František Nožička

Geodetické, asymptotické a hlavní křivky plochy z hlediska mechaniky hmotného bodu

Aplikace matematiky, Vol. 4 (1959), No. 2, 83–108

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102649

SVAZEK 4 (1959) APLIKACE MATEMATIKY ČÍSLO 2

ČLÁNKY

GEODETICKÉ, ASYMPTOTICKÉ A HLAVNÍ KŘIVKY PLOCHY Z HLEDISKA MECHANIKY HMOTNÉHO BODU

František Nožička

(Došlo dne 10. března 1958) DT:534.32

V článku se metodou tensorového počtu odvozují pohybové rovnice hmotného bodu vázaného na plochu a z těchto rovnic se volbou speciálních fysikálních podmínek dochází k pojmům geodetické, asymptotické a hlavní čáry plochy jako speciálním význačným trajektoriím hmotného bodu na ploše.

Metody diferenciální geometrie a mnoho poznatků z této matematické disciplíny jsou velmi důležité pro řadu disciplin teoretické fysiky. Tensorový počet, který je jednou ze základních metod v diferenciální geometrii, našel své velké uplatnění v mechanice klasické a relativistické, v teorii pružnosti a v teorii elektromagnetického pole.

Diferenciální geometrie křivek a ploch v obyčejném trojrozměrném euklidovském prostoru, která se omezuje na zkoumání lokálních vlastností těchto útvarů, je dnes vpravdě velmi ucelenou a propracovanou matematickou disciplinou, která se opírá o základní geometrické pojmy, buduje na těchto pojmech dále a dochází k pojmům složitějším cestou ryzího geometrického názoru. V řadě případů lze přenést tyto ryze geometrické pojmy do některé partie teoretické fysiky a dát jim fysikální význam. Takováto cesta však není nijak vítanou pro fysikální teorii, která má svůj vlastní logický fysikální postup, kterým musí dojíti k fysikálním závěrům, při čemž matematika není ničím jiným než pomůckou k dosažení takovéhoto fysikálního závěru. Účelem předloženého článku je ukázat, jak lze dojít k pojmům geodetické, asymptotické a hlavní čáry plochy jednoduchými úvahami z mechaniky, jestliže se opíráme o fysikální principy.

1. POMOCNÉ POJMY

Uvažujme trojrozměrný euklidovský prostor E_3 o pravoúhlých kartézských souřadnicích x^α ($\alpha = 1, 2, 3$). Nechť $x^\alpha(u)$ ($\alpha = 1, 2, 3$) jsou tři reálné funkce reálné proměnné u, definované v intervalu I (otevřeném, uzavřeném nebo polouzavřeném), které mají tyto vlastnosti:

(1) existují všude v I spojité derivace aspoň druhého řádu funkcí $x^\alpha(u)$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ podle proměnné u;

(2) vektor $\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}u}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ není pro žádné $u \in I$ vektorem nulovým, tj. v žádném bodě $u \in I$ nevymizí současně derivace $\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}u}, \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}u}, \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}u}$. Za těchto podmínek říkáme, že je rovnicemi

$$x^\alpha = x^\alpha(u) \quad (\alpha = 1, 2, 3),\ u \in I \tag{1,1}$$

parametricky definována v E_3 *regulární křivka* aspoň *druhé třídy*.

My budeme v dalším pracovati s regulárními křivkami druhé třídy v E_3. Je to předpoklad zcela přijatelný z fysikálního hlediska, neboť budeme mluvit o křivce v souvislosti s pohybem hmotného bodu probíhajícího tuto křivku; přitom víme, že vektor lokální rychlosti hmotného bodu je definován prvými derivacemi funkcí (1,1) popisujících časový průběh jeho dráhy (kde parametr má význam času) a vektor lokálního zrychlení pak druhými derivacemi těchto funkcí.

Za uvedených předpokladů lze vždy vztáhnout křivku s popisem (1,1) k jejímu oblouku s jakožto parametru, kde

$$s = \int_{u_0}^{u} \sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}u} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}u}}\, \mathrm{d}u\ .^{1)} \tag{1,2}$$

Ve vzorci (1,2) $g_{\alpha\beta}$ jsou složky tak zvaného metrického tensoru v E_3 (v kartézských souřadnicích x^α), který je takto definován:

$$g_{\alpha\beta} = \left\langle \begin{array}{l} 1 \text{ pro } \alpha = \beta \\ 0 \text{ pro } \alpha \neq \beta \end{array} \right. \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)\ . \tag{1,3}$$

Mezemi v integrálu (1,2) jest jednak pevně zvolená hodnota $\underset{0}{u} \in I$, jednak horní proměnná mez $u \in I$. Každou regulární křivku v E_3 (tedy takovou, pro kterou platí předpoklady (1), (2)), lze popsat též rovnicemi

$$x^\alpha = \xi^\alpha(s)\ , \quad s \in {}^*I\ , \tag{1,3}^*$$

kde $^*I$ je obraz intervalu I při zobrazení (1,2). Zřejmě je $\xi^\alpha(s) = x^\alpha(u(s))$.

---

[1]) Symbol $g_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}u} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}u}$ představuje součet $\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} g_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}u} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}u}$. My ve smyslu Einsteinovy symboliky vynecháme sumační znak a zavedeme nadále úmluvu, že v symbolu vždy sčítáme přes stejný řecký index od jedné do tří, kdykoli píšeme jeden z těchto indexů u příslušného symbolu „dole“ a druhý „nahoře“.

Vektor

$$\underset{1}{i}^\alpha = \frac{d\xi^\alpha}{ds} \tag{1,4}$$

jest *jednotkovým tečným vektorem křivky* s popisem (1,3), tj.

$$g_{\alpha\beta}\underset{1}{i}^\alpha \underset{1}{i}^\beta = 1\,. \tag{1,4)*}$$

Za předpokladu, že vektor $\frac{d^2\xi^\alpha}{ds^2}$ není vektorem nulovým, potom jednotkový vektor $\underset{2}{i}^\alpha$ ve směru vektoru $\frac{d^2\xi^\alpha}{ds^2}$ se nazývá *jednotkovým vektorem první normály* křivky (1,3). Je tedy

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{ds^2} = \frac{d}{ds}\underset{1}{i}^\alpha = \underset{1}{k}\underset{2}{i}^\alpha\,, \tag{1,5}$$

$$g_{\alpha\beta}\underset{2}{i}^\alpha \underset{2}{i}^\alpha = 1\,,$$

kde $\underset{1}{k} = \underset{1}{k}(s)$ je skalár definovaný v bodech uvažované křivky, pro který

$$\underset{1}{k} = \sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{d^2\xi^\alpha}{ds^2}\frac{d^2\xi^\beta}{ds^2}}\,. \tag{1,6}$$

Tento skalár se nazývá *první křivostí* dané křivky. Relaci (1,6) považujeme za definiční vztah pro prvou křivost $\underset{1}{k}$. Potom v případě $\underset{1}{k} = 0$ není vektor $\underset{2}{i}^\alpha$ relací (1,5) definován. V případě $\underset{1}{k} \neq 0$ se dá snadno ověřit, že platí

$$g_{\alpha\beta}\underset{1}{i}^\alpha \underset{2}{i}^\beta = 0\,, \tag{1,7}$$

tj. vektory $\underset{1}{i}^\alpha$, $\underset{2}{i}^\alpha$ jsou k sobě kolmé. Proto v případě $\underset{1}{k} = 0$ definujeme jednotkový vektor $\underset{2}{i}^\alpha$ v příslušném bodě libovolně tak, aby platilo (1,7). Prvý ze vztahů (1,5) je prvá z Frenetových formulí pro prostorovou křivku.

Tím jsme vyčerpali ty geometrické pojmy týkající se křivky v E_3, které nám budou užitečné. V dalším uvedeme z diferenciální geometrie ploch v E_3 základní pojmy a fakta, kterých použijeme k fysikálním úvahám.

Buďtež dány tři reálné funkce $x^\alpha(\eta^1, \eta^2)$ ($\alpha = 1, 2, 3$) reálných proměnných η^1, η^2, jejichž definičním oborem je oblast O (v rovině E_2 v kartézských souřadnicích η^1, η^2). Místo $x^\alpha(\eta^1, \eta^2)$ budeme psát stručněji $x^\alpha(\eta^a)$ a zavedeme současně úmluvu, že malé latinské indexy budou probíhat pouze čísla 1, 2.

O daných funkcích $x^\alpha(\eta^a)$ ($\alpha = 1, 2, 3$) předpokládejme:

(a) funkce $x^\alpha(\eta^a)$ mají v O spojité všechny parciální derivace podle η^a ($a = 1, 2$) druhého řádu;

(b) matice

$$\begin{pmatrix} B_1^1 \, B_1^2 \, B_1^3 \\ B_2^1 \, B_2^2 \, B_2^3 \end{pmatrix},$$

kde

$$B_a^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \eta^a} \quad \text{pro } \alpha = 1, 2, 3; \; a = 1, 2 \tag{1,8}$$

má v každém bodě $(\eta^1, \eta^2) \in O$ [2]) hodnost dvě.

