

Aplikace matematiky

Jaroslav Valenta

Die theoretische Lösung der dickwandigen geteilten Kreiszyinderschale

Aplikace matematiky, Vol. 3 (1958), No. 6, 461–478

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102638>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1958

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

DIE THEORETISCHE LÖSUNG DER DICKWANDIGEN GETEILTEN KREISZYLINDERSCHALE

JAROSLAV VALENTA

(Eingegangen am 27. März 1958.)

DT: 621.31—46:539.3/4

In der vorliegenden Arbeit wird das Problem des Spannungszustands und der Verformung einer unendlich langen, dickwandigen, durch den Kreiszyklinderausschnitt gebildeten und mit Bezug auf ihre Symmetrieebene symmetrisch belasteten Schale gelöst. Die Randbedingungen an den Längsrändern wurden mittels der sog. „homogenen“ Lösung erfüllt, die der unbelasteten inneren bzw. äusseren Zylinderfläche entspricht.

Bezeichnungen

| | |
|--|--|
| a | innerer Radius der Zylinderschale |
| b | äusserer Radius der Zylinderschale |
| R | Radius der mittleren Zylinderfläche |
| r | veränderlicher Radius der Zylinderschale |
| h | halbe Dicke der Schale |
| ϑ | der Winkel zwischen dem Radiusvektor und der Symmetrieachse des Zylinderausschnittes |
| $\widehat{rr}, \widehat{\vartheta\vartheta}, \widehat{r\vartheta}$ | Radial- Umfangs- Schub- und Achsenspannung (der positive Spannungswert bedeutet den Zug) |
| \widehat{zz} | |
| u_r, u_ϑ | Radial- und Umfangsverformung des Behälters |
| E | Elastizitätsmodul des Behältermaterials |
| ν | Kehrwert der Poissonschen Konstante |
| $\varrho = \frac{r}{R}, \varrho_1 = \frac{a}{R}, \varrho_2 = \frac{b}{R}, \beta = \frac{b}{a}$ | |
| $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ | |

Einleitung

Bei der Festigkeitsberechnung der Dampfturbinengehäuse wird gewöhnlich das Gehäuse als dickwandiger, geschlossener, durch den Innendruck belasteter

Zylinder erwogen. Unter diesen groben Bedingungen gibt uns die Berechnung keine Möglichkeiten den Spannungszustand gerade an den ungünstigen Stellen, d. h. im Übergang zwischen dem Flansch und der Zylinderwandung, näher zu bestimmen.

Das Gehäuse einer Hochdruck-Dampfturbine ist im wesentlichen ein geteilter, dickwandiger Zylinder, der in seiner Teilungsebene mit einem Flansch versehen ist. Die älteste Lösung des dickwandigen, geteilten, durch hydrostatischen Druck belasteten Zylinders stammt von PÖSCHL [7]. Die Lösung ist mittels der Fourierreihen, deren Koeffizienten die Funktionen des Behälterdurchmessers sind, durchgeführt. In die Ergebnisse schliesst der Verfasser nur das erste Glied einzelner Reihen ein, wodurch er nicht die allgemeinen Randbedingungen an den Längsrändern erfüllen kann. In der Arbeit von GALERKIN [1] wird die Lösung des Spannungszustands des geteilten Zylinders mittels dreier unabhängiger harmonischer Funktionen angedeutet.

In der vorliegenden Arbeit wurde bei der Lösung des geteilten, unendlich langen, dickwandigen Zylinders die Methode von HAMPL verwendet [4], welche für die dickwandigen geteilten Kugelschalen ausgearbeitet wurde. In dieser Methode wurde, soweit ich es übersehen kann, zum ersten Male die sogenannte „homogene“ Lösung verwendet, welche den unbelasteten krummen Zylinderwandungen entspricht und nur den durch Belastung der Längsränder herbeigeführten Spannungszustand bestimmt. Im Falle des geteilten Zylinders kann man diese Randbedingungen an den Längsrändern entweder mittels für die Umfangs- und Schubspannung vorgeschriebener Funktionen oder mittels der Radial- bzw. Umfangsverformungen ausdrücken.

1. Die grundlegenden Verformungsbeziehungen und die Lösung des Problems

Setzen wir einen geteilten Zylinder unendlich lang und bezüglich der Achse y symmetrisch belastet voraus (Abb. 1). Deuten wir ferner einen beliebigen Querschnitt durch den Behälter an und stellen daraus ein Einheits-element (Abb. 2) auf. Der Nullpunkt des Koordinatensystems wird in der Zylindermitte gewählt.

Der innere Zylinderdurchmesser wird mit $2a$, der äussere mit $2b$, der mittlere mit $2R = a + b$ bezeichnet. Die Zylinderdicke ist also $b - a = 2h$. Die angeführte Berechnung gilt für beliebige $h > 0$.

