaru

$$F^A = B^A_a w^a - \sum_{s=1}^{n-m} \underset{s}{r} \underset{s}{N}^A .$$

Je zřejmě $[F^A]_T = B^A_a w^a$. Z předchozích relací plyne s ohledem na (1,10), (1,5)

$$g_{AC} F^A B^C_b = g_{AC} B^A_a B^C_b w^a = {}^*g_{ab} w^a .$$

Z (3,2) a z definice veličiny F^A vyplývá však, že levé strany v předchozích rovnicích se anulují. Je tedy též ${}^*g_{ab} w^a = 0$ pro $b = 1, \ldots, m$. Pak je však ${}^*g^{bc} {}^*g_{ab} w^a = \delta^c_a w^a = w^c = 0$ a tedy též $[F^A]_T = B^A_a w^a = 0$.

Je tedy $[F^A]_T = (\ddot{\xi}^A - P^A)_T = [\ddot{\xi}^A]_T - [P^A]_T = 0$, tj. platí (2,13). To je však podmínka, z níž jsme dříve odvodili rovnice (2,15). Je tedy d'Alembertův princip, matematicky formulovaný v (3,5), ekvivalentní pohybovým rovnicím (2,15). Tím je ekvivalence rovnic (2,15) a (3,5) prokázána.

Z předchozího vysvítá též, že fysikální axiom vyslovený před podmínkami (2,13), je vlastní fysikální formulací d'Alembertova principu.

(2) **Lagrangeovy rovnice II. druhu.** Vyjdeme opět z pohybových rovnic (2,15). Násobme (2,15) tensorem ${}^*g_{ab}$ (definovaným v (1,5)) a sečtěme přes index $a = 1, \ldots, m$. Máme pak

$$ {}^*g_{ab} \nabla_t \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} = {}^*g_{ab} B^a_C P^C . \tag{3,6}$$

Podle (2,21) a $(1,16)_a$, (1,6) je však

$$ {}^*g_{ab} \nabla_t \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial E_{\mathrm{kin}}}{\partial \dot{\eta} b} - \frac{\partial E_{\mathrm{kin}}}{\partial \eta b} \right) ,$$

$$ {}^*g_{ab} B^a_C P^C = {}^*g_{ab} {}^*g^{ad} B^D_d \, g_{DC} \, P^C = \delta^d_b B^D_a g_{DC} P^C = g_{DC} B^D_b P^C . \tag{3,7}$$

Odtud a z (3,6) plyne

$$ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial E_{\mathrm{kin}}}{\partial \dot{\eta} b} - \frac{\partial E_{\mathrm{kin}}}{\partial \eta b} = 2 g_{DC} B^D_b P^C . \tag{3,8}$$

Použijme vztahů (2,11), $(2,7)_a$, (2,8), (2,23). Potom je

$$ 2 g_{DC} B^D_b P^C = 2 \sum_{A=1}^{3N} B^A_b P^A = 2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{3} \sqrt{\frac{\underset{i}{m}}{2}} \frac{\partial \underset{i}{x}^\alpha}{\partial \eta^b} \frac{1}{\sqrt{2 \underset{i}{m}}} \underset{i}{P}^\alpha = $$

$$ = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{3} \underset{i}{P}^\alpha \frac{\partial \underset{i}{x}^\alpha}{\partial \eta^b} = \sum_{i=1}^{N} g_{\alpha\beta} \underset{i}{P}^\alpha \frac{\partial \underset{i}{x}^\beta}{\partial \eta^b} .$$

Dosadíme-li odtud do (3,8), dostaneme

$$ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial E_{\mathrm{kin}}}{\partial \dot{\eta}^b} - \frac{\partial E_{\mathrm{kin}}}{\partial \eta^b} = \sum_{i=1}^{N} g_{\alpha\beta} \underset{i}{P}^\alpha \frac{\partial \underset{i}{x}^\beta}{\partial \eta^b} \; (b = 1, \ldots, m) . \tag{3,9}$$

Rovnice (3,9) nazývají se *Lagrangeovými rovnicemi druhého druhu.* Jestliže připomeneme vztahy (2,2) a (2,17), pak je evidentní, že rovnice (3,9) představují systém m-diferenciálních rovnic druhého řádu pro neznámé funkce $\eta^a = \eta^a(t)$. Vypočtením těchto funkcí ze systému (3,9) (při daných počátečních podmínkách) a jejich dosazením za η^a do rovnic (2,2) dostaneme pak trajektorie hmotných bodů dané soustavy v parametrickém popisu

$$\underset{i}{x}^\alpha = \underset{i}{x}^\alpha(\eta^a(t)) .$$

Dokážeme nyní, že každé řešení $\eta^a(t)$ rovnic (3,9) je současně řešením rovnic (2,15). Tím bude ověřena jednak ekvivalence rovnic Lagrangeových druhého druhu s pohybovými rovnicemi (2.15), jednak s principem d'Alembertovým.

Z (3,8), (3,7) plyne ihned přepis (3,6) rovnic (3,9). Násobíme-li (3,6) tensorem $^*g^{bc}$ (a sečteme přes $b = 1, \ldots, m$), plyne odtud na základě relací (1,6) ihned formule (2,15).