Za těchto předpokladů říkáme, že rovnicemi

$$x^\alpha = x^\alpha(\eta^a) \quad (\alpha = 1, 2, 3), \; \eta^a \in O \tag{1,9}$$

je parametricky v E_3 definována *regulární plocha druhé třídy* v oboru O parametrů η^a.

Křivka v E_3 s popisem

$$x^\alpha = x^\alpha(\eta^1, \underset{0}{\eta^2} = \text{konst}) \,, \quad (\eta^1, \underset{0}{\eta^2}) \in O$$

je tak zvanou parametrickou η^1-křivkou plochy (1,9). Vektor B_1^α je jejím tečným vektorem. Podobně vektor B_2^α je tečným vektorem parametrické η^2-křivky plochy (1,9). Vektory B_a^α $(a = 1, 2)$ jsou lineárně nezávislé v každém bodě $\eta^a \in O$, jak vyplývá z hořeního předpokladu (b).

Systém veličin $\bar{g}_{ab}$ takto definovaných

$$\bar{g}_{ab} = B_a^\alpha B_b^\beta g_{\alpha\beta} \quad (a, b = 1, 2) \tag{1,10}$$

se nazývá *prvým metrickým tensorem plochy* (1,9). Z předpokladu (b) plyne, že je

$$\begin{vmatrix} \bar{g}_{11} \, \bar{g}_{12} \\ \bar{g}_{21} \, \bar{g}_{22} \end{vmatrix} > 0 \tag{1,11}$$

v každém bodě $\eta^a \in O$, tedy v každém bodě plochy (1,9). Systém čtyř rovnic

$$\bar{g}_{ab}\bar{g}^{bc} = \delta_a^c \quad (a = , c = 1, 2) \tag{1,12}$$

definuje při daných veličinách $\bar{g}_{ab}$ jednoznačně veličiny $\bar{g}^{bc}$. Soubor veličin $\bar{g}^{bc}$ $(b, c = 1, 2)$ je tak zvaný kontragredientní tensor k prvému metrickému tensoru $\bar{g}_{ab}$ plochy (1,9). Tensory $\bar{g}_{ab}$, $\bar{g}^{ab}$ jsou symetrické, tj. $\bar{g}_{ab} = \bar{g}_{ba}$, $\bar{g}^{ab} = \bar{g}^{ba}$.

Vektor N^α v E_3 v bodě plochy (1,9) definovaný jednoznačně podmínkami

$$g_{\alpha\beta}B_a^\alpha N^\beta = 0 \quad \text{pro } a = 1, 2 \,,$$
$$g_{\alpha\beta}N^\alpha N^\beta = 1 \,,$$

[2]) Kvůli stručnosti budeme napříště místo „bod o souřadnicích η^1, η^2" říkat stručněji „bod η^a". Podobně budeme pod termínem „bod x^α" rozumět bod o souřadnicích x^α $(\alpha = 1, 2, 3)$ v E_3. Podotkněme zde ještě, že ve smyslu Einsteinovy symboliky sčítáme vždy v nějakém symbolu přes stejné latinské indexy od jedné do dvou, jestliže jeden z těchto indexů píšeme „dole" a druhý „nahoře".

$$\begin{vmatrix} B_1^1 & B_1^2 & B_1^3 \\ B_2^1 & B_2^2 & B_2^3 \\ N^1 & N^2 & N^3 \end{vmatrix} > 0 \tag{1,13}$$

se nazývá *jednotkovým vektorem normály plochy* (1,9).

Libovolný vektor F^α, definovaný v bodě $\eta^a \in O$ plochy (1,9), můžeme psát jako lineární kombinaci vektorů B_1^α, B_2^α, N^α v uvažovaném bodě; tedy

$$F^\alpha = B_a^\alpha \omega^a + \omega N^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3)\,, \tag{1,14}$$

kde ω^1. ω^2, ω jsou koeficienty této lineární kombinace. Vektor $B_a^\alpha \omega^a$ je složkou vektoru F^α v tečné rovině uvežovaného bodu (*tečnou složkou* vektoru F^α), vektor ωN^α pak složkou vektoru F^α ve směru normály plochy v uvažovaném bodě (*normálovou složkou* vektoru F^α).

Soubor čtyř veličin h_{ab}, které jsou takto definovány

$$h_{ab} \equiv g_{\alpha\beta} B_a^\alpha \partial_b N^\beta \; {}^{3)} \tag{1,14*}$$

nazývá se *druhým metrickým tensorem plochy* (1,9).

V diferenciální geometrii se dokazuje, že v bodech plochy (1,9) platí tak zvaná *Gaussova formule*

$$\partial_b B_a^\alpha = \begin{Bmatrix} c \\ ab \end{Bmatrix} B_c^\alpha - h_{ab} N^\alpha \tag{1,15}$$

a tak zvaná *formule Weingartenova*

$$\partial_a N^\alpha = B_c^\alpha \bar{g}^{cb} h_{ba}\,.$$

Veličiny $\begin{Bmatrix} c \\ ab \end{Bmatrix}$ v (1,15) jsou tak zvané koeficienty *metrické konexe plochy* (1,9), které jsou takto definovány:

$$\begin{Bmatrix} c \\ ab \end{Bmatrix} \equiv \frac{1}{2}\, \bar{g}^{cd}(\partial_a \bar{g}_{db} + \partial_b \bar{g}_{ad} - \partial_d \bar{g}_{ab})\,. \tag{1,16}$$

Poznamenejme, že tak zvaná *Gaussova křivost plochy* (1,9) je skalár, definovaný jako podíl determinantů tensorů h_{ab} a $\bar{g}_{ab}$, tj.

$$K \equiv \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}}{\bar{g}_{11}\bar{g}_{22} - \bar{g}_{12}\bar{g}_{21}}\,. \tag{1,16*}$$

Tím jsme uvedli ta nejdůležitější fakta o regulární ploše v E_3, kterých později užijeme. Zmíníme se ještě velmi stručně o *regulární křivce* (druhé třídy) *na regulární ploše* (druhé třídy) v E_3.

Nechť relacemi (1,9) je popsána v E_3 regulární plocha druhé třídy v oblasti O parametrů η^a. Nechť $\eta^a(u)$ $(a = 1, 2)$ jsou dvě reálné funkce reálného parametru u, definované pro u z intervalu I[4]), vyhovující těmto předpokladům:

[3]) Místo $\dfrac{\partial}{\partial \eta^a} N^\beta$ píšeme stručněji $\partial_a N^\beta$. Pro operátor $\dfrac{\partial}{\partial \eta^a}$ budeme v dalším užívat symbolu ∂_a.

[4]) I může být otevřený, uzavřený nebo polouzavřený interval.

(I) pro každé $u \in I$ je bod $\eta^a = \eta^a(u) \subset O$;

(II) funkce $\eta^a(u)$ mají spojité derivace aspoň druhého řádu pro všechna $u \in I$;

(III) derivace $\dfrac{d\eta^1}{du}, \dfrac{d\eta^2}{du}$ nejsou současně rovny nule pro žádné $u \in I$.

Potom rovnicemi

$$x^\alpha = \xi^\alpha(u) = x^\alpha(\eta^a(u)), \quad u \in I \tag{1,17}$$

je popsána v E_3 *regulární křivka druhé třídy, která leží na ploše* (1,9).

Bylo by na místě, kdybychom nyní se zmínili o význačných čarách na regulární ploše (1,9), které do značné míry tuto plochu lokálně charakterisují. Jde o tři typy privilegovaných čar a to: *křivky geodetické, křivky asymptotické a křivky hlavní.* My však chceme k těmto pojmům dospěti cestou jinou, tj. jako ke křivkám charakterisujícím v jistém smyslu pohyb hmotného bodu v silovém poli, vázaný na danou plochu. Proto příslušné diferenciálně-geometrické definice těchto křivek uvedeme později.

2. POHYB HMOTNÉHO BODU VÁZANÝ NA KŘIVKU

Budiž parametrickými rovnicemi

$$x^\alpha = x^\alpha(t), \quad t \in \langle \underset{1}{t}, \underset{2}{t} \rangle \tag{2,1}$$

popsána v E_3 regulární křivka druhé třídy. Nechť parametr t v (2,1) má fysikální význam času a nechť křivka s popisem (2,1) je trajektorií hmotného bodu, který v čase $t = \underset{1}{t}$ byl v poloze $\underset{1}{x^\alpha} = x^\alpha(\underset{1}{t})$, v čase $t = \underset{2}{t}$ pak v poloze $\underset{2}{x^\alpha} = x^\alpha(t)$. Zaveďme označení

$$v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}, \quad a^\alpha = \frac{d^2x^\alpha}{dt^2}. \tag{2,2}$$

Vektor v^α má zřejmě význam *vektoru okamžité rychlosti,* vektor a^α pak význam *vektoru okamžitého zrychlení* uvažovaného bodu při pohybu v E_3 popsaném relacemi (2,1). Z matematických dat uvedených v odstavci 1 nemůže být námitek proti tomu, abychom si nemysleli křivku s popisem (2,1) vztaženu k jejímu oblouku s jakožto parametru; tj. můžeme si myslet pro křivku (2,1) popis

$$x^\alpha = \xi^\alpha(s) = x^\alpha(t(s)), \quad s \in \langle 0, \underset{0}{s} \rangle,$$

kde

$$s = \int_{t_1}^{t} \sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt}}\, dt, \quad t \in \langle \underset{1}{t}, \underset{2}{t} \rangle;$$

přitom $\underset{0}{s}$ je hodnota parametru s pro $t = \underset{2}{t}$. Zřejmě je

$$x^\alpha(t) = \xi^\alpha(s(t)) \,, \quad t \in \langle \underset{1}{t}, \underset{2}{t} \rangle \,.$$