Auf die einzelnen Schnittflächen wirken die Normalspannungen \widehat{rr} , $\widehat{\vartheta\vartheta}$, \widehat{zz} und die Schubspannungen $\widehat{r\vartheta}$, \widehat{rz} und $\widehat{\vartheta z}$. Der Zylinder ist unendlich lang, so dass der Spannungszustand des Behälters der ebene Spannungszustand ist; infolgedessen ist $\widehat{rz} = \widehat{\vartheta z} = 0$. Es werden also keine Grössen von z abhängen und die Ableitungen einer beliebigen Funktion nach z werden gleich Null sein.

Die grundlegenden Deformationsverhältnisse des ebenen Spannungszustandes in den Polarkoordinaten sind mit folgenden Ausdrücken [6] gegeben:

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{u_r}{r},$$

$$e_{r\vartheta} = \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} - \frac{u_\vartheta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta}. \quad (1.1)$$

Die räumliche Ausdehnung der Volumeneinheit

$$\Delta = e_{rr} + e_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} \quad (1.2)$$

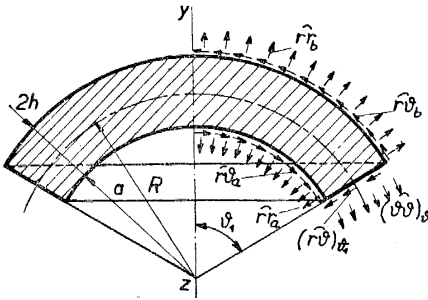


Abb. 1.

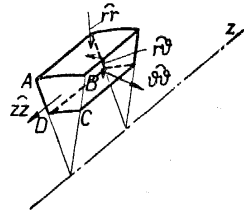


Abb. 2.

und der Verdrehungswinkel des elementaren Volumens um die z-Achse

$$\omega_z = \frac{1}{2r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (ru_\vartheta) - \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} \right]. \quad (1.3)$$

Dabei sind die Spannungen mit den folgenden Ausdrücken [6] gegeben:

$$\widehat{rr} = \lambda \Delta + 2\mu e_{rr}, \quad r\vartheta = \mu e_{r\vartheta},$$

$$\widehat{\vartheta\vartheta} = \lambda \Delta + 2\mu e_{\vartheta\vartheta}, \quad \widehat{zz} = \lambda \Delta. \quad (1.4)$$

Die statischen Gleichgewichtsgleichungen werden mit Bezug auf den ebenen Spannungszustand auf zwei Gleichungen reduziert, so dass — wenn keine Massenkräfte vorhanden sind — sich ergibt [6]

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \omega_z}{\partial \vartheta} = 0, \quad (1.5)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \vartheta} + 2\mu \frac{\partial \omega_z}{\partial r} = 0. \quad (1.6)$$

Sind uns die Verformungen u_r und u_ϑ bekannt, können wir bereits den Spannungszustand des Behälters bestimmen, da alle übrigen Größen die Funktionen nur von diesen Verformungen sind.

Die Gleichung (1.6) wird identisch erfüllt, wenn

$$\Delta = \frac{1-2\nu}{1-\nu} r \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \omega_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \quad \text{gilt,} \quad (1.7)$$

wo Φ eine bisher unbekannte, aber sonst beliebige Funktion der Veränderlichen r, ϑ ist, welche zweimal differenziert werden kann. Durch Einsetzung in die Gleichung (1.5) ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^2} = 0. \quad (1.8)$$

Diese Gleichung hat bei einer symmetrischen Belastung die Lösung von der Form

$$\Phi = C_{10} + C_{20} \lg \frac{r}{a} + \sum_{\alpha=1}^{\infty} (C_{1\alpha} r^\alpha + C_{2\alpha} r^{-\alpha}) \cos \alpha \vartheta, \quad (1.9)$$

wo $C_{1\alpha}, C_{2\alpha}$ die Integrationskonstanten darstellen.

Jede harmonische Funktion kann man in der Form (1.9) ausdrücken, in der die unendliche Reihe einschliesslich aller zweiten Ableitungen in unserem Bereiche beinahe gleichmässig konvergiert, d. i. gleichmässig an jeder geschlossenen Menge innerhalb eines zu definierenden Bereiches.

Die Gleichung (1.3) kann nach Einführung der Gleichung (1.7) mittels einer neuen Funktion $\chi(r, \vartheta)$ identisch erfüllt werden, indem wir

$$u_r = \frac{\partial \chi}{\partial r} + 2r\Phi, \quad u_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \vartheta} \quad (1.10)$$

schreiben.