Poznamenejme zde ještě, že Lagrangeovy rovnice II. druhu jsou právě výhodné v tom případě, kdy daná soustava o m stupních volnosti je popsána relacemi (2,2), tj. parametricky. V případě, že vazby mezi hmotnými body soustavy jsou dány ve tvaru (1,18), je výhodný jiný přepis pohybových rovnic (2,15), který nyní odvodíme.

(3) Lagrangeovy rovnice I. druhu. Nechť je dána v E_3 soustava N hmotných bodů $\underset{i}{p}$ $(i = 1, \ldots, N)$ o pravoúhlých kartézských souřadnicích $\underset{i}{x}^\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$, přičemž vazby mezi body této soustavy jsou popsány systémem relací

$$\underset{s}{\varphi}(\underset{1}{x}^1, \underset{1}{x}^2, \underset{1}{x}^3, \underset{2}{x}^1, \underset{2}{x}^2, \underset{2}{x}^3, \ldots, \underset{N}{x}^1, \underset{N}{x}^2, \underset{N}{x}^3) = 0 \quad (s = 1, \ldots, 3N - m)$$

nebo stručněji

$$\underset{s}{\varphi}(\underset{i}{x}^\alpha) = 0 , \quad s = 1, \ldots, 3N - m \quad (1 \leqq m < 3N) . \tag{3,10}$$

Budeme předpokládat, že funkce $\underset{s}{\varphi}(\underset{i}{x}^\alpha)$ $(s = 1, \ldots, 3N - m)$ mají společnou definiční oblast svých proměnných $\underset{i}{x}^\alpha (i = 1, \ldots, N; \alpha = 1, 2, 3)$, v níž existují jejich spojité parciální derivace aspoň druhého řádu. Dále budeme předpokládat, že množina $3N$-tic číselných $(\underset{1}{x}^1, \underset{1}{x}^2, \underset{1}{x}^3, \underset{2}{x}^1, \underset{2}{x}^2, \underset{2}{x}^3, \ldots, \underset{N}{x}^1, \underset{N}{x}^2, \underset{N}{x}^3)$ z uvažované definiční oblasti, které vyhovují relacím (3,10), není množinou prázdnou a že pro každou takovouto $3N$-tici má matice z parciálních derivací $\dfrac{\partial \underset{s}{\varphi}}{\partial \underset{i}{x}^\alpha}$ $(s = 1, \ldots, 3N - m; i = 1, \ldots, N; \alpha = 1, 2, 3)$ maximální možnou hodnost, tj. hodnost $3N - m$. Stručně řečeno: Nechť pro soustavu rovnic (3,10) jsou lokálně splněny podmínky věty o implicitních funkcích.

Zaveďme opět místo proměnných $\underset{i}{x^\alpha}$ veličiny ξ^A definované v $(2{,}7)_a$ při indexové korespondenci $(2{,}7)_{b,c}$. Potom relace (3,10) můžeme přepsat na tvar

$$\underset{s}{F}(\xi^A) = 0 \quad (s = 1, \ldots, 3N - m;\ A = 1, \ldots, 3N)\,. \tag{3,11}$$

Z našich právě uvedených předpokladů o funkcích $\underset{s}{\varphi}$ plyne pak ihned platnost podmínek (1), (2), (3) uvedených na straně 248 pro funkce $\underset{s}{F}(\xi^A)$ $(s = 1, \ldots, \ldots, 3N - m)$.

Na základě dat uvedených v odstavci 1 na straně 248 je pak relacemi (3,11) popsána lokálně v E_{3N} regulární varieta V_m druhé třídy, která má dimensi m. Na základě úvah téhož odstavce můžeme si pro tuto varietu, která je geometrickou interpretací daných vazeb soustavy hmotných bodů, myslet její lokální parametrický popis, který je speciálním případem rovnic (2,2). Potom však platí rovnice (2,15) pro pohyb dané soustavy hmotných bodů, jak jsme ukázali v odstavci 2. Jde tedy nyní jen o vhodný přepis relací (2,15), účelný pro uvažovaný případ.

Vyjdeme z pohybových rovnic (2,15) a ze vztahů (1,27) (kde místo x^A píšeme ξ^A). Dosaďme do (1,27) za $\nabla_t \dfrac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}$ z pohybových rovnic (2,15). Dostaneme tak

$$\ddot{\xi}^A = B^A_a B^a_C P^C - \sum_{s=1}^{3N-m} \underset{s}{h} \underset{s}{N^A}\,.$$

Použijeme-li relaci $(1{,}16)_b$, pak můžeme přepsat předchozí vztahy na tvar

$$\ddot{\xi}^A = P^A - \sum_{s=1}^{3N-m} (T_C \underset{s}{N^C} + \underset{s}{h}) \underset{s}{N^A}\,, \tag{3,12}$$

jak je též uvedeno v příkladě (VI) v odstavci 2.