Odtud plyne:

$$\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\xi^\alpha}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

a tedy, vzhledem k (2,2), (1,4),

$$v^\alpha = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \underset{1}{i}^\alpha \,. \tag{2,3}$$

Odtud plyne opětným derivováním podle t

$$a^\alpha = \frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v^\alpha = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \underset{1}{i}^\alpha + \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \underset{1}{i}^\alpha \,.$$

S použitím formule (1,5) dostaneme

$$a^\alpha = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \underset{1}{i}^\alpha + \underset{1}{k} \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 \underset{2}{i}^\alpha \,. \tag{2,4}$$

Zavedeme-li

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

pak je zřejmě

$$v^2 = g_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}t} = g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta \,,$$

a my můžeme místo (2,3) psát

$$v^\alpha = v \underset{1}{i}^\alpha \tag*{$(2,5)_a$}$$

a místo (2,4)

$$a^\alpha = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \underset{1}{i}^\alpha + \underset{1}{k} v^2 \underset{2}{i}^\alpha \,. \tag*{$(2,5)_b$}$$

Z $(2,5)_b$ vyplývá, že pro tečnou složku $\underset{1}{a}^\alpha$ a normální složku $\underset{2}{a}^\alpha$ vektoru zrychlení a^α platí

$$\underset{1}{a}^\alpha = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \underset{1}{i}^\alpha \,, \quad \underset{2}{a}^\alpha = \underset{1}{k} v^2 \underset{2}{i}^\alpha \,. \tag{2,6}$$

Zrychlení ve směru binormály křivky je nulové.

Mysleme si nyní situaci jinou. Je dána opět v E^3 regulární křivka druhé třídy s popisem

$$x^\alpha = x^\alpha(u) \,, \quad u \in I \,, \tag{2,7}$$

v jejímž bodě $\underset{0}{x}^\alpha = x^\alpha(\underset{0}{u})$, $\underset{0}{u} \in I$, jest hmotný bod o hmotě m. Nechť tato křivka leží v silovém poli (např. v zemském gravitačním poli). Nás bude zajímat pohyb uvažovaného bodu po dané křivce při daném silovém poli na bod působícím za předpokladu, že tento bod je vázán na danou křivku. Silové pole je charakterisováno vektorem F^α. Kdyby uvažovaný hmotný bod nebyl vázán na danou křivku, potom jeho pohyb v E_3 by byl popsán známým vztahem

$$m\ddot{x}^\alpha - F^\alpha = 0 \quad \left(\ddot{x}^\alpha \equiv \frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}t^2}, \quad t \ldots \text{čas}\right) \tag{2,8}$$

za počátečních podmínek $(x^\alpha)_{t=0} = \underset{0}{x}^\alpha$, $\left(\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = \underset{0}{v}^\alpha$. Uvažovaný hmotný bod je však vázán na křivku (2,7). V tomto případě musíme vzít v úvahu fysikální princip experimentálně ověřený, známý ve fysice pod jménem d'Alembertův princip. V případě křivky jakožto geometrické vazby pro pohyb hmotného bodu můžeme tento princip vyslovit takto:

„*Při pohybu hmotného bodu vázaného na danou křivku platí pohybový zákon* (2,8) *lokálně v tečném prostoru (tečně) uvažované křivky, tj. hmota násobena složkou zrychlení ve směru tečny v uvažovaném bodě křivky je rovna složce síly ve směru tečny v tomto bodě.*"

V symbolickém zápisu můžeme tento fysikální axiom vyjádřit relací

$$g_{\alpha\beta}(m\ddot{x}^\alpha - F^\alpha)\, \underset{1}{i}^\beta = 0\,. \tag{2,9}$$

Odtud, z (2,4) a (1,7) plyne pak

$$m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = g_{\alpha\beta}F^\alpha \underset{1}{i}^\beta\,, \tag{2,10}$$

kde s je oblouk uvažované křivky (2,7), měřený od počáteční polohy $\underset{0}{x}^\alpha$ uvažovaného bodu, který odpovídá hodnotě $\underset{0}{u}$ parametru u, tj.

$$s = \int_{u_0}^{u} \sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}u}}\,\mathrm{d}u\,. \tag{2.11}$$

Předpokládáme samozřejmě, že s je funkcí času t a to dvakráte diferencovatelnou, neboť mluvíme o zrychlení $\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$ při pohybu hmotného bodu po uvažované křivce. Z (2,11) plyne pak, že $u = u(s) = u(s(t))$, při čemž existuje $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}$ v každém bodě $u = u(t) \in I$. Je však

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}u^2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}\,,$$

$$\underset{1}{i}^\alpha = \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\,.$$

Odtud plyne pak následující přepis relace (2,10)

$$m \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}u^2} \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + m \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u} \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = g_{\alpha\beta} F^\alpha \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}u} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}$$

a dále úpravou

$$m \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}u^2} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u} \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + m \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}\right)^2 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = g_{\alpha\beta} F^\alpha \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}u} . \tag{2,12}$$

Z (2,11) plyne však, že

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u} = \sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}u} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}u}} > 0$$

je známou funkcí proměnné u v bodech dané křivky. Zavedeme-li označení $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u} = U(u)$, můžeme rovnici (2,12) přepsat na tvar

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} U^2\right) \dot{u}^2 + m U^2 \ddot{u} = g_{\alpha\beta} F^\alpha \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}u} ,$$

což je hledaná pohybová rovnice, jejímž řešením je hledaná funkce $u = u(t)$. Dosadíme-li tuto funkci $u = u(t)$ za u do rovnice (2,7) dané křivky, pak dostaneme výslednou trajektorii hmotného bodu s popisem

$$x^\alpha = x^\alpha(u(t)) .$$

Poznamenejme ještě, že zde jde o lokální popis a že každý konkrétní příklad vyžaduje při popisu pohybu hmotného bodu v celém rozsahu po dané křivce detailní rozbor.

3. POHYB HMOTNÉHO BODU VÁZANÉHO NA PLOCHU

Budiž dána v E_3 parametrickým popisem

$$x^\alpha = x^\alpha(\eta^a) , \quad \alpha = 1, 2, 3; \; a = 1, 2 \tag{3,1}$$

regulární plocha druhé třídy v oblasti O parametrů η^a. Nechť $\eta^a(t)$ jsou dvě funkce reálné proměnná t, definované v intervalu I parametru t. Nechť pro všechna $t \in I$ leží bod $\eta^a(t)$ v definičním oboru O plochy (3,1) a nechť funkce $\eta^a(t)$ mají všude v I spojité derivace podle t aspoň druhého řádu. Jestliže derivace $\frac{\mathrm{d}\eta^1}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}\eta^2}{\mathrm{d}t}$ nejsou současně rovny nule v bodech intervalu I, potom rovnicemi

$$x^\alpha = \xi^\alpha(t) \equiv x^\alpha(\eta^a(t)) , \quad t \in I \tag{3,2}$$

je popsána regulární křivka druhé třídy v E_3, která leží na ploše (3,1). Jestliže parametr t má fysikální význam času, potom rovnicím (3,2) můžeme dát význam trajektorie hmotného bodu pohybujícího se po dané ploše (3,1). Pro vektor rychlosti v okamžiku t dostaneme z (3,2) (s použitím (1,8)):

$$v^\alpha = \frac{\mathrm{d}\xi^\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \eta^a}\frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} = B^\alpha_a \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}\,. \tag{3,3}$$

Pro vektor zrychlení pak máme

$$a^\alpha = \frac{\mathrm{d}^2\xi^\alpha}{\mathrm{d}t^2} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} B^\alpha_a\right)\frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} + B^\alpha_a \frac{\mathrm{d}^2\eta^a}{\mathrm{d}t^2} =$$

$$= (\partial_b B^\alpha_a)\frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} + B^\alpha_a \frac{\mathrm{d}^2\eta^a}{\mathrm{d}t^2}\,.$$

Při použití Gaussovy formule (1,15) dostaneme pak

$$a^\alpha = \left(\begin{Bmatrix} c \\ ab \end{Bmatrix} B^\alpha_c - h_{ab}N^\alpha\right)\frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} + B^\alpha_a \frac{\mathrm{d}^2\eta^a}{\mathrm{d}t^2}$$

a tedy po úpravě

$$a^\alpha = B^\alpha_c\left(\frac{\mathrm{d}^2\eta^c}{\mathrm{d}t^2} + \begin{Bmatrix} c \\ ab \end{Bmatrix}\frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t}\right) - h_{ab}\frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t}N^\alpha\,.$$

Zaveďme označení

$$\nabla_t \frac{\mathrm{d}\eta^c}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\eta^c}{\mathrm{d}t^2} + \begin{Bmatrix} c \\ ab \end{Bmatrix}\frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t}\,. \tag{3,4}$$

Potom můžeme psát stručněji

$$a^\alpha = B^\alpha_c\,\nabla_t \frac{\mathrm{d}\eta^c}{\mathrm{d}t} - h_{ab}\frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t}N^\alpha\,. \tag{3,5}$$

Operátor ∇_t je tak zvaným symbolem *absolutní derivace* a význam tohoto operátoru v aplikaci na veličiny $\dfrac{\mathrm{d}\eta^c}{\mathrm{d}t}$ je patrný z (3,4).