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichung (1.7) ein, ergibt sich mit der Gleichung (1.7) für die Funktion χ folgende Beziehung

$$\Delta^2 \chi = -4\Phi - \frac{1}{1-\nu} r \frac{\partial \Phi}{\partial r}. \quad (1.11)$$

Wird auf die Gleichung (1.11) die Operation ∇^2 angewandt, ergibt sich für χ eine biharmonische Gl. $\nabla^4 \chi = 0$. Die Lösung der Gleichung (1.11) kann abermals in der Form

$$\begin{aligned} \chi = & C_{30} + C_{40} \lg \frac{r}{a} - r^2 \left\{ C_{10} + \left[\lg \frac{r}{a} - \frac{3-4\nu}{4(1-\nu)} \right] C_{20} \right\} + \\ & - \left\{ \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\frac{5-4\nu}{4} C_{11} r^3 + (3-4\nu) C_{21} r \lg \frac{r}{a} \right] - C_{31} r - C_{41} r^{-1} \right\} \cos \vartheta + \\ & + \sum_{\alpha=2}^{\infty} [C_{3\alpha} r^\alpha + C_{4\alpha} r^{-\alpha} + A_{1\alpha} C_{1\alpha} r^{\alpha+2} + A_{2\alpha} C_{2\alpha} r^{-\alpha+2}] \cos \alpha \vartheta \quad (1.12) \end{aligned}$$

geschrieben werden, wo

$$A_{1\alpha} = - \left[1 + \frac{\alpha}{4(1-\nu)} \right] \frac{1}{1+\alpha}, \quad A_{2\alpha} = - \left[1 - \frac{\alpha}{4(1-\nu)} \right] \frac{1}{1-\alpha} \quad \text{ist.}$$

Von der biharmonischen Funktion χ einschliesslich aller zweiten Ableitungen kann man abermals beweisen, dass sie in unserem Bereiche beinahe konvergent ist.

Mit Rücksicht auf die Beziehungen (1.7) und (1.10) kann man die Ausdrücke für die Spannungen (1.4) in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{1+\nu}{E} \widehat{rr} &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{2-\nu}{1-\nu} r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + 2\Phi, \\ \frac{1+\nu}{E} \widehat{\vartheta\vartheta} &= - \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + 2\Phi \right], \\ \frac{1+\nu}{E} \widehat{zz} &= \frac{\nu}{1-\nu} r \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \\ \frac{1+\nu}{E} \widehat{r\vartheta} &= \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \chi \right) + \Phi \right]. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Sind uns also die beiden Funktionen χ und Φ einschliesslich der Integrationskonstanten bekannt, kann man die Spannungen und die Verformungen im beliebigen Punkte des offenen bzw. des geschlossenen, mit Bezug auf die Symmetrieebene (y) symmetrisch belasteten Behälters, bestimmen.

Bei den geteilten Zylindern, wie z. B. bei den Gehäusedeckeln, Turbinengehäusen u. ä. werden darüber die Randbedingungen an den geradlinigen Rändern vorgeschrieben. In solchen Fällen verwendet man die sogenannte „homogene“ Lösung, mit der die vorgeschriebenen Bedingungen am geradlinigen Rande erfüllt werden.

Im allgemeinen kann man also schreiben

$$\Phi = \Phi_p + \Phi_h \quad \text{und} \quad \chi = \chi_p + \chi_h, \quad (1.14)$$

wo mit dem Index „ p “ die Partikularlösung, welche die Randbedingungen an den krummen Rändern erfüllt und mit dem Index „ h “ die „homogene“ Lösung, mit dem wir den Einfluss der Längsränder respektieren und die krummen Zylinderwände unbelastet lassen, bezeichnet werden.

2. Die Partikularlösung

Setzen wir voraus, dass man die Normalspannungen an der inneren bzw. an der äusseren Zylinderoberfläche \widehat{rr}_a und \widehat{rr}_b in eine unendliche Reihe nach $\cos \alpha\vartheta$ und die Schubspannungen $\widehat{r\vartheta}_a$ und $\widehat{r\vartheta}_b$ in eine Reihe nach $\sin \alpha\vartheta$, wo $\alpha = 0, 1, 2, \dots$, entwickeln kann. Die Randbedingungen werden erfüllt, wenn für alle α

$$\begin{aligned} \widehat{rr}_a &= \sum_{\alpha=0,1,2,\dots}^{\infty} \mathfrak{A}_{1\alpha} \cos \alpha\vartheta, & \widehat{rr}_b &= \sum_{\alpha=0,1,2,\dots}^{\infty} \mathfrak{B}_{1\alpha} \cos \alpha\vartheta, \\ \widehat{r\vartheta}_a &= \sum_{\alpha=0,1,2,\dots}^{\infty} \mathfrak{A}_{2\alpha} \sin \alpha\vartheta, & \widehat{r\vartheta}_b &= \sum_{\alpha=0,1,2,\dots}^{\infty} \mathfrak{B}_{2\alpha} \sin \alpha\vartheta \end{aligned} \quad (2.1)$$

gelten wird. Die Koeffizienten der Entwicklung (2.1) bekommt man, wenn die Funktionen \widehat{r}_a , \widehat{r}_b usw. innerhalb des Intervalls $[0; \vartheta_1]$ beliebig, z. B. stetig ergänzt werden; dann gilt

$$\mathfrak{A}_{1\alpha} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{r}_a \cos \alpha \vartheta \, d\vartheta, \quad \mathfrak{B}_{1\alpha} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{r}_b \cos \alpha \vartheta \, d\vartheta,$$

bzw.