Položme

$$\underset{s}{\nu} \equiv - (T_C \underset{s}{N^C} + \underset{s}{h}) \quad (s = 1, \ldots, 3N - m)\,.$$

Potom můžeme (3,12) psát stručněji ve tvaru

$$\ddot{\xi}^A = P^A + \sum_{s=1}^{3N-n} \underset{s}{\nu} \underset{s}{N^A} \quad (A = 1, \ldots, 3N)\,. \tag{3,12)*$$

Právě tak jako vektory $\underset{s}{N^A}(s = 1, \ldots, 3N - m)$, tak také vektory $\underset{s}{F^A}(s = 1, \ldots, 3N - m)$, definované v (1,20), definují v uvažovaném bodě variety V_m jednoznačně její normální prostor ${}^N E_{3N-m}$ v tomto bodě — jak bylo uvedeno v odstavci 1. Můžeme tedy v každém bodě variety V_m psát vektor $N^A \equiv \sum_{s=1}^{3N-m} \underset{s}{\nu} \underset{s}{N^A}$ jako lineární kombinaci vektorů $\underset{s}{F^A}$, tj.

$$\sum_{s=1}^{3N-m} \underset{s}{\nu} \underset{s}{N^A} = \sum_{s=1}^{3N-m} \underset{s}{\mu} \underset{s}{F^A}\,. \tag{3,13}$$

Na základě (3,13) dostaneme přepis

$$\ddot{\xi}^A = P^A + \sum_{s=1}^{3N-m} \underset{s}{\mu}\underset{s}{F}^A \quad (A = 1, \dots, 3N) \tag{3,14}$$

rovnic (3,12)*. Rovnice (3,14) přepíšeme tak, že místo ξ^A, P^A, F^A zavedeme původní veličiny $\underset{i}{x}^\alpha$, $\underset{i}{P}^\alpha$, $\dfrac{\partial \underset{s}{\varphi}}{\partial \underset{i}{x}^\alpha}$ podle relací $(2,7)_a$, (2,8), přičemž použijeme definičního vztahu

$$\underset{s}{F}(\xi^A) \equiv \underset{s}{\varphi}(\underset{i}{x}^\alpha(\xi^A)) \quad (s = 1, \dots, 3N - m)\,.$$

Je tedy

$$\ddot{\xi}^A = \sqrt{\frac{\underset{i}{m}}{2}}\,\underset{i}{\ddot{x}}^\alpha\,,$$

$$P^A = \frac{1}{\sqrt{2\underset{i}{m}}}\,\underset{i}{P}^\alpha\,,$$

$$\frac{\partial \underset{s}{F}}{\partial \xi^A} = \frac{\partial \underset{s}{\varphi}}{\partial \underset{i}{x}^\alpha}\sqrt{\frac{2}{\underset{i}{m}}}$$

při korespondenci indexů $(2,7)_b$, $(2,7)_c$.

Poznamenejme, že numericky jsou veličiny $\underset{s}{F}^A$, $\underset{s}{F}_A \equiv \dfrac{\partial \underset{s}{F}}{\partial \xi^A}$ stejné, takže je v daném systému souřadném

$$\underset{s}{F}^A = \frac{\partial \underset{s}{\varphi}}{\partial \underset{i}{x}^\alpha}\sqrt{\frac{2}{\underset{i}{m}}}\,.$$

Rovnice (3,14) nabudou pak tvaru

$$\frac{\sqrt{\underset{i}{m}}}{\sqrt{2}}\,\underset{i}{\ddot{x}}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\underset{i}{m}}}\,\underset{i}{P}^\alpha + \sum_{s=1}^{3N-m} \underset{s}{\mu}\sqrt{\frac{2}{\underset{i}{m}}}\,\frac{\partial \underset{s}{\varphi}}{\partial \underset{i}{x}^\alpha}$$

a tedy po úpravě

$$\underset{i}{m}\underset{i}{\ddot{x}}^\alpha = \underset{i}{P}^\alpha + \sum_{s=1}^{3N-m} \underset{s}{\lambda}\,\frac{\partial \underset{s}{\varphi}}{\partial \underset{i}{x}^\alpha} \quad (i = 1, \dots, N;\ \alpha = 1, 2, 3)\,, \tag{3,15}$$

při čemž $\underset{s}{\lambda} \equiv 2\underset{s}{\mu}$. Systém rovnic (3,15) spolu s vazbovými podmínkami

$$\underset{s}{\varphi}(\underset{i}{x}^\alpha) = 0 \quad (s = 1, \dots, 3N - m) \tag{3,15}^*$$

jsou pohybovými rovnicemi dané soustavy hmotných bodů podrobené vazbám popsaným relacemi (3,15)*. Rovnice (3,15) se nazývají *Lagrangeovými* *pohybovými rovnicemi prvního druhu.* Spolu s vazebními podmínkami (3,15)* představují celkem $6N - m$ rovnic pro tentýž počet neznámých funkcí $\underset{i}{x}^\alpha(t)$, $\underset{s}{\lambda}(t)$.

Dokážeme ještě, že každé řešení $\underset{i}{x}^\alpha(t)$ rovnic (3,15), (3,15)* jest řešením pohybových rovnic (2,15) v tom smyslu, že myslíme-li si pro varietu V_m s popisem (3,11) lokálně parametrický popis (2,2), potom při těchže počátečních podmínkách definují rovnice (2,15) jednoznačně funkce $\eta^a(t)$ takové, že $\underset{i}{x}^\alpha(t) = \underset{i}{x}^\alpha(\eta^a(t))$. Rovnice (3,15) dávají při označení $(2,7)_a$, (2,8) přepis (3,14) ekvivalentní přepisu (3,12)*. Z (3,12)* plyne však vzhledem k (1,15)

$$B^a_A \ddot{\xi}^A = B^a_A P^A \quad (a = 1, \ldots, m) . \tag{3,16}$$

Myslíme-li si v (1,27) místo x^A symboly ξ^A, potom vzhledem k (1,15), (1,6), plyne odtud

$$B^a_A \ddot{\xi}^A = \nabla_t \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} \quad (a = 1, \ldots, m)$$

a tedy relace (3,16) přejdou v rovnice (2,15).

