Janusz Murzewski

O užití počtu pravděpodobnosti v technických problémech

Aplikace matematiky, Vol. 4 (1959), No. 3, 224–226

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102663

DISKUSE

O UŽITÍ POČTU PRAVDĚPODOBNOSTI V TECHNICKÝCH PROBLÉMECH

Diskusní příspěvek

JANUSZ MURZEWSKI

Otázka závislosti mezi složkami stavu napětí a stavu přetvoření a otázka pevnosti hmot za složeného stavu napětí náleží k nejzákladnějším problémům mechaniky přetvárných těles. Experimentální výzkum hmot jakož i teoretické práce, vycházející z molekulární stavby hmoty, se zpravidla omezují na nejjednodušší stavy napětí a dávají neúplné informace o obecných zákonech mechanického působení hmot. Proto se současné teorie plasticity a pevnosti opírají o hypothesy fenomenologického charakteru, předkládané v různých, někdy i odchylných versích. Za tohoto stavu věcí je, jak se zdá, třeba jakéhosi nového způsobu rozboru těchto jevů — takového způsobu, který by bral zřetel k nejdůležitějším skutečnostem z oboru struktury pevných těles a vyznačoval by se současně obecností i výstižností, která je znakem fenomenologické mechaniky souvislých prostředí.

Dispersní struktura mnoha hmot užívaných v technice a s tím spojená quasi-nestejnorodost a quasi-isotropie, je podle mého názoru právě tím faktem, který nás může dovést k výstižnějším řešením. A počet pravděpodobnosti je právě tím matematickým prostředkem, kterého je nutno v tomto případě použít.

Známe-li totiž zákony přetvoření a pevnosti pro zrna struktury, můžeme vypočítat — cestou statistického stanovení středních hodnot — příslušné zákony pro celý konglomerát.

Autor provedl tuto zkoušku:[1])

Předpokládal, že:

1. za pružného stavu se řídí náhodné hodnoty přetvoření Hookeovým zákonem,

[1]) *J. Murzewski:* Une théorie statistique du corps fragile quasihomogène. 9-e Congrès Internat. Mec. appl., Bruxelles 1956, 5 (1957), p. 313—320.

2. za plastického stavu jsou odchylky napětí a objemová přetvoření téměř nemožná,

3. v případě porušení se rovná napětí v porušeném průřezu nule s pravděpodobností rovnou jedné,

4. zplastisování hmoty je jevem náhodným, o kterém rozhoduje výsledné napětí způsobující změnu tvaru (Huberovo kriterium),

5. porušení v průřezu tělesa je jevem náhodným, o kterém rozhoduje příslušné normálné napětí (kriterium Gallilcovo),

6. hlavní napětí za pružného stavu, moduly pružnosti, meze plasticity a pevnosti jsou nekorelované a mají Gaussovo rozložení.

Za těchto předpokladů jsou jmenovitá (neboli nepodmíněné střední hodnoty) hlavní přetvoření ε_i a jmenovitá hlavní napětí σ_i spojena nelineárními rovnicemi, které při zkráceném symbolickém způsobu psaní mají tento tvar

$$\bar{E}\varepsilon_i = r_{ij}\sigma_j\,, \qquad i, j = 1, 2, 3\,, \tag{1}$$

kde $\bar{E}$ — předpokládaný Youngův modul za pružného stavu,

r_{ij} — racionální funkce: Poissonovy střední hodnoty $\bar{\nu}$, pravděpodobnosti přechodů do plastického stavu $\varkappa$, pravděpodobnosti porušení pro hlavní průřezy λ_1, λ_2, λ_3.

Veličiny $\varkappa$ a λ_i jsou uvedeny v závislost na jmenovitých hlavních napětích a jejich variabilitě a pevnostních parametrech výpočtem příslušné matematické naděje. Na příklad

$$\varkappa = \int_{-\infty}^{+\infty} f_D\,(s)\,F_Q(s)\,\mathrm{d}s\,, \tag{2}$$

kde $f_D(s)$ — hustota pravděpodobnosti výsledného napětí σ_D způsobujícího změnu tvaru,

$F_Q(s) = P\,(Q < s)$ — distribuční funkce meze plasticity Q.

V obecném případě $\varkappa(\sigma_D)$ a $\lambda_i(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ jsou neelementární funkce. Vyznačují se tím, že jedna z těchto funkcí nabývá skokem hodnoty 1, když jmenovitá napětí dosáhnou kritické hodnoty. Tento bod nespojitosti odpovídá meznímu stavu napětí; přetvoření tehdy přestávají být závislá na napětích.

Spojení pravděpodobností porušení hmoty a jmenovitých přetvoření v jedné soustavě rovnic (1) vede k zajímavým závěrům. Ukazuje se, že úchylky od Hookeova zákona jsou způsobeny existencí pravděpodobnosti ztráty pevnosti. A jen v případě, kdy se tato pravděpodobnost rovná nule (např. při čistém hydrostatickém tlaku), zůstávají přetvoření lineárně závislá na napětích. Rovnice (1) vyjadřují skutečnost známou z provádění zkoušek, že hmota nabývá působením napětí vynucené anisotropie. Rovnice (1) se liší od rovnic teorie malých pružnoplastických přetvoření; neplatí totiž zákon podobnosti deviátorů ani úměrnost objemových tensorů.

Pro praktické použití rovnic (1), (2) je třeba určit jednotlivé hodnoty parametrů rozložení meze plasticity, pevnosti atd., které v těchto rovnicích vystupují. Určení parametrů přímým měřením je asi neproveditelné. Je však možný nepřímý způsob — sestavíme přiměřený počet změřených stavů napětí a přetvoření a potom provedeme příslušné zpětné výpočty.

Tyto úvahy se týkají dosti zidealisovaného případu a tvoří východisko pro obecnější rozbor. Jedním z možných zobecnění je např. považování modulů pevnosti a napětí za náhodnou funkci bodů prostředí. Při takovém zobecnění se dá vyjádřit analyticky „rozměrový účinek", známý z experimentálních výzkumů. Autor dokázal[2]) ve zvláštním případě

a) stacionárních náhodných funkcí (stejnorodé napětí),

b) tažných hmot (vznik trhlin vyloučen),

c) autokorelační funkce,

že střední hodnota mezního napětí pro prut namáhaný osovým tahem závisí na rozměrech prutu. K závěru tohoto druhu dospěl již dříve W. Weibull a jiní odlišnou cestou (zavedením prostorového rozložení pravděpodobnosti vad hmoty). Avšak pro model prutu, který autor vypracoval poněkud jinak, než je tomu u Weibulla, závisí střední hodnota jen na délce prutu a nezávisí na jeho průřezové ploše. Průřezová plocha má zato vliv na variabilitu mezních napětí.

Themata, která jsem zde nastínil, jsou, jak se zdá, poměrně méně známými příklady užití počtu pravděpodobnosti v technické mechanice.

Pravděpodobnostní metody přinášejí celkem do řešení technických problémů nejen změny druhu „kvantitativního" — tj. přesnější vzorce, exaktnější definice, lepší využití experimentálních údajů atd., — ale pravděpodobnostní metody dávají také výhody „kvalitativního" charakteru — umožňují objevit vztahy mezi zdánlivě odlehlými jevy se složitým průběhem, objasňují fysikální účinky, které nelze vysvětlit při užití klasických metod a mohou podle mého názoru přeměnit mnoho nevyhovujících řešení empirickointerpolační povahy v exaktní matematické teorie.

---

[2]) *J. Murzewski:* Elastic-plastic Bodies Stochastically Non-homogeneous, Symposium on Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity, Warsaw 1958 (in print).