$$\mathfrak{A}_{2\alpha} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{r}_a \sin \alpha \vartheta \, d\vartheta, \quad \mathfrak{B}_{2\alpha} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{r}_b \sin \alpha \vartheta \, d\vartheta.$$

Setzen wir in die Gleichung (2.1) für \widehat{r} und $\widehat{r}\vartheta$ die Ausdrücke (1.13), für Φ_p und χ_p die Beziehungen (1.9) bzw. (1.12) ein und vergleichen wir die Glieder mit gleichen Funktionen ϑ , bekommen wir für die Bestimmung der Konstanten C_α das folgende System von Lineargleichungen:

für $\alpha = 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(1-\nu)} C_{20} - \frac{1}{a^2} C_{40} &= \frac{1+\nu}{E} \mathfrak{A}_{10}, \\ \frac{1}{2(1-\nu)} C_{20} - \frac{1}{b^2} C_{40} &= \frac{1+\nu}{E} \mathfrak{B}_{10} \end{aligned} \quad (2.2)$$

und für jedes weitere ganze α

$$\begin{aligned} C_{1\alpha} f_{1\alpha} a^\alpha + C_{2\alpha} f_{2\alpha} a^{-\alpha} + \alpha(\alpha-1) C_{3\alpha} a^{\alpha-2} + \alpha(\alpha-1) C_{4\alpha} a^{-\alpha-2} &= \frac{1+\nu}{E} \mathfrak{A}_{1\alpha}, \\ C_{1\alpha} g_{1\alpha} b^\alpha + \dots &= \frac{1+\nu}{E} \mathfrak{B}_{1\alpha}, \\ C_{1\alpha} g_{1\alpha} a^\alpha + C_{2\alpha} g_{2\alpha} a^{-\alpha} + \alpha(\alpha-1) C_{3\alpha} a^{\alpha-2} + \alpha(\alpha+1) C_{4\alpha} a^{-\alpha-2} &= \frac{1+\nu}{E} \mathfrak{A}_{2\alpha}, \\ C_{1\alpha} g_{1\alpha} b^\alpha + \dots &= \frac{1+\nu}{E} \mathfrak{B}_{2\alpha}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

wo für $\alpha = 1$

$$f_{11} = g_{11} = \frac{1}{4(1-\nu)}, \quad f_{21} = -\frac{3+2\nu}{2(1+\nu)}, \quad g_{21} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \text{ ist}$$

und für $\alpha = 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} f_{1\alpha} &= \frac{(2-\alpha)\alpha}{4(1-\nu)}, \quad f_{2\alpha} = -\frac{(2+\alpha)\alpha}{4(1-\nu)}, \\ g_{1\alpha} &= -g_{2\alpha} = \frac{\alpha^2}{4(1-\nu)} \text{ ist.} \end{aligned}$$

Für jedes α bestimmen wir aus diesen Gleichungen vier Integrationskonstanten $C_{1\alpha}$, $C_{2\alpha}$, $C_{3\alpha}$ und $C_{4\alpha}$. Soweit α eine ganze Zahl ist und soweit $\alpha > 1$ ist, ist die Determinante des Gleichungssystems (2.3) $D_\alpha \neq 0$, so dass die Konstanten C_α eindeutig bestimmt sind. Der Fall $\alpha = 1$ ist getrennt zu untersuchen.

Durch Einsetzen von $\alpha = 1$ in die Gl. (2.3) bekommt man vier inhomogene Lineargleichungen mit drei Unbekannten, denn die Konstante C_{31} , multipliziert mit dem Ausdruck $(\alpha - 1)$, fällt aus. Dieses System muss nicht allgemein lösbar sein. Um diese Schwierigkeiten zu beseitigen, führen wir für $\alpha = 1$ eine neue biharmonische Funktion ein, welche der homogenen Gleichung (1.11) entspricht. Eine solche Funktion bildet z. B.

$$\bar{z} = \bar{C}_{11} r \left[\lg \frac{r}{a} \cos \vartheta - \vartheta \sin \vartheta \right]. \quad (2.4)$$

Es kann bewiesen werden, dass in diesem Falle ($\alpha = 1$) die Determinante des Systems der Gleichungen (2.3) D_1 von Null verschieden ist und die Funktion (2.4) der Gl. (1.1) entspricht.