Tím je ekvivalence rovnic (3,15) s rovnicemi (2,15) prokázána. Současně je tím dokázáno, že Lagrangeovy rovnice I. druhu jsou ve smluveném dříve smyslu ekvivalentní s d'Alembertovým principem a Lagrangeovými rovnicemi II. druhu.

(4) **Gaussův princip.** Lagrangeovy rovnice I. druhu se dají velmi snadno odvodit z d'Alembertova principu matematicky formulovaného rovnicemi (3,5). Je však ještě jiná cesta, která vede k rovnicím (3,15) a která usnadňuje snadnou jejich fysikální interpretaci. V odstavci 2 příkladě (VI) jsme si definovali pojmy „vektor vazbové síly" a „míra vazby". Míru vazby dané soustavy hmotných bodů jsme na citovaném místě definovali jako absolutní velikost vektoru $z^A \equiv \ddot{\xi}^A - P^A (A = 1, \ldots, 3N)$ v E_{3N}. Pro čtverec míry vazby jsme odvodili rovnice (2,29).

Definujme si kvadratickou funkci v proměnných $\underset{i}{a}^\alpha$ $(i = 1, \ldots, N;\ \alpha = 1, 2, 3)$

$$U(\underset{i}{a}^\alpha) \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{\underset{i}{m}}{2}\, g_{\alpha\beta} \underset{i}{a}^\alpha \underset{i}{a}^\beta - \sum_{i=1}^{N} g_{\alpha\beta} \underset{i}{a}^\alpha \underset{i}{P}^\beta + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2\underset{i}{m}}\, g_{\alpha\beta} \underset{i}{P}^\alpha \underset{i}{P}^\beta \tag{3,17}$$

v libovolném bodě $(\underset{1}{x}^1, \underset{1}{x}^2, \underset{1}{x}^3, \underset{2}{x}^1, \underset{2}{x}^2, \underset{2}{x}^3, \ldots, \underset{N}{x}^1, \underset{N}{x}^2, \underset{N}{x}^3)$, pro který platí

$$\underset{s}{\varphi}(\underset{i}{x}^\alpha) = 0\ , \quad s = 1, \ldots, 3N - m\ , \tag{3,18$_a$}$$

tedy v libovolném bodě variety $V_m \subset E_{3N}$, která je geometrickou interpretací vazbových podmínek (3,18). Předpokládejme v dalším, že funkce $\underset{s}{\varphi}(\underset{i}{x}^\alpha)$ jsou spojitě diferencovatelné nejméně druhého řádu ve svém definičním oboru.

Při pohybu dané soustavy podrobené vazbám (3,18) dostaneme trajektorie každého bodu $\underset{i}{p}$ soustavy jako řešení Lagrangeových rovnic I. druhu (3,15) ve tvaru $\underset{i}{x^\alpha} = \underset{i}{x^\alpha}(t)$. Je tedy též

$$\underset{s}{\varphi}(\underset{i}{x^\alpha}(t)) = 0 \quad \text{pro} \quad s = 1, \ldots, 3N - m\,,$$

z kterýchžto identit plyne za našich předpokladů jednak[15])

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \underset{s}{\varphi}}{\partial \underset{i}{x^\alpha}} \frac{\mathrm{d}\underset{i}{x^\alpha}}{\mathrm{d}t} = 0\,, \tag{3,18$_b$}$$

jednak

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 \underset{s}{\varphi}}{\partial \underset{i}{x^\alpha}\, \partial \underset{j}{x^\beta}} \frac{\mathrm{d}\underset{i}{x^\alpha}}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\underset{j}{x^\beta}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \underset{s}{\varphi}}{\partial \underset{i}{x^\alpha}} \frac{\mathrm{d}^2 \underset{i}{x^\alpha}}{\mathrm{d}t^2} \right) = 0\,, \quad s = 1, \ldots, 3N - m\,. \tag{3,18$_c$}$$

V čase t pevně zvoleném je poloha jednotlivých bodů $\underset{i}{p}$ dané soustavy charakterisována jejich souřadnicemi $\underset{i}{x^\alpha}(t)$ a vektory okamžité rychlosti $\frac{\mathrm{d}\underset{i}{x^\alpha}}{\mathrm{d}t}(t)$; v tomto čase t klaďme na proměnné $\underset{i}{a^\alpha}$ z (3,17) následující podmínky:

$$\underset{s}{\Phi}(\underset{i}{a^\alpha}) \equiv \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 \underset{s}{\varphi}}{\partial \underset{i}{x^\alpha}\, \partial \underset{j}{x^\beta}} \frac{\mathrm{d}\underset{i}{x^\alpha}}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\underset{j}{x^\beta}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\underset{s}{\varphi}}{\mathrm{d}\underset{i}{x^\alpha}} \underset{i}{a^\alpha} \right) = 0\,, \quad s = 1, \ldots, 3N - m\,. \tag{3,19}$$