Z (3,5) vyplývá, že v každém bodě trajektorie s popisem (3,2) lze vektor zrychlení a^α rozložit na dvě komponenty a^α_T, a^α_N, kde

$$a^\alpha_T = B^\alpha_c\,\nabla_t \frac{\mathrm{d}\eta^c}{\mathrm{d}t}\,, \tag*{$(3,6)_a$}$$

$$a^\alpha_N = -\,h_{ab}\frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t}N^\alpha\,. \tag*{$(3,6)_b$}$$

Vektor a^α_T představuje zřejmě složku zrychlení a^α spadající do tečné roviny v uvažovaném bodě, vektor a^α_N pak složku zrychlení ve směru normály plochy v témže bodě. Stručně budeme říkat, že a^α_T je *tečná složka zrychlení* a a^α_N *normálová složka zrychlení* hmotného bodu při jeho pohybu po dané ploše.

Nechť je nyní daná plocha, na níž je hmotný bod vázán, vložena do silového pole charakterisované vektorem síly F^α a definovaného tak jednoznačně též v bodech dané plochy (3,1). Kdyby nebylo plochy jako geometrické vazby hmotného bodu, potom jeho pohyb v E_3 by byl popsán pohybovým zákonem (2,8). Ten však v uvažovaném případě vazby hmotného bodu na danou plochu v obecném případě neplatí, tj. v bodech trajektorie hmotného bodu, pohybujícího se pod vlivem silového pole po dané ploše, není rovnice (2,8) v obecném případě splněna. Místo tohoto zákona nastupuje d'Alembertův princip, který v případě plochy jakožto geometrické vazby hmotného bodu můžeme vyslovit takto:

„*Při pohybu hmotného bodu vázaného na danou plochu platí pohybový zákon (2,8) lokálně v tečné rovině uvažované plochy, tj.: hmota násobena složkou zrychlení spadající do tečné roviny v uvažovaném bodě je rovna složce síly v tečné rovině v tomto bodě.*"

V symbolickém zápisu můžeme tento fysikální axiom zapsat takto:

$$m a^\alpha_T = F^\alpha_T \,, \tag{3,7}$$

kde F^α_T je ortogonálním průmětem síly F^α v uvažovaném bodě plochy do její tečné roviny. Vektor F^α v uvažovaném bodě plochy (3,1) můžeme psát jako lineární kombinaci lineárně nezávislých vektorů B^α_1, B^α_2, N^α v tomto bodě (viz (1,14))

$$F^\alpha = B^\alpha_a \omega^a + \omega N^\alpha \,, \tag{3,8}$$

kde ω^1, ω^2, ω jsou koeficienty této lineární kombinace.

Z (3,8) plyne vzhledem k (1,13), (1,10)

$$g_{\alpha\beta} B^\beta_b F^\alpha = g_{\alpha\beta} B^\beta_b B^\alpha_a \omega^a = \bar{g}_{ab} \omega^a$$

a dále — s přihlédnutím k (1,12) —

$$\bar{g}^{bc} g_{\alpha\beta} B^\beta_b F^\alpha = \omega^c \,. \tag{3,9}$$

Definujme si veličiny B^c_α takto:

$$B^c_\alpha = \bar{g}^{ca} g_{\alpha\beta} B^\beta_a \,. \tag{3,10}$$

Snadno si ověříme, že za našich předpokladů o ploše (3,1) jsou veličiny B^c_α shora definované jednoznačným řešením systému rovnic

$$\begin{aligned} B^c_\alpha B^\alpha_a &= \delta^c_a \,, \quad a, c = 1, 2 \,, \\ B^c_\alpha N^\alpha &= 0 \,, \qquad c = 1, 2 \,. \end{aligned} \tag{3,11}$$

Potom můžeme (3,9) upravit na tvar

$$\omega^c = B^c_\alpha F^\alpha \,. \tag{3,12}$$

Odtud a z (3,8) plyne pro tečnou složku vektoru F^α:

$$F^\alpha_T = B^\alpha_c B^c_\beta F^\beta \,. \tag{3,13}$$

Z (3,13) a $(3,6)_a$ plyne pak následující přepis vztahů (3,7):

$$m B^\alpha_c \nabla_t \frac{\mathrm{d}\eta^c}{\mathrm{d}t} = B^\alpha_c B^c_\beta F^\beta$$

a tedy po úpravě

$$B^\alpha_c \left(m \nabla_t \frac{\mathrm{d}\eta^c}{\mathrm{d}t} - B^c_\beta F^\beta \right) = 0 \, .$$

Odtud plyne však — vzhledem k lineární nezávislosti vektorů B^α_1, B^α_2 —

$$m \nabla_t \frac{\mathrm{d}\eta^c}{\mathrm{d}t} = B^c_\beta F^\beta \, , \tag{3,14}$$

což je systém dvou diferenciálních rovnic druhého řádu pro dvě hledané funkce $\eta^a = \eta^a(t)$. Rovnice (3,14) jsou rovnice pro pohyb hmotného bodu vázaného na plochu (3,1) v daném silovém poli. Jestliže funkce F^α jsou spojitě diferencovatelnými funkcemi místa (eventuálně času) v bodech uvažované plochy, potom při počátečních podmínkách $(\eta^a)_0$, $\left(\frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}\right)_0$ je jednoznačné řešení rovnice (3,14) lokálně zaručeno.

4. GEODETICKÉ ČÁRY NA PLOŠE

Položme si nyní tento teoreticko-fysikální problém. Nechť v čase $\underset{0}{t}$ je poloha hmotného bodu na ploše (3,1) dána hodnotami $\underset{0}{\eta^a}$ parametrů η^a. Nechť $\underset{0}{v^\alpha}$ je vektor počáteční rychlosti hmotného bodu, přičemž předpokládáme, že vektor $\underset{0}{v^\alpha}$ leží v tečné rovině plochy (3,1) v jejím bodě $\underset{0}{x^\alpha} = x^\alpha(\underset{0}{\eta^a})$. *Po jaké čáře plochy a jak se bude pohybovat uvažovaný hmotný bod, jestliže v každém bodě plochy je F^α vektorem nulovým (jestliže vnější silové pole neexistuje)?*

Odpověď na tuto otázku vyčteme ihned z pohybových rovnic (3,14). V případě $F^\alpha \equiv 0$ (tj. $F^\alpha = 0$ v každém bodě uvažované plochy) redukují se rovnice (3,14) na tvar

$$\nabla_t \frac{\mathrm{d}\eta^c}{\mathrm{d}t} = 0 \quad (c = 1, 2)$$

a tedy — vzhledem k (3,4)

$$\frac{\mathrm{d}^2\eta^c}{\mathrm{d}t^2} + \begin{Bmatrix} c \\ ab \end{Bmatrix} \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} = 0 \, . \tag{4,1}$$

Systémem rovnic (4,1) jsou lokálně popsány speciální čáry na ploše (3,1), tak zvané *čáry geodetické*.

Nechť $v^\alpha(t)$ je vektor rychlosti hmotného bodu (pohybujícího se po čáře s popisem (4,1)) v čase $t > \underset{0}{t}$. Označme symbolem v absolutní hodnotu rychlosti hmotného bodu, tj. definujme skalár v vztahem

$$v^2 = g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta \, . \tag{4,2}$$

Potom plyne pro oblouk s uvažované geodetické čáry[5])

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}\xi^\alpha}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\xi^\beta}{\mathrm{d}t}}\, \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} \sqrt{g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta}\, \mathrm{d}t$$

a tedy

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = v^2 \,. \tag{4,3}$$

Na druhé straně plyne z (4,2), (3,3), (1,10)

$$v^2 = g_{\alpha\beta} B^\alpha_a B^\beta_b \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} = \bar{g}_{ab} \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} \,. \tag{4,4}$$