Die Spannungszustände und die Deformationen eines dickwandigen, geschlossenen bzw. geteilten und an den krummen Wandungen durch Radial- und Schubspannung (mit Bezug auf die y -Achse symmetrisch) belasteten Zylinders, werden also mit folgenden Ausdrücken gegeben $\left(\varrho = \frac{r}{R} \right)$

$$\begin{aligned} \frac{1 + \nu}{E} \widehat{rr} = & \frac{C_{20}}{2(1-\nu)} - C_{40}\varrho^{-2} + \left\{ \bar{C}_{11} - \frac{3-2\nu}{2(1-\nu)} C_{21} \right\} \varrho^{-1} + \frac{1}{4(1-\nu)} C_{11}\varrho + \\ & + 2C_{41}\varrho^{-3} \Big\} \cos \vartheta + \sum_{\alpha=2,3,\dots}^{\infty} \left[\frac{2-\alpha}{4(1-\nu)} C_{1\alpha}\varrho^\alpha - \frac{\alpha+2}{4(1-\nu)} C_{2\alpha}\varrho^{-\alpha} + \right. \\ & \left. + (\alpha-1) C_{3\alpha}\varrho^{\alpha-2} + (\alpha+1) C_{4\alpha}\varrho^{-\alpha-2} \right] \cos \alpha \vartheta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1 + \nu}{E} \widehat{\vartheta\vartheta} = & \frac{1}{2(1-\nu)} C_{20} + C_{40}\varrho^{-2} + \left\{ -\bar{C}_{11} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} C_{21} \right\} \varrho^{-1} + \\ & + \frac{3}{4(1-\nu)} C_{11}\varrho - 2C_{41}\varrho^{-3} \Big\} \cos \vartheta + \sum_{\alpha=2,3,\dots}^{\infty} \alpha \left[\frac{\alpha+2}{4(1-\nu)} C_{1\alpha}\varrho^\alpha - \right. \\ & \left. - \frac{2-\alpha}{4(1-\nu)} C_{2\alpha}\varrho^{-\alpha} - (\alpha-1) C_{3\alpha}\varrho^{\alpha-2} - (\alpha+1) C_{4\alpha}\varrho^{-\alpha-2} \right] \cos \alpha \vartheta, \end{aligned}$$

$$\frac{1 + \nu}{E} \widehat{zz} = \frac{\nu}{1-\nu} \left[C_{20} + \sum_{\alpha=1,2,\dots}^{\infty} \alpha (C_{1\alpha}\varrho^\alpha - C_{2\alpha}\varrho^{-\alpha}) \cos \alpha \vartheta \right],$$

$$\begin{aligned} \frac{1+\nu}{E} \widehat{r\vartheta} = & \left\{ \left[-\bar{C}_{11} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} C_{21} \right] \varrho^{-1} + \frac{1}{4(1-\nu)} C_{11}\varrho + 2C_{41}\varrho^{-3} \right\} \sin \vartheta + \\ & + \sum_{\alpha=2,3,\dots}^{\infty} \alpha \left[\frac{\alpha}{4(1-\nu)} C_{1\alpha}\varrho^{\alpha} - \frac{\alpha}{4(1-\nu)} C_{2\alpha}\varrho^{-\alpha} - (\alpha-1) C_{3\alpha}\varrho^{\alpha-2} + \right. \\ & \left. + (\alpha+1) C_{4\alpha}\varrho^{-\alpha-2} \right] \sin \alpha\vartheta. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Mit ähnlichen Ausdrücken kann man auch die Verschiebungen in der Radial- und Umfangsrichtung ausdrücken:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} u_r = & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} C_{20}\varrho + C_{40}\varrho^{-1} + \left[\left(\lg \frac{\varrho}{\varrho_1} + 1 \right) \cos \vartheta - \vartheta \sin \vartheta \right] \bar{C}_{11} + \\ & + \left\{ \left[1 - (3-4\nu) \lg \frac{\varrho}{\varrho_1} \right] \frac{C_{21}}{2(1-\nu)} + \frac{1-\nu}{8(1-\nu)} C_{11}\varrho^2 - C_{41}\varrho^{-2} + C_{31} \right\} \cos \vartheta + \\ & + \sum_{\alpha=2,3,\dots}^{\infty} \left[\frac{\alpha}{\alpha+1} \left(1 - \frac{\alpha+2}{4(1-\nu)} \right) C_{1\alpha}\varrho^{\alpha+1} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(1 - \frac{2-\alpha}{4(1-\nu)} \right) C_{2\alpha}\varrho^{-\alpha+1} + \right. \\ & \left. + \alpha C_{3\alpha}\varrho^{\alpha-1} - \alpha C_{4\alpha}\varrho^{-\alpha-1} \right] \cos \alpha\vartheta, \\ \frac{1}{R} u_{\vartheta} = & - \left[\left(\lg \frac{\varrho}{\varrho_1} + 1 \right) \sin \vartheta + \vartheta \cos \vartheta \right] \bar{C}_{11} + \\ & + \left\{ \frac{3-4\nu}{2(1-\nu)} \lg \frac{\varrho}{\varrho_1} \cdot C_{21} + \frac{5-4\nu}{8(1-\nu)} C_{11}\varrho^2 - C_{41}\varrho^{-2} - C_{31} \right\} \sin \vartheta + \\ & + \sum_{\alpha=2,3,\dots}^{\infty} \alpha \left[\frac{1}{\alpha+1} \left(1 + \frac{\alpha}{4(1-\nu)} \right) C_{1\alpha}\varrho^{\alpha+1} + \frac{1}{1-\alpha} \left(1 - \frac{\alpha}{4(1-\nu)} \right) C_{2\alpha}\varrho^{-\alpha+1} + \right. \\ & \left. - C_{3\alpha}\varrho^{\alpha-1} - C_{4\alpha}\varrho^{-\alpha-1} \right] \sin \alpha\vartheta. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Diese Lösung drückt wesentlich den Spannungszustand und die Verformungen der an krummen Zylinderwänden symmetrisch belasteten Kreiszylinderschale in Bezug auf die Y -Achse (Abb. 1) aus. Von diesen Lösungen kann abermals der Beweis gebracht werden, dass sie in unserem Bereiche beinahe gleichmäßig konvergent verlaufen und dass die Spannungen die Gleichgewichts- und Kompatibilitätsgleichungen erfüllen.