Hledejme nyní minimum kvadratické formy $U(\underset{i}{a^\alpha})$ z (3,17) na množině všech číselných $3N$-tic $\{\underset{i}{a^\alpha}\}$, které jsou podrobeny vedlejším podmínkám (3,19). Podle známé teorie o vyhledávání lokálních vázaných extrémů funkcí[16]) definujme funkci

$$K(\underset{i}{a^\alpha}) = U(\underset{i}{a^\alpha}) - \sum_{s=1}^{3N-m} \underset{s}{\lambda} \underset{s}{\Phi}(\underset{i}{a^\alpha})\,, \tag{3,20}$$

kde $\underset{s}{\lambda}$ jsou zatím neurčená čísla (neurčité multiplikátory). Z (3,20), (3,17) a (3,19) plyne

$$\frac{\partial K}{\partial \underset{i}{a^\alpha}} = m g_{\alpha\beta} \underset{i}{a^\beta} - g_{\alpha\beta} \underset{i}{P^\beta} - \sum_{s=1}^{3N-m} \underset{s}{\lambda} \frac{\partial \underset{s}{\varphi}}{\partial \underset{i}{x^\alpha}}\,,$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \underset{i}{a^\alpha}\, \partial \underset{j}{a^\beta}} = \underset{i}{m} \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} \left(\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases},\ \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha = \beta \\ 0 & \text{pro } \alpha \neq \beta \end{cases} \right).$$

---

15) Sčítá se v dalším přes α od 1 do 3.

16) Viz např. *V. Jarník*: Diferenciální počet, Praha 1953, Nakladatelství ČSAV, str. 510.

Odtud však plyne, že kvadratická forma $\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 K}{\partial a^\alpha_i \partial a^\beta_j} Y^\alpha_i Y^\beta_j$ je positivně definitní. Podle známé věty z teorie vázaných extrémů funkcí[16]) plyne odtud, že řešení (jednoznačné) $\bar{a}^\beta_i$ systému rovnic

$$mg_{\alpha\beta}\bar{a}^\beta_i - g_{\alpha\beta}P^\beta_i - \sum_{s=1}^{3N-m} \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x^\alpha_i} = 0\,, \quad (i = 1, \ldots, N;\ \alpha = 1, 2, 3) \quad (3{,}21)$$

vede k minimu formy (3,17) na uvažované množině $3N$-tic $\{a^\alpha_i\}$ za platnosti podmínek (3,19). Vzhledem k definici (2,23)* symbolu $g_{\alpha\beta}$ můžeme (32,1) přepsat na tvar

$$m\bar{a}^\beta_i = P^\beta_i + \sum_{s=1}^{3N-m} \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x^\beta_i}\,, \quad (i = 1, \ldots, N;\ \beta = 1, 2, 3)\,.$$

Z Lagrangeových rovnic (3,15) víme, že v uvažovaném (pevném) čase t vektor $\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha_i}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}^\alpha_i$ vyhovuje právě předchozím rovnicím. Je tedy $\bar{a}^\beta_i = \frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha_i}{\mathrm{d}t^2}$.

Výsledek můžeme formulovat touto větou:

Budiž dána soustava N hmotných bodů v E_3 podrobená vazbám popsaným relacemi (3,18)$_b$ *(za předpokladů v předchozím uvažovaných). Potom pohyb dané soustavy je takový, že v každém čase vykazuje míra vazby minimum v porovnání se všemi stavy pohybu, charakterisovanými týmiž polohami a rychlostmi jednotlivých hmotných bodů soustavy, avšak při libovolných zrychleních, která jsou ve shodě s podmínkami* (3,18)$_c$, *plynoucích z vazbových podmínek* (3,18)$_a$.

Právě vyslovené tvrzení se nazývá *Gaussovým principem*. Z předchozího je zřejmé, že tento princip není ničím jiným, než fysikálním závěrem plynoucím z Lagrangeových rovnic prvního druhu. Na Lagrangeovy rovnice (3,15) spolu s podmínkami (3,15)* se tedy můžeme dívat jako na matematickou formulaci Gaussova principu. Z ekvivalence Lagrangeových rovnic I. druhu s principem d'Alembertovým plyne pak ihned ekvivalence Gaussova principu s d'Alembertovým (a tím pochopitelně se všemi přepisy pohybových rovnic (2,15)), které jsme dosud uvedli.

(5) Kanonické Hamiltonovy rovnice. Předpokládejme nyní, že síly působící na hmotné body p_i $(i = 1, \ldots, N)$ dané soustavy (pro kterou vazby jsou popsány rovnicemi (2,2), jsou síly konservativní, tj. existuje funkce (viz též str. 260)

$$V(x^1_1, x^2_1, x^3_1, x^1_2, x^2_2, x^3_2, \ldots, x^1_N, x^2_N, x^3_N) = V(x^\alpha_i)$$

(spojitě diferencovatelná aspoň druhého řádu v nějaké $3N$-rozměrné oblasti svých argumentů takové, že funkce definující vazby mezi hmotnými body soustavy mají smysl a vyhovují tam požadavkům, které jsme v předchozím vždy považovali) s vlastností[17])

$$P^\alpha = -g^{\alpha\beta}\frac{\partial V}{\partial \underset{i}{x^\beta}} \; (i = 1, \dots, N;\ \alpha = 1, 2, 3)\,. \tag{3,22}$$

Za těchto speciálních okolností lze dát Lagrangeovým rovnicím II. druhu (3,9) jednodušší tvar. Pro pravou stranu v (3,9) plyne z (3,22)

$$\sum_{i=1}^{N} g_{\alpha\beta}\underset{i}{P^\alpha}\frac{\partial \underset{i}{x^\alpha}}{\partial \eta^b} = -\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial V}{\partial \underset{i}{x^\alpha}}\frac{\partial \underset{i}{x^\alpha}}{\partial \eta^b} = -\frac{\partial V}{\partial \eta^b}\,. \tag{3,23}$$