Derivujme nyní v rovnici (4,4) podle t. Dostáváme tak postupně s přihlédnutím k (4,1), (1,16), (1,12)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v^2 &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \bar{g}_{ab}\right) \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} + 2\bar{g}_{ab} \frac{\mathrm{d}^2\eta^a}{\mathrm{d}t^2} \frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} = \\
&= (\partial_c \bar{g}_{ab}) \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\eta^c}{\mathrm{d}t} + 2\bar{g}_{ab} \frac{\mathrm{d}^2\eta^a}{\mathrm{d}t^2} \frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} = \\
&= (\partial_c \bar{g}_{ab}) \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\eta^c}{\mathrm{d}t} - 2\bar{g}_{ab} \begin{Bmatrix} a \\ cd \end{Bmatrix} \frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\eta^c}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\eta^d}{\mathrm{d}t} = \\
&= (\partial_c \bar{g}_{ab}) \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\eta^c}{\mathrm{d}t} - \bar{g}_{ab} \bar{g}^{af} (\partial_c \bar{g}_{fd} + \\
&\quad + \partial_d \bar{g}_{cf} - \partial_f \bar{g}_{cd}) \frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\eta^c}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\eta^d}{\mathrm{d}t} = \\
&= (\partial_c \bar{g}_{ab}) \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\eta^c}{\mathrm{d}t} - (\partial_c \bar{g}_{bd} + \partial_d \bar{g}_{cb} - \\
&\quad - \partial_b \bar{g}_{cd}) \frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\eta^c}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\eta^d}{\mathrm{d}t} = 0 \,.
\end{aligned}$$

Odtud však plyne $v^2 =$ konst. Hodnotu této konstanty spočteme z počáteční podmínky $(v^2)_{t=t_0} = \underset{0}{v}^2 = g_{\alpha\beta} \underset{0}{v}^\alpha \underset{0}{v}^\beta$. Z (4,3) dostaneme pak na základě předchozího výsledku $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \underset{0}{v}$, tj.

$$s = \underset{0}{v}(t - \underset{0}{t}) \,. \tag{4,5}$$

Při uvažovaném pohybu po geodetické čáře je tedy závislost oblouku (proběhnutého hmotným bodem) na čase lineární, tj. délka proběhnutého oblouku vzrůstá rovnoměrně s časem. Rovnicemi (4,1) je tedy popsán *rovnoměrný pohyb hmotného bodu po geodetické čáře.*

---

[5]) Viz (1, 2).

Výsledek můžeme shrnout v následující větu:

Hmotný bod, který je vázán na plochu a který není podroben žádným silám vnějším, zůstává buď v klidu (vzhledem k pevné ploše) nebo se pohybuje rovnoměrně po geodetické čáře plochy (princip setrvačnosti pro pohyb na ploše). Poznamenejme ještě, že předchozí věta zůstává v platnosti, jestliže v bodech plochy působí síla taková, že vektor F^α v každém jejím bodě je k ploše kolmý, tj. jeho tečná složka je nulová. Bylo by tomu na příklad při pohybu po povrchu Země za předpokladu, že by byla ideální koulí s centrálně symetricky rozloženou hmotou.

Obrátíme se ještě k poněkud obecnějšímu případu pohybu hmotného bodu po ploše, který vede rovněž ke geodetickým čarám plochy.

Mějme opět plochu s popisem (3,1) a to plochu druhé třídy v E_3. Nechť neexistuje vnější silové pole (anebo nechť vnější silové pole je takové, že v bodech plochy padne F^α do směru normály plochy). Nechť při pohybu hmotného bodu po takové pevné ploše vystupují síly opačného směru než je směr pohybu, tj. na hmotný bod, jehož trajektorie na ploše (3,1) má popis

$$x^\alpha = \xi^\alpha(t) = x^\alpha(\eta^a(t)) \,,$$

působí v čase t síla

$$*F^\alpha = -f(t)\,\frac{d\xi^\alpha}{dt} = -f(t)v^\alpha \,, \tag{4,5}*$$

kde $f(t)$ je skalár, při čemž předpokládáme, že

$$f(t) > 0 \tag{4,6}$$

a že $f(t)$ je spojitá funkce pro t z uvažovaného časového intervalu.

Tento náš případ se dá fysikálně charakterisovat jako pohyb velmi malé hmotné kuličky po ploše, při čemž bereme v úvahu tření a to za předpokladu, že jiná síla buď neexistuje nebo její složka do tečné roviny každého bodu plochy vymizí.

V diskutovaném případě redukují se pohybové rovnice (3,14) na tvar

$$m\,\nabla_t \frac{d\eta^c}{dt} = -f(t)\,B^c_\alpha v^\alpha = -f(t)\,B^c_\alpha B^\alpha_a \frac{d\eta^a}{dt}$$

(s užitím relace (3,3)). V důsledku rovnic (3,11) můžeme pak psát

$$\nabla_t \frac{d\eta^c}{dt} = -\frac{1}{m} f(t)\,\frac{d\eta^c}{dt} \,. \tag{4,7}$$

Nechť relace

$$\tau = \tau(t) \tag{4,8}$$

představuje regulární transformaci parametru t, tj. v uvažovaném časovém intervalu existuje spojitá derivace $\frac{d\tau}{dt} \neq 0$. Předpokládejme dokonce existenci derivace $\frac{d^2\tau}{dt^2}$. Potom je

$$\frac{d\eta^c}{dt} = \frac{d\eta^c}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}, \quad \frac{d^2\eta^c}{dt^2} = \frac{d^2\eta^c}{d\tau^2}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 + \frac{d\eta^c}{d\tau}\frac{d^2\tau}{dt^2}. \tag{4,9}$$

Z (4,9), (3,4) plyne pak

$$\nabla_t \frac{d\eta^c}{dt} = \frac{d^2\eta^c}{d\tau^2}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 + \frac{d\eta^c}{d\tau}\frac{d^2\tau}{dt^2} + \left\{\begin{matrix} c \\ ab \end{matrix}\right\}\frac{d\eta^a}{d\tau}\frac{d\eta^b}{d\tau}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2.$$

Odtud a z (4,9) plyne pak následující přepis rovnic (4,7)

$$\nabla_\tau \frac{d\eta^c}{d\tau} = \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^{-2}\left(-\frac{1}{m}f(t(\tau))\frac{d\tau}{dt} - \frac{d^2\tau}{dt^2}\right)\frac{d\eta^c}{d\tau}.$$

Volme nyní funkci $\tau(t)$ tak, aby bylo

$$\frac{1}{m}f(t(\tau))\frac{d\tau}{dt} + \frac{d^2\tau}{dt^2} = 0. \tag{4,10}$$

Funkce

$$\tau = \int_{t_0}^{t} e^{-\frac{1}{m}\int_{u_0}^{u} f(v)dv} du \tag{4,11}$$

vyhovuje diferenciální rovnici (4,10), jak se snadno přesvědčíme. Při této funkci τ se pohybové rovnice redukují na tvar

$$\nabla_\tau \frac{d\eta^c}{d\tau} = 0, \tag{4,12}$$

což jsou rovnice geodetické čáry na ploše. Za našich předpokladů se tedy hmotný bod pohybuje opět po geodetice dané plochy.

Způsobem, jakým jsme došli ke vztahu (4,5), došli bychom i zde pro křivku definovanou v (4,12) k závěru, že pro její oblouk s platí

$$s = \underset{0}{v}\tau.^{6)}$$

Odtud a z (4,11) vyplývá pak

$$s = \underset{0}{v}\int_{t_0}^{t} e^{-\frac{1}{m}\int_{u_0}^{u} f(v)dv} du$$

a tedy

$$v = v(t) \equiv \frac{ds}{dt} = \underset{0}{v} e^{-\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} f(v)dv}. \tag{4,13}$$

[6]) Přesněji: $s = \underset{0}{v}(\tau - \underset{0}{\tau})$. Avšak pro počáteční polohu hmotného bodu v čase t_0 je $\tau(t_0) \equiv \underset{0}{\tau} = 0$, jak plyne z (4,11).

Odtud a z předpokladu (4,6) plyne, že v našem uvažovaném případě pohyb po geodetické čáře není rovnoměrný; rychlost hmotného bodu s rostoucím časem klesá.

Ve speciálním případě, kdy funkce $f(t)$ je kladná konstanta (což po fysikální stránce by charakterisovalo ten stav, kdy v každém bodě plochy je „tření" stejné), tj.

$$f(t) = k^2 \quad (k \neq 0 \text{ je konst}) \, ,$$

redukuje se formule na tvar

$$v = \underset{0}{v} e^{-\frac{k^2}{m}(t - \underset{0}{t})} .$$

5. ASYMPTOTICKÉ ČÁRY NA PLOŠE

Dosud jsme uvažovali pohyb hmotného bodu po dané ploše s hlediska pevné plochy, tj. tak, že s plochou je spjat pevně zvolený systém souřadný. Mysleme si však nyní plochu v E_3 jako hmotný dvojdimensionální útvar,[7]) který jako celek podléhá vnějšímu silovému poli a sledujme pohyb hmotného bodu vázaného na tuto plochu. Pohyb hmotného bodu po ploše bude v obecném případě ovlivňovat polohu plochy v prostoru, tj. hmotný bod pohybující se po dané ploše bude vyvolávat lokální síly — prostě bude vyvíjet určitý „tlak" na plochu.

Při pohybu hmotného bodu po dané ploše (3,1) (pevné vůči vnějším silám) lze v každém časovém okamžiku jeho vektor zrychlení a^α rozložit ve dvě komponenty, z nichž jedna leží v tečné rovině (tj. komponenta a_T^α z $(3,6)_a$) a druhá v normále plochy (komponenta a_N^α z $(3,6)_b$) v příslušném bodě plochy. Do normály plochy spadá tedy — při pohybu bodu po křivce (3,2) — složka

$$a_N^\alpha = - h_{ab} \frac{d\eta^a}{dt} \frac{d\eta^b}{dt} N^\alpha$$

zrychlení a^α. Vektor T^α takto definovaný

$$T^\alpha = - m h_{ab} \frac{d\eta^a}{dt} \frac{d\eta^b}{dt} N^\alpha \tag{5,1}$$

představuje *tlak* v čase t způsobený pohybujícím se bodem na danou plochu.