Aus den obenerwähnten Ausdrücken sind die Konstanten C_{10} und C_{30} verschwunden. Aber wir können uns aus den Ausdrücken u_r , u_{ϑ} , $e_{r\vartheta}$ leicht überzeugen, dass die Konstanten C_{10} und C_{30} auch in diesen Ausdrücken nicht vorkommen, so dass wir $C_{10} = C_{30} = 0$ setzen können.

3. Die „homogene“ Lösung

Es ist klar, dass mittels der bisherigen Lösungen, die wir in der Form von trigonometrischen Reihen mit den Argumenten $\alpha\vartheta$ ($\alpha = 0, 1, 2, \dots$) annahmen, allgemeine Bedingungen an den geradlinigen Rändern nicht erfüllt werden können. Dazu muss man zu den bisherigen Partikular Lösungen noch eine „homogene“ Lösung, aus welcher für die Spannungen auf den gekrümmten Wänden sich der Wert Null ergäbe, hinzufügen. Das kann dadurch erzielt werden, dass wir für α einen solchen Wert wählen, für den die Determinante des System (2.3), das ist

$$\begin{vmatrix} f_{1\alpha}a^\alpha, & f_{2\alpha}a^{-\alpha}, & a^{\alpha-2}, & a^{-\alpha-2} \\ f_{1\alpha}b^\alpha, & \dots & & \\ g_{1\alpha}a^\alpha, & g_{2\alpha}a^{-\alpha}, & a^{\alpha-2}, & a^{-\alpha-2} \\ g_{2\alpha}b^\alpha, & \dots & & \end{vmatrix} = 0 \quad (3.1)$$

gleich Null ist.

Nach einfacher Umformung bekommen wir für α folgende transzendente Gleichung

$$\frac{\beta^\alpha - \beta^{-\alpha}}{\beta - \beta^{-1}} = \pm \alpha. \quad (3.2)$$

Die Wurzeln der transzendenten Gl. (3.2) sind die einerseits reellen, andererseits komplexen Zahlen. Von den reellen Wurzeln existieren $\alpha = 0$ und $\alpha = \pm 1$. Ausser diesen existiert die reelle Wurzel in der Nähe von Eins. Man kann leicht beweisen, dass der reelle und der imaginäre Teil die Gleichung (1,11) erfüllen wird, falls α in der Gl. (1,12) eine komplexe Zahl ist.

Es gibt unendlich viele komplexe Wurzeln der Gl. (3.2), was deutlich der unendlichen Zahl von Randbedingungen an den Längsrändern des dickwandigen Zylinders entspricht. Die Berechnung dieser Wurzeln wird im Nachtrag angeführt.

Die ersten fünf komplexen Wurzeln sind numerisch bestimmt und die weiteren Wurzeln können wir mit ausreichender Genauigkeit in asymptotischer Form ($m = 2, 3, \dots$) ausdrücken [9]

$$\alpha_{2m} = \frac{1}{\lg \beta} \left[\left(2m + \frac{1}{2} \right) \pi i + \lg \frac{2\pi m}{\lg \beta} (\beta - \beta^{-1}) + \frac{\lg Z_{2m}}{1 + \frac{i}{2\pi m Z_{2m}}} \right], \quad (3.3)$$

wo

$$Z_{2m} = 1 + \frac{1}{4m} \left[1 - \frac{2i}{\pi} \lg \frac{2\pi m}{\lg \beta} (\beta - \beta^{-1}) \right] \text{ ist.}$$

Einen ähnlichen Ausdruck kann man auch für die Wurzeln α_{2m-1}^* ableiten

$$\alpha_{2m-1} = \frac{1}{\lg \beta} \left[\left(2m - \frac{1}{2} \right) \pi i + \lg \frac{2\pi m}{\lg \beta} (\beta - \beta^{-1}) + \frac{\lg Z_{2m-1}^*}{1 + \frac{i}{2\pi m Z_{2m-1}^*}} \right], \quad (3.4)$$

wo

$$Z_{2m-1} = 1 - \frac{1}{4m} \left[1 + \frac{2i}{\pi} \operatorname{lg} \frac{2\pi m}{\operatorname{lg} \beta} (\beta - \beta^{-1}) \right] \text{ ist.}$$