Definujme

$$L(\eta^a, \dot\eta^a) = E_{\text{kin}} - V\,. \tag{3,24}$$

Na základě této definice dostaneme vzhledem k (2,17), (3,22)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\eta^a} = \frac{\partial E_{\text{kin}}}{\partial \dot\eta^a}\,.$$

Odtud, z (3,23), (3,24) plyne pak následující přepis rovnic (3,9)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot\eta^b} - \frac{\partial L}{\partial \eta^b} = 0\,, \quad b = 1, \dots, m\,. \tag{3,25}$$

Místo symbolu V zaveďme symbol E_{pot}, což je zdůvodněno tím, že funkce V ve fysice představuje tzv. potenciální energii dané soustavy. Podle (3,24), (2,17) je tedy

$$L(\eta^a, \dot\eta^a) = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}} = {}^*g_{ab}\frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} - V(\eta^c)\,. \tag{3,24*}$$

Odtud plyne však

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot\eta^a\,\partial \dot\eta^b} = 2\,{}^*g_{ab}\,. \tag{3,26}$$

Definujme nyní funkci

$$\overline{H}(\eta^a, \dot\eta^a) \equiv -L(\eta^a, \dot\eta^a) + \dot\eta^b\frac{\partial L}{\partial \dot\eta^b}(\eta^a, \dot\eta^a) \tag{3,27$_a$}$$

a položme dále

$$p_a \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot\eta^a}(\eta^b, \dot\eta^b)\,, \quad (a = 1, \dots, m)\,. \tag{3,27$_b$}$$

Dívejme se na definiční vztahy $(3,27)_b$ jako na systém m rovnic pro m neznámých $\dot\eta^c (c = 1, \dots, m)$. Jakobián soustavy (3,27) je determinant z elementů $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot\eta^a\,\partial \dot\eta^b}$ a tedy — podle (3,26) — až na číselný faktor determinant ze složek tensoru ${}^*g_{ab}$, definovaného v (1,5), který je — jak bylo uvedeno v odstavci 1 — různý od nuly v každém bodě uvažovaného oboru. Podle známé věty

[17]) $g^{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta\,, \\ 0, & \alpha \neq \beta\,. \end{cases}$

o implicitních funkcích je to však postačující podmínka k tomu, aby soustava $(3{,}27)_b$ byla lokálně jednoznačně řešitelná vzhledem k elementům $\dot{\eta}^a(c = 1, \ldots, m)$. Můžeme tedy $(3{,}27)_b$ přepsat lokálně na ekvivalentní tvar

$$\dot{\eta}^a = \dot{\eta}^a(\eta^c, p_c)\,. \tag{3,28}$$

Z dřívějších našich předpokladů plyne existence parciálních derivací $\dfrac{\partial p_c}{\partial \eta^a}, \dfrac{\partial p_c}{\partial \dot{\eta}^a}$, tj. parciálních derivací

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\eta}^a\, \partial \eta^c}\,, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\eta}^a\, \partial \dot{\eta}^c}\,.$$

Podle definice funkce L v (3,24)* resp. (3,24) je totiž

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\eta}^a\, \partial \eta^c} = 2\, \frac{\partial}{\partial \eta^c}\, {}^*g_{ab}\dot{\eta}^b = 2(\partial_c\, {}^*g_{ab})\, \dot{\eta}^b\,, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\eta}^a\, \partial \dot{\eta}^c} = 2{}^*g_{ac}\,.$$

Odtud a ze známé věty o implicitních funkcích plyne též existence derivací

$$\frac{\partial \dot{\eta}^a(\eta^c, p_c)}{\partial \eta^b}\,, \quad \frac{\partial \dot{\eta}^a(\eta^c, p_c)}{\delta p_b}\,.$$

Dosaďme do $(3{,}27)_a$ za $\dot{\eta}^a$ pravé strany rovnic (3,28); dostaneme tak funkci

$$H(\eta^c, p_c) = -\, L(\eta^c, \dot{\eta}^c(\eta^b, p_b)) + \dot{\eta}^b(\eta^c, p_c) p_b\,. \tag{3,29}$$

Pro funkci $H(\eta^c, p_c)$ z (3,29) odvodíme na základě Lagrangeových rovnic (3,25) a definičních relací (3,27)

$$\frac{\partial H}{\partial \eta^c} = -\, \frac{\partial L}{\partial \eta^c} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}^b}\frac{\partial \dot{\eta}^b}{\partial \eta^c} + \frac{\partial \dot{\eta}^b}{\partial \eta^c}\, p_b = -\, \frac{\partial L}{\partial \eta^c} = -\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}^c} = -\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, p_c = -\, \dot{p}_c\,;$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_c} = -\, \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}^a}\frac{\partial \dot{\eta}^a}{\partial p_c} + \frac{\partial \dot{\eta}^b}{\partial p_c}\, p_b\, \dot{\eta}^c + \dot{\eta}^c = \dot{\eta}^c\,.$$

Dostáváme tak systém rovnic

$$\frac{\partial H}{\partial \eta^c} = -\, \dot{p}_c\,, \quad \frac{\partial H}{\partial p_c} = \dot{\eta}^c \quad (c = 1, \ldots, m)\,. \tag{3,30}$$