Položme si nyní tuto otázku:

Existuje na dané ploše s popisem (3,1) křivka druhé třídy (s popisem (3,2)) taková, aby hmotný bod pohybující se po této křivce nevyvíjel lokálně žádný tlak na danou plochu? Existuje-li taková křivka, jak ji lze pak charakterisovat jako určitou speciální křivku na dané ploše?

---

[7]) Tj. pochopitelně zidealisování skutečnosti. Jde spíše o představu velmi tenké zakřivené hmotné vrstvy.

Předpokládejme, že taková křivka existuje. Potom podle předpokladu je $T^\alpha \equiv 0$ v bodech této křivky a tedy — jak plyne z (5,1) —

$$h_{ab} \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{5,2}$$

v bodech křivky.

Relace (5,2) představuje kvadratickou rovnici pro veličiny $\frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}$ $(a = 1, 2)$. Kdyby v nějakém okamžiku bylo současně $\frac{\mathrm{d}\eta^1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\eta^2}{\mathrm{d}t} = 0$, potom z (4,4) by plynulo $v^2 = 0$ pro tento okamžik; rychlost by v tomto okamžiku byla nulová. Předpoklad $v \neq 0$ implikuje, že aspoň jedna veličina $\frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}$, $a \in 1, 2$ je od nuly různá. Předpokládejme, že je např. $\frac{\mathrm{d}\eta^2}{\mathrm{d}t} \neq 0$. Z (5,2) plyne pak

$$\left(\frac{\frac{\mathrm{d}\eta^1}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}\eta^2}{\mathrm{d}t}}\right)_{1,2} = \frac{-h_{12} \pm \sqrt{h_{12}h_{21} - h_{11}h_{22}}}{h_{11}}.$$

Rovnice (5,2) může mít tedy reálné řešení pro hledaný poměr tehdy a jen tehdy, je-li

$$h_{12}h_{21} - h_{11}h_{22} \geqq 0$$

tj. platí-li

$$\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} \leqq 0\,.$$

Podle (1,16)* je to tedy možné jen v těch bodech plochy, kde je Gaussova křivost K nekladná.[8]) Každým bodem plochy, kde je $K < 0$, prochází dvě čáry, které jsou (lokálně) řešením rovnic (5,2). Pro takovou plochu, pro kterou je $K = 0$ každém jejím bodě[9]), pochází každý bodem právě jedna čára, která je rovnicemi (5,2) jednoznačně definována. Na plochách s kladnou Gaussovou křivostí takové čáry neexistují.

Jsou-li tedy relací (5,2) definovány reálné funkce $\eta^a(t)$, potom křivka s popisem

$$x^\alpha = x^\alpha(\eta^a(t))$$

se nazývá *asymptotickou čarou na dané ploše.*

Pohybuje-li se hmotný bod po čáře asymptotické na dané ploše, potom tlak vyvíjený tímto bodem na plochu je nulový. To je fysikální charakteristika asymptotických čar.

---

[8]) V každém bodě regulární plochy, je totiž $\bar{g}_{11}\bar{g}_{22} - \bar{g}_{12}\bar{g}_{21} > 0$.

[9]) To jsou tzv. rozvinutelné plochy.

Na hmotný bod, pohybující se po dané ploše, působí též vnější síla, jejíž složku spadající do směru normály plochy označme F^α_N. Z (1,14) plyne

$$F^\alpha_N = \omega N^\alpha .$$

Snadno spočteme z (1,14), že

$$\omega = g_{\mu\nu} F^\mu N^\nu .$$

Můžeme tedy psát

$$F^\alpha_N = N^\alpha (g_{\mu\nu} F^\mu N^\nu) . \tag{5,2)*$$

K tlaku hmotného bodu při jeho pohybu po ploše, charakterisovanému vektorem T^α z (5,1), přistupuje tak ještě složka F^α_N vnější síly do směru normály, která působí na pohybující se hmotný bod.

Hmotný bod, který pod vlivem vnější síly na něj působící se pohybuje po ploše s popisem (3,1), působí lokálně na pevnou plochu[10]) silou

$$\begin{aligned} P^\alpha &= T^\alpha + F^\alpha_N = - m h_{ab} \frac{d\eta^a}{dt} \frac{d\eta^b}{dt} N^\alpha + \\ &+ N^\alpha (g_{\mu\nu} F^\mu N^\nu) = \\ &= N^\alpha (g_{\mu\nu} F^\mu N^\nu - m h_{ab} \frac{d\eta^a}{dt} \frac{d\eta^b}{dt}) . \end{aligned} \tag{5,3}$$

Pro čtverec absolutní velikosti vektoru P^α plyne z (5,3), (1,13)

$$\begin{aligned} P^2 &= g_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta = g_{\alpha\beta} N^\alpha N^\beta \left(g_{\mu\nu} F^\mu N^\nu - m h_{ab} \frac{d\eta^a}{dt} \frac{d\eta^b}{dt} \right)^2 = \\ &= \left(g_{\mu\nu} F^\mu N^\nu - m h_{ab} \frac{d\eta^a}{dt} \frac{d\eta^b}{dt} \right)^2 . \end{aligned} \tag{5,4}$$

Formule (5,4) použijeme v následujícím šestém odstavci.

6. HLAVNÍ ČÁRY PLOCHY

Nechť křivka v E_3 s popisem (3,2) je trajektorií hmotného bodu o hmotě m, vázaného na plochu druhé třídy v E_3 s popisem (3,1). Nechť pro $t = \underset{0}{t}$ je rychlost $\underset{0}{v} = v(\underset{0}{t})$ pohybujícího se hmotného bodu od nuly různá, tj. hmotný bod má v bodě $\underset{0}{x^\alpha} = x^\alpha(\eta^a(\underset{0}{t}))$ dané plochy nenulovou rychlost. Označme symbolem s oblouk dané trajektorie (3,2). Poněvadž předpokládáme, že křivka popsaná rovnicemi (3,2) je křivkou regulární, můžeme ji vztáhnout k oblouku s jakožto parametru, kde

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\bar{g}_{ab} \frac{d\eta^a}{dt} \frac{d\eta^b}{dt}}\, dt .^{11)} \tag{6,1}$$

[10]) Tj. případ, kdy systém souřadný uvažujeme pevně spjat s danou plochou.
[11]) Viz (4,3), (4,4).

Poněvadž je $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\bar{g}_{ab} \frac{d\eta^a}{dt} \frac{d\eta^b}{dt}}$ v bodech regulární křivky na dané ploše větší než nula, můžeme ze vztahu (6,1) vypočíst t jakožto funkci s, tj. $t = t(s)$. Pak na $\eta^a(t)$ se můžeme dívat jako na složené funkce oblouku s, tj. $\eta^a(t(s))$. Za našich předpokladů pak platí

$$\frac{d\eta^a}{ds} = \frac{d\eta^a}{dt} \frac{dt}{ds} .$$

Snadno nahlédneme, že je

$$\bar{g}_{ab} \frac{d\eta^a}{ds} \frac{d\eta^b}{ds} = 1 .$$

Zavedeme-li pro stručnost označení

$$\underset{1}{i}^a \equiv \frac{d\eta^a}{ds} , \tag{6,2}$$

potom můžeme psát

$$\bar{g}_{ab} \underset{1}{i}^a \underset{1}{i}^b = 1 . \tag{6,3}$$

Z (6,3), (1,10) plyne pak

$$1 = \bar{g}_{ab} \underset{1}{i}^a \underset{1}{i}^b = g_{\alpha\beta} (B^\alpha_a \underset{1}{i}^a)(B^\beta_b \underset{1}{i}^b)$$

tj. vektor

$$\underset{1}{i}^\alpha \equiv B^\alpha_a \underset{1}{i}^a , \tag{6,4}$$

který leží v tečné rovině v příslušném bodě dané plochy, je vektorem jednotkovým. Je ihned patrné, že je to jednotkový tečný vektor dané křivky (3,2).

V uvažovaném bodě $\underset{0}{x}^\alpha = x^\alpha(\eta^a(\underset{0}{t}))$ křivky (3,2) definují tedy čísla

$$(\underset{1}{i}^a)_0 \equiv \left(\frac{d\eta^a}{ds}\right)_{s=0} , \quad (a = 1, 2)$$

jednoznačně určitý jednotkový vektor

$$(\underset{1}{i}^\alpha)_0 = (B^\alpha_a)_0 (\underset{1}{i}^a)_0 \tag{6,5}$$

v tečné rovině bodu $\underset{0}{x}^\alpha$ dané plochy.

Obraťme se nyní, po tomto stručném úvodu, k vektoru P^α, definovaném v (5,3). Vzhledem k jeho fysikálnímu významu, uvedeném na konci odstavce 5, budeme vektor P^α nazývat *vektorem vazbové síly při pohybu hmotného bodu po ploše*. Jeho velikost, označenou v (5,4) symbolem P, nazveme *vazbovou silou pohybujícího se hmotného bodu*.