In der folgenden Tafel werden die komplexen Wurzeln des ersten Quadranten der Ebene α angegeben, die numerisch bis auf das Glied ε^2 $\left(\varepsilon = \frac{\beta - \beta^{-1}}{2 \operatorname{lg} \beta} - 1 \right)$ bestimmt und der absoluten Grösse gemäss beziffert wurden. Der negativen rechten Seite der transzendenten Gl. (3.2) entsprechende Wurzeln werden durch α^* gekennzeichnet.

| S | $\alpha_s = \frac{1}{\operatorname{lg} \beta} \xi_s$ |
|---|--|
| 1 | $\xi_1^* = 2,2507 + i 4,2124 + (1,0866 - i 0,2031) \varepsilon - (0,5433 - i 0,1016) \varepsilon^2$ |
| 2 | $\xi_2 = 2,7687 + i 7,4977 + (1,0374 - i 0,1225) \varepsilon - (0,5187 - i 0,0613) \varepsilon^2$ |
| 3 | $\xi_3^* = 3,1031 + i 10,7125 + (1,0216 - i 0,0883) \varepsilon - (0,5108 - i 0,0441) \varepsilon^2$ |
| 4 | $\xi_4 = 3,3522 + i 13,8999 + (1,0142 - i 0,0691) \varepsilon - (0,5071 - i 0,0345) \varepsilon^2$ |
| 5 | $\xi_5^* = 3,5511 + i 17,0734 + (1,0102 - i 0,0568) \varepsilon - (0,5051 - i 0,0285) \varepsilon^2$ |

Mit Hilfe der transzendenten Wurzeln kann man solche Lösungen unserer Gl. (1,11) konstruieren, welche die Bedingungen an den krummen Zylinderwandlungen erfüllen und dabei eine ausreichende Zahl freier Konstanten enthalten. Wie aus der Aufgabe folgt, entspricht den reellen Wurzeln $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ der Spannungszustand eines krummen, dicken, am Rande durch die Biegemoment bzw. durch die Schubkraft belasteten Stabes. Im Falle der komplexen Wurzeln bleibt es noch übrig die einzelnen Konstanten C_{α_s} der homogenen Lösung zu bestimmen. Diese Konstanten werden aus den Randbedingungen (2.3) berechnet, wobei die rechten Seiten dieser Gleichungen gleich Null gesetzt werden, denn die krummlinigen Ränder sind unbelastet. Die Determinante dieses Systems der Lineargleichungen ist gleich Null, so dass eine Konstante unbestimmt bleibt. Diese Konstante sei $C_{1\alpha}$. Nach der Vereinfachung weiterer Berechnungen setzen wir sie in folgender Form voraus:

$$C_{1\alpha} = \frac{4(1 - \nu)(\beta^{\alpha_s - 1} \pm 1)}{\alpha_s^2 R^{\alpha_s}} (C_s - iD_s),$$

wo das positive bzw. negative Vorzeichen den Wurzeln der transzendenten Gleichung mit der positiven bzw. der negativen rechten Seite entspricht.

Die Konstanten C_s und D_s werden aus den Randbedingungen in einer im voraus erwählten Zahl der Punkte des geradlinigen Randes eines geteilten Zylinders bestimmt.

Die resultierenden Beziehungen für die Spannungen und Verformungen der „homogenen“ Lösung kann man also in folgender Form ausdrücken

$$\left(\varrho = \frac{r}{R}, \quad \varrho_1 = \frac{a}{R}, \quad \varrho_2 = \frac{b}{R} \right):$$