Při známé funkci $H(\eta^a, p_a)$ je systém (3,20) systémem obyčejných diferenciálních rovnic prvého řádu pro $2m$ neznámých funkcí $p_a(t)$, $\eta^a(t)$. Tím je řešení Lagrangeových rovnic (3,25) převedeno na řešení rovnic (3,30). Rovnice (3,30) nazývají se *Hamiltonovými rovnicemi*; jsou tzv. *kanonickým tvarem pohybových rovnic* (3,25). Výhoda práce s kanonickými rovnicemi (3,30) oproti rovnicím (3,25) spočívá v tom, že rovnice (3,25) jsou systémem diferenciálních rovnic druhého řádu pro hledané funkce $\eta^a(t)$ $(a = 1, \ldots, m)$, zatím co rovnice (3,30) představují systém diferenciálních rovnic prvého řádu.

Je třeba nyní ukázat, že rovnice (3,30) jsou ekvivalentní s rovnicemi (3,25). Pak je však třeba k rovnicím (3,30) připojit definiční vztahy $(3{,}27)_{a,b}$. Z $(3{,}27)_b$ plyne především

$$\dot{p}_a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}^a}\,. \tag{3,31}$$

Přepišme $(3,27)_a$ na tvar

$$L(\eta^a, \dot{\eta}^a) = - H(\eta^a, \dot{\eta}^a) + \dot{\eta}^b \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}^b} (\eta^a, \dot{\eta}^a) .$$

Podle naší definice je však

$$H(\eta^a, \dot{\eta}^a) = H(\eta^a, p_a(\eta^c, \dot{\eta}^c))$$

a tedy

$$L(\eta^a, \dot{\eta}^a) = - H(\eta^a, p_a(\eta^c, \dot{\eta}^c)) + \dot{\eta}^b \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}^b} (\eta^a, \dot{\eta}^a) .$$

Užitím (3,30) dostáváme dále

$$\frac{\partial L}{\partial \eta^a} = - \frac{\partial H}{\partial \eta^a} - \frac{\partial H}{\partial p_c} \frac{\partial}{\partial \eta_a} p_c + \dot{\eta}^b \frac{\partial^2 L}{\partial \eta^a \partial \dot{\eta}^b} =$$

$$= \dot{p}_a - \dot{\eta}^c \frac{\partial^2 L}{\partial \eta^a \partial \dot{\eta}^c} + \dot{\eta}^b \frac{\partial^2 L}{\partial \eta^a \partial \dot{\eta}^b} = \dot{p}_a .$$

Odtud a z (3,31) plyne pak ihned systém rovnic (3,25). Tím je prokázána ekvivalence Hamiltonových rovnic s Lagrangeovými rovnicemi druhého druhu v případě, že síly $\underset{i}{P^\alpha}$ jsou konservativní. Tím je však prokázána současně ekvivalence Hamiltonových rovnic se všemi přepisy pohybových rovnic, které jsme uvedli v předchozím — ovšem za předpokladu, že jde o pole konservativních sil.

Poznamenejme ještě, že funkce $H(\eta^c, p_c)$ se nazývá *funkcí Hamiltonovou,* zatím co funkci $L(\eta^c, \dot{\eta}^c)$ říkáme *funkce Lagrangeova.* Souvislost mezi oběma těmito funkcemi najdeme velmi snadno. Z (3,29), (3,24) plyne

$$H = - E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} + \dot{\eta}^c \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}^c} .$$

Na druhé straně plyne z (3,24)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}^a} = 2 {}^*g_{ab}\, \dot{\eta}^b \Rightarrow \dot{\eta}^c \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}^c} = 2 {}^*g_{ab} \dot{\eta}^c \dot{\eta}^b = 2E_{\text{kin}} .$$

Platí tedy

$$H = - E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} + 2E_{\text{kin}} ,$$

tj.

$$H = (E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}) .$$

Dále jest, jak plyne z (3,30)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H = \frac{\partial H}{\partial \eta^a} \dot{\eta}^a + \frac{\partial H}{\partial p_c} \dot{p}_c = - \dot{p}_a \dot{\eta}^a + \dot{\eta}^c \dot{p}_c = 0 ,$$

tj.

$$H = \text{konst.}$$

4. ZÁVĚR

Metodou, kterou jsme postupovali, bylo by možno odvodit další přepisy fundamentálních pohybových rovnic (2,15), např. přepisy známé v dynamice pod názvem Jourdainův a Gibbs-Appelův princip, které však mají větší důležitost (právě tak jako princip Gaussův) pro případ anholomních vazeb, jimiž jsme se nezabývali. Naše metoda je snadno aplikovatelná též na velmi obecné případy anholomních vazeb a pro tzv. Hamilton-Jacobiho teorii dynamických systémů. Integrální principy mechaniky dají se běžnými metodami variačního počtu velmi snadno a striktně odvodit pomocí diferenciálních principů, jimiž jsme se v práci zabývali; geometrická interpretace, které jsme používali, poskytuje i zde možnost snazšího výkladu řady výsledků. Nejdůležitější však na našem postupu je to, že jde o symboliku a pracovní metodu používanou ve speciální a obecné teorii relativity v aplikaci na klasickou mechaniku, což právě usnadňuje snadné proniknutí do Einsteinovy symboliky a do základních myšlenek teorie relativity.