Pro čtverec vazbové síly $\underset{0}{P}^2$ v bodě dříve uvažovaném $\underset{0}{x}^\alpha$ platí tedy — podle (5,4) —

$$\underset{0}{P}^2 = \left(g_{\mu\nu} F^\mu N^\nu - m h_{ab} \frac{d\eta^a}{dt} \frac{d\eta^b}{dt}\right)^2_{t=\underset{0}{t}} . \tag{6,6}$$

Vzhledem k symbolice zavedené v (6,2), (4,3) můžeme (6,6) přepsat na tvar

$$\underset{0}{P}^2 = \left(g_{\mu\nu} F^\mu N^\nu - m h_{ab} \underset{1}{i}^a \underset{1}{i}^b \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \right)^2 \right)^2_{t=\underset{0}{t}} =$$

$$= (g_{\mu\nu} F^\mu N^\nu - m v^2 h_{ab} \underset{1}{i}^a \underset{1}{i}^b)^2_{t=\underset{0}{t}}, \tag{6,7}$$

přičemž platí (6,3)

Mysleme si nyní všechny regulární křivky dané plochy, které procházejí uvažovaným bodem $\underset{0}{x}^\alpha$. Mysleme si dále, že každá z těchto křivek je trajektorií nějakého hmotného bodu. Z (6,7) pak můžeme vyčíst, že vazbová síla v bodě $\underset{0}{x}^\alpha$ závisí

a) na vektoru F^α vnější síly v bodě $\underset{0}{x}^\alpha$,

b) na hmotě m pohybujícího se bodu,

c) na jeho rychlosti v bodě $\underset{0}{x}^\alpha$,

d) na číslech $(\underset{1}{i}^a)_0$, která[12]) jednoznačně definují směr pohybu v bodě $\underset{0}{x}^\alpha$, tj. určují směr tečny křivky v bodě $\underset{0}{x}^\alpha$.

My se budeme zabývati závislostí vazbové síly $\underset{0}{P}$ na číslech $(\underset{1}{i}^a)_0$, uvedené shora sub d). Přesněji řečeno: bude nás zajímat následující problém:

Je dána regulární plocha druhé třídy v E_3. V každém bodě této plochy je znám vektor síly F^α, která působí na hmotný bod o hmotě m. Mezi všemi trajektoriemi daného hmotného bodu ležícími v dané ploše, které vycházejí z bodu $\underset{0}{x}^\alpha = x^\alpha(\eta^a(\underset{0}{t}))$ dané plochy, v němž je předepsána nenulová rychlost $\underset{0}{v}$ hmotného bodu, máme určit tu, pro kterou vazbová síla $\underset{0}{P}$ nabývá extremální hodnoty.

Podotkněme nejdříve, že pohyb hmotného bodu vázaného na danou plochu je popsán rovnicemi (3,14). Při počátečních podmínkách $(\eta^a)_0$, $\left(\frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}\right)_0$ je tento pohyb jednoznačně určen,[13]) jak bylo uvedeno koncem odstavce 3. V našem shora položeném problému je dána počáteční poloha hmotného bodu, tedy čísla $(\eta^a)_0 = \eta^a(\underset{0}{t})$ a rychlost $\underset{0}{v} = \left(\sqrt{g_{ab} \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t}}\right)_{t=\underset{0}{t}}$, tedy o jednu podmínku méně než je třeba pro jednoznačnost řešení rovnic (3,14). Tento fakt vyvážíme právě požadavkem, aby $\underset{0}{P}$ bylo extremální.

---

[12]) Jak bylo shora rozvedeno.

[13]) Pochopitelně za dříve uvedených podmínek diferenciability.

Problém, který jsme si položili, má následující matematickou formulaci: Máme určit extrém funkce

$$\underset{0}{P} = (g_{\mu\nu}F^\mu N^\nu)_{t=\underset{0}{t}} - mv^2(h_{ab})_{t=\underset{0}{t}}\, \underset{0}{i^a}\underset{0}{i^b}$$

dvou proměnných i^a $(a = 1, 2)$ za platnosti podmínky (6,3), tj.

$$(\bar{g}_{ab})_{t=\underset{0}{t}}\, i^a i^b = 1\,. \qquad (6,8)$$

Za našich předpokladů se zřejmě tento úkol redukuje na úkol najít extrém kvadratické formy

$$\Phi(i^a) \equiv (h_{ab})_{t=\underset{0}{t}}\, i^a i^b$$

za platnosti podmínky (6,8).

K řešení tohoto úkolu použijeme známých metod pro vyhledávání lokálních extrémů funkcí, vázaných vedlejšími podmínkami.[14]) Sestrojíme funkci

$$G(i^a) \equiv h_{ab})_{t=\underset{0}{t}} i^a i^b - \underset{0}{\sigma}\{(\bar{g}_{ab})_{t=\underset{0}{t}} i^a i^b - 1\}$$

s neurčenou dosud konstantou $\underset{0}{\sigma}$. Položíme $\dfrac{\partial G}{\partial i^c} = 0$ pro $c = 1, 2$, tj. po úpravě

$$(h_{ab} - \underset{0}{\sigma}\bar{g}_{ab})_{t=\underset{0}{t}}\, i^a = 0\,.$$

Vynásobením těchto relací tensorem $\bar{g}^{bc}$ a sečtením přes index b dostaneme vzhledem k (1,12)

$$(h^c_a - \underset{0}{\sigma}\delta^c_a)_{t=\underset{0}{t}}\, i^a = 0 \quad (c = 1, 2)\,, \qquad (6,9)$$

kde pro jednoduchost jsme položili

$$h^c_a \equiv \bar{g}^{cb}h_{ba}\,. \qquad (6,10)$$

Systém rovnic (6,9) má netriviální řešení pro čísla i^a $(a = 1, 2)$ tehdy a jen tehdy, je-li determinant soustavy roven nule, tj.

$$\left|\begin{matrix} h^1_1 - \underset{0}{\sigma} & h^2_1 \\ h^1_2 & h^2_2 - \underset{0}{\sigma} \end{matrix}\right|_{t=\underset{0}{t}} = 0\,;$$

úpravou dostaneme odtud

$$\underset{0}{\sigma}^2 - (h^1_1 + h^2_2)_{t=\underset{0}{t}}\, \underset{0}{\sigma} + (h^1_1 h^2_2 - h^1_2 h^2_1)_{t=\underset{0}{t}} = 0\,, \qquad (6,11)$$

což je kvadratická rovnice pro hledané číslo $\underset{0}{\sigma}$.

Vektor $i^\alpha \equiv (B^\alpha_a)_0\, i^a$ s počátečním bodem v bodě $\underset{0}{x^\alpha}$, kde i^a splňuje rovnice (6,9), nazývá se *hlavním směrem* v bodě $\underset{0}{x^\alpha}$ dané plochy. Z diferenciální geo-

[14]) Viz na př. *V. Jarník: Diferenciální počet*, Nakladatelství ČSAV, Praha 1953, str. 509—516.

metrie je známo, že kvadratická rovnice (6,11) má vždy reálné kořeny $\overset{(1)}{\underset{0}{\sigma}}$, $\overset{(2)}{\underset{0}{\sigma}}$ a v případě $\overset{(1)}{\underset{0}{\sigma}} \neq \overset{(2)}{\underset{0}{\sigma}}$ existují právě dvě řešení ${}^{(1)}i^a$, ${}^{(2)}i^a$, která jsou řešením rovnic (6,9). Jim příslušné vektory ${}^{(1)}i^\alpha = (B^\alpha_a)_0\, {}^{(1)}i^a$, ${}^{(2)}i^\alpha = (B^\alpha_a)_0 {}^{(2)}i^a$ jsou k sobě kolmé. Má-li rovnice (6,11) dvojnásobný kořen $\underset{0}{\sigma}$, potom každý vektor v tečné rovině plochy v bodě $\underset{0}{x^\alpha}$, který má svůj počáteční bod v $\underset{0}{x^\alpha}$, leží ve směru hlavním.

Taková regulární křivka na ploše s popisem (3,1), jejíž tečný vektor v každém jejím bodě leží v hlavním směru příslušném tomuto bodu, nazývá se *hlavní křivkou plochy.*

My jsme si shora ověřili, že v každém bodě x^α plochy, v němž trajektorie hmotného bodu vázaného na danou plochu má směr tečny spadající do hlavního směru plochy v tomto bodě, je vazbová síla P pohybujícího se hmotného bodu extremální (vzhledem ke všem možným trajektoriím téhož hmotného bodu, které při téže rychlosti hmotného bodu v bodě x^α tímto bodem procházejí).

Odtud již plyne ihned následující tvrzení: *Nechť rovnicemi* (3,2) *je popsána trajektorie hmotného bodu na dané regulární ploše druhé třídy v* E_3. *Nechť tato trajektorie je regulární křivkou. Jestliže pro každý bod této křivky je vazbová síla extremální ve smyslu shora uvedeném, potom je tato křivka hlavní křivkou plochy.*

Tím je podána fysikální charakteristika hlavních čar na ploše.

7. ZÁVĚR

Nechť za předpokladů v práci uvažovaných je rovnicemi (3,2) popsána trajektorie hmotného bodu na regulární ploše druhé třídy s popisem (3,1). Potom pro vektor zrychlení a^α hmotného bodu platí jednak (2,4), jednak (3,5). Platí tedy

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \underset{1}{i^\alpha} + \underset{1}{k} \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 \underset{2}{i^\alpha} = B^\alpha_a \nabla_t \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} - h_{ab} \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} N^\alpha . \tag{7,1}$$

Je však

$$\underset{1}{i^\alpha} = B^\alpha_a \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}s} .$$

Odtud a ze (7,1) plyne následující přepis

$$\underset{1}{k} \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 \underset{2}{i^\alpha} = B^\alpha_a \left(\nabla_t \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}t^2} \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}s}\right) - h_{ab} \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} N^\alpha . \tag{7,2}$$

Zavedeme-li pro úhel vektorů $\underset{2}{i}^\alpha$ (což jest vektor prvé normály křivky (3,2)) a N^α označení ω, potom můžeme psát

$$\cos \omega = g_{\alpha\beta} N^\alpha \underset{2}{i}^\beta .$$

Odtud, ze (7,2), (1,13), (4,3) plyne

$$\underset{1}{k} v^2 \cos \omega = - h_{ab} \frac{d\eta^a}{dt} \frac{d\eta^b}{dt} . \tag{7,3}$$

Pro velikost vektoru T^α, representujícího lokální tlak pohybujícího se hmotného bodu na danou plochu a definovaného v (5,1), plyne pak z (5,1) a (7,3)

$$|T| = \sqrt{g_{\alpha\beta} T^\alpha T^\beta} = \left| m h_{ab} \frac{d\eta^a}{dt} \frac{d\eta^b}{dt} \right| = m \underset{1}{k} v^2 |\cos \omega| ,$$

což je fysikálně důležitá formule (s kterou se v zobecněné formě setkáváme např. při průtoku kapaliny zahnutým potrubím). Formule (7,3), které jsme použili, není však ničím jiným, než fakt ze známé Meusnierovy věty, která říká, že prvá křivost křivky na ploše vynásobená kosinem úhlu prvé normály křivky a normály plochy v uvažovaném bodě, je rovna tak zvané normální křivosti plochy v tomto bodě.

Резюме

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ, АСИМПТОТИЧЕСКИЕ И ГЛАВНЫЕ ЛИНИИ ПОВЕРХНОСТИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МЕХАНИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

ФРАНТИШЕК НОЖИЧКА (František Nožička)

(Поступило в редакцию 10/III 1958 г.)

В обыкновенном трехмерном евклидовом пространстве E_3 с прямоугольной системой декартовых координат x^α ($\alpha = 1, 2, 3$) задана регулярная поверхность в смысле определения Гаусса, описанная параметрическими уравнениями

$$x^\alpha = x^\alpha(\eta^a) \quad (\alpha = 1, 2, 3 \,;\; a = 1, 2) \tag{I}$$

для η^a из определенной области O. Пусть эта поверхность расположена в силовом поле, оказывающем воздействие на материальную точку, для которой рассматриваемая поверхность представляет данную геометрическую связь. Силовое поле определено вектором силы F^α.

При математических предположениях, сделанных в работе и обоснованных там же с физической точки зрения, движение материальной точки мас-

сы m, связанной с данной поверхностью, локально описано системой уравнений

$$m \nabla_t \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} = B^a_\alpha F^\alpha , \quad a = 1, 2 \tag{II}$$

(уравнения (3,14) предыдущего текста), которая представляет собой систему двух дифференциальных уравнений второго порядка для неизвестных функций $\eta^a = \eta^a(t)$; физическое значение параметра t-время. Если вектор F^α, зависящий в общем случае от аргументов x^α, t, $\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t}$, представлен непрерывно дифференцируемыми функциями этих аргументов в точках данной поверхности, то при начальных условиях $(\eta^a)_{t=t_0} = \eta^a_0$, $\left(\frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}\right)_{t=t_0} = v^a_0$ $(a = 1, 2)$ движение материальной точки по данной поверхности описано (локально) уравнениями (II) однозначно. Подставляя решение $\eta^a(t)$ уравнений (II) в (I), получим локальное описание искомого пути материальной точки в E_3 в виде

$$x^\alpha = x^\alpha(\eta^a(t)) \, . \tag{III}$$

Цель работы заключается в том, чтобы дать физическую характеристику привилегированных кривых на поверхности, т. е. геодезических, асимптотических и главных. Выведены следующие результаты:

(A) *Материальная точка, которая связана с поверхностью и не подвергается воздействию никаких внешних сил, либо находится в состоянии покоя, либо движется равномерно по геодезической линии поверхности (по отношению к неподвижной поверхности), описанной системой уравнений*

$$\nabla_t \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\eta^a}{\mathrm{d}t^2} + \begin{Bmatrix} a \\ bc \end{Bmatrix} \frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\eta^c}{\mathrm{d}t} = 0 \, .$$

(B) *Если материальная точка передвигается по асимптотической кривой данной поверхности* (гауссова кривизна которой неотрицательна), т. е. по кривой, описанной уравнениями (III), в любой точке которой выполняется соотношение $h_{ab} \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} = 0$, h_{ab} — второй метрический тензор поверхности, *то давление, которое эта точка оказывает на поверхность, равно нулю.*

(C) *Если материальная точка, связанная с данной поверхностью, движется по такой кривой, что т. наз. сила связи является в каждой точке этой кривой экстремальной в смысле, указанном в работе, то эта кривая является главной кривой поверхности.*

Résumé

LES LIGNES GÉODÉSIQUES, ASYMPTOTIQUES ET LES LIGNES DE COURBURE DU POINT DE VUE DE LA MÉCANIQUE D'UN POINT MATÉRIEL

František Nožička

(Reçu le 10 mars 1958.)

Considérons dans l'espace ordinaire (aux coordonnées rectangulaires x^α ($\alpha = 1, 2, 3$)) une surface (au sens de la définition de Gauss) aux équations paramétriques suivantes

$$x^\alpha = x^\alpha(\eta^a) \quad (\alpha = 1, 2, 3;\ a = 1, 2)\,, \tag{I}$$

où les fonctions $x^\alpha(\eta^a)$ sont définies dans un certain domaine O des paramètres η^a. Supposons que cette surface soit plongée dans un champ de force agissant sur un point matériel; la surface même soit la liaison géométrique du point matériel considéré. Le champ soit bien défini par le vecteur de force F^α.

Sous les suppositions mathématiques mentionnées (et justifiées du point de vue de la physique) dans le texte de l'article, le mouvement du point matériel lié à la surface donnée est localement décrit par le système des équations suivantes

$$m\, \nabla_t \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} = B^a_\alpha F^\alpha \quad (a = 1, 2) \tag{II}$$

(les équations (3,14) du texte tchèque); le symbole m signifie la masse du point matériel. Le système des équations (II) est un système de deux équations différentielles ordinaires de second ordre pour les fonctions $\eta^a(t)$ ($a = 1, 2$) inconnues, où le paramètre t a la signification physique de temps. Si le vecteur F^α (dépendant en général de l'ensemble des éléments x^α, t, $\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t}$ dans les points de la surface donnée) est défini par des fonctions possédant les dérivées continues par rapport à leurs variables et si les conditions initiales

$$(\eta^a)_{t=\underset{0}{t}} = \underset{0}{\eta}{}^a\,, \quad \left(\frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}\right)_{t=\underset{0}{t}} = \underset{0}{v}{}^a \quad (a = 1, 2)$$

sont données, le mouvement du point matériel est bien déterminé par les équations (II). La solution $\eta^a(t)$ des équations (II) mène à la description locale

$$x^\alpha = x^\alpha(\eta^a(t)) \tag{III}$$

du trajet du point matériel à la surface.

Le but de l'article est la description des lignes privilégiées de la surface (les lignes géodésiques, asymptotiques et les lignes de courbure) du point de vue de la mécanique. On parvient aux résultats suivants:

(A) *Le point matériel lié à la surface en cas d'absence de forces extérieures reste en repos, ou se meut sur la surface uniformément le long de la ligne géodésique dont les équations sont les suivantes*

$$\nabla_t \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\eta^a}{\mathrm{d}t^2} + \begin{Bmatrix} a \\ bc \end{Bmatrix} \frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\eta^c}{\mathrm{d}t} = 0 \,.$$

(B) *Si le trajet d'un point matériel lié à la surface* (la courbure de Gauss de la surface étant non-positive) *correspond* à *une ligne asymptotique de la surface* (c'est-à-dire à la ligne aux équations (III), où les fonctions $\eta^a(t)$ satisfont à la relation $h_{ab} \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\eta^b}{\mathrm{d}t} = 0$, h_{ab} est le second tenseur métrique de la surface), *la pression du point matériel à la surface est nulle.*

(C) *Si le point matériel lié à la surface parcourt une courbe telle que la pression totale a la valeur extrême (au sens précisé dans le texte tchèque) dans chaque point de la courbe, il parcourt une ligne de courbure de la surface en question.*