Literatura

Diferenciální geometrie:

J. A. Schouten, D. J. Struik: Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie I, Groningen - Batavia 1956.
M. Biernacki: Geometrie różniczkova I, II, Warszawa 1954.
E. Kreyszig: Differentialgeometrie, Leipzig 1956.
В. Ф. Каган: Основы теории поверхностей, Москва-Ленинград 1947, 1948.
V. Hlavatý: Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet, Praha 1937.

Fysika:

C. Lanczos: The Variational Principles of Mechanics.
G. Prange: Encyklopedie der math. Wissenschaften IV, Bd. 2, Teilband, Leipzig 1933.
V. Trkal: Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa, Praha 1956. (V knize Trkalově je uveden seznam nejdůležitější knižní literatury z mechaniky.)

Резюме

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ И ИХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

ФРАНТИШЕК НОЖИЧКА (František Nožička)

(Поступило в редакцию 10/III 1958 г.)

В учебниках теоретической физики и в книгах о механике выводятся уравнения движения системы материальных точек, подчиненной связи, по-разному. Цель настоящей статьи заключается в выводе уравнений движения такой системы (в голономном случае) путем геометрической интерпретации и методом тензорного исчисления при точно сформулированных предположениях.

Автор исходит из одного физического принципа, который, в сущности, является объединением так наз. ,,метода возможных перемещений“ и ,,принципа Даламбера“, который здесь сформулирован таким образом, чтобы он хорошо понятен с точки зрения геометрического толкования. Движение системы N материальных точек, находящейся под действием внешних сил, в обыкновенном евклидовом пространстве E_3 можно изучать как движение одной ,,абстрактной точки“ по кривой в евклидовом пространстве размерности $3N$. При условиях, приведенных в работе, можно данные геометрические связи данной системы толковать как регулярное m-мерное многообразие V_m $(1 \leqq m < 3N)$, погруженное в E_{3N}. Вся проблема сводится к изучению ,,движения“ одной точки по кривой многообразия V_m, расположенного в E_{3N}. Упомянутый выше физический принцип сформулирован следующим образом:

,,Силы, перпендикулярные связям, не принимают в движении участия. Уравнения движения Ньютона выполняются локально — в касательном пространстве многообразия V_m.“

Эта аксиома вместе с обычными физическими понятиями времени, скорости, ускорения и силы представляет все то, что носит в работе физический характер и чего вполне достаточно к выводу наиболее известных дифференциальных законов движения (принцип Даламбера, уравнения Лагранжа первого и второго рода, принцип Гаусса и Герца, канонические уравнения Гамильтона) и к доказательству их эквивалентности. Математическая формулировка высказанного физического принципа приводит нас непосредственно к ,,универсальным“ уравнениям движения сравнительно простого вида

$$\nabla_t \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} = B^a_C P^C , \quad a = 1, \ldots, m ,$$

причем смысл символов подробно изложен в тексте. Преобразуя различными подходящими математическими приемами эти уравнения, получим цитированные выше классические физические принципы.

Résumé

LES PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA MÉCANIQUE ET LEUR ÉQUIVALENCE

František Nožička

(Reçu le 10 mars 1958.)

Les équations du mouvement d'un système de points matériels, soumis aux liaisons géométriques données sont déduites dans les manuels de physique

théorique au moyen de méthodes différentes. Le but du présent article est la déduction des équations du mouvement d'un système matériel considéré (dans le cas hôlonome) à l'aide de l'interprétation géométrique et de la méthode du calcul tensoriel (sous les suppositions mathématiques exactes).

L'auteur prend pour la base un seul principe physique qui n'est au fond qu'une réunion du principe des vitesses virtuellese et du principe de d'Alembert. Ce principe est présenté de façon à être compréhensible du point de vue de l'image géométrique.

Le mouvement d'un système de N points matériels dans l'espace euclidien ordinaire E_3 qui subit l'influence de forces extérieures, peut être étudié comme un mouvement d'un seul ,,point abstrait" dans un espace euclidien à $3N$ dimensions. Sous les suppositions faites (dans le texte tchèque), on peut interpréter les liaisons géométriques données comme une variété régulière V_m m-fois étendue ($1 \leqq m < 3N$) plongée dans E_{3N}. Alors, le problème proposé se réduit à l'étude du mouvement d'un seul point le long d'une courbe dans E_{3N} située sur V_m. Le principe physique cité plus haut est formulé de la façon suivante:

,,Les forces perpendiculaires aux liaisons géométriques du système matériel donné ne prennent pas part à son mouvement. Les équations de Newton du mouvement sont satisfaites localement — dans l'espace tangent de la variété V_m."

L'axione énoncé et les notions courantes en physique comme le temps, la vitesse, l'accélération et la force, c'est tout, ce qui est de nature physique dans cet article; cela suffit pour en déduire les principes mécaniques différentiels ordinaires (le principe de d'Alembert, le principe de Gauss, le principe de Hertz, les équations de Lagrange de la primère et de la seconde espèce, les équations canoniques de Hamilton) et pour prouver leur équivalence. La formulation mathématique du principe considéré mène immédiatement aux équations ,,universelles" du mouvement, qui sont de la forme suivante, très simple,

$$\nabla_t \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} = B^a_C p^C , \quad a = 1, \ldots, m ,$$

(avec la signification des symboles décrite dans le texte tchèque). En transcrivant ces équations de façon convenable on parvient aux principes différentiels classiques du mouvement cités plus haut.