$$\begin{aligned} \frac{1+\nu}{E} \widehat{\vartheta} = & \Re_e \left\{ C_{10} \left[1 - \frac{\beta^2 \lg \beta}{\beta^2 - 1} + \lg \frac{\varrho}{\varrho_1} - \frac{\varrho_2^2 \lg \beta}{\beta^2 - 1} \varrho^{-2} \right] + \right. \\ & + C_{11} \left[\frac{3\varrho}{\varrho_1^2 + \varrho_2^2} - \varrho^{-1} - \frac{\varrho_1^2 \varrho_2^2}{\varrho_1^2 + \varrho_2^2} \varrho^{-3} \right] \cos \vartheta + \\ & + \sum_{s=1,2,\dots}^n (C_s - iD_s) \left[\left(1 + \frac{2}{\alpha_s} \right) (\beta^{\alpha_s-1} \pm 1) \varrho^{\alpha_s} + \left(1 - \frac{2}{\alpha_s} \right) (\beta^{-\alpha_s-1} \pm 1) \varrho_2^{2\alpha_s} \varrho^{-\alpha_s} - \right. \\ & \left. - (\beta^{\alpha_s+1} \pm 1) \varrho_1^2 \varrho^{-2+\alpha_s} - (\beta^{-\alpha_s+1} \pm 1) \varrho_2^{2\alpha_s} \varrho_1^2 \varrho^{-\alpha_s-2} \right] \cos \alpha_s \vartheta \Big\}, \quad (3.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1+\nu}{E} \widehat{rr} = & \Re_e \left\{ C_{10} \left[-\frac{\beta^2 \lg \beta}{\beta^2 - 1} + \lg \frac{\varrho}{\varrho_1} + \frac{\varrho_2^2 \lg \beta}{\beta^2 - 1} \varrho^{-2} \right] + \right. \\ & + C_{11} \left[\frac{\varrho}{\varrho_1^2 + \varrho_2^2} - \varrho^{-1} + \frac{\varrho_1^2 \cdot \varrho_2^2}{\varrho_1^2 + \varrho_2^2} \varrho^{-3} \right] \cos \vartheta + \\ & + \sum_{s=1,2,\dots}^n (C_s - iD_s) \left[\left(\frac{2}{\alpha_s} + 1 \right) (\beta^{\alpha_s-1} \pm 1) \varrho^{\alpha_s} - \left(1 + \frac{2}{\alpha_s} \right) (\beta^{-\alpha_s-1} \pm 1) \varrho_2^{2\alpha_s} \varrho^{-\alpha_s} + \right. \\ & \left. + (\beta^{\alpha_s+1} \pm 1) \varrho_1^2 \varrho^{-2+\alpha_s} + (\beta^{-\alpha_s} \pm 1) \varrho_2^{2\alpha_s} \varrho_1^2 \varrho^{-\alpha_s-2} \right] \cos \alpha \vartheta \Big\}, \quad (3.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1+\nu}{E} \widehat{r\vartheta} = & \Re_e \left\{ C_{11} \left[\frac{\varrho}{\varrho_1^2 + \varrho_2^2} - \varrho^{-1} + \frac{\varrho_1^2 \varrho_2^2}{\varrho_1^2 + \varrho_2^2} \varrho^{-3} \right] \sin \vartheta + \right. \\ & + \sum_{s=1,2,\dots}^n (C_s - iD_s) \left[(\beta^{\alpha_s-1} \pm 1) \varrho^{\alpha_s} - (\beta^{-\alpha_s-1} \pm 1) \varrho_2^{2\alpha_s} \varrho^{-\alpha_s} - \right. \\ & \left. - (\beta^{\alpha_s+1} \pm 1) \varrho_1^2 \varrho^{\alpha_s-2} + (\beta^{-\alpha_s-1} \pm 1) \varrho_2^{2\alpha_s} \varrho_1^2 \varrho^{-\alpha_s-2} \right] \sin \alpha_s \vartheta \Big\}, \quad (3.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1+\nu}{E} \widehat{zz} = & \Re_e \left[\nu \left\{ C_{10} \left[1 - \frac{2\beta^2 \lg \beta}{\beta^2 - 1} + 2 \lg \frac{\varrho}{\varrho_1} \right] + 2C_{11} \left[\frac{2\varrho}{\varrho_1^2 + \varrho_2^2} - \varrho^{-1} \right] \cos \vartheta + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{s=1,2,\dots}^n (C_s - iD_s) \frac{4}{\alpha_s} [(\beta^{\alpha_s-1} \pm 1) \varrho^{\alpha_s} - (\beta^{-\alpha_s-1} \pm 1) \varrho_2^{2\alpha_s} \varrho^{-\alpha_s}] \cos \alpha_s \vartheta \right\} \right], \quad (3.8) \end{aligned}$$

bzw. die Verformungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} u_r = \Re_e \left[C_{10} \left\{ - \left[(1 - 2\nu) \frac{\beta^2 \lg \beta}{\beta^2 - 1} + (1 - \nu) \right] \varrho - \frac{\varrho_2^2 \lg \beta}{\beta^2 - 1} \varrho^{-1} + \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - 2\nu) \varrho \lg \frac{\varrho}{\varrho_1} \right\} + C_{11} \left\{ 1 + \frac{1}{2(\varrho_1^2 + \varrho_2^2)} [(1 - 4\nu) \varrho^2 - \varrho_1^2 \varrho_2^2 \varrho^{-2}] - \right. \right. \\ \left. \left. - (1 - 2\nu) \lg \varrho \right\} \cos \vartheta - C_{11} 2(1 - \nu) \vartheta \sin \vartheta + \sum_{s=1,2,\dots}^n (C_s - iD_s) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left\{ \left[\frac{2(1 - 2\nu)}{\alpha_s} - 1 \right] \frac{\beta^{\alpha_s - 1} \pm 1}{\alpha_s + 1} \varrho^{\alpha_s + 1} + \left[1 + \frac{2(1 - 2\nu)}{\alpha_s} \right] \frac{\beta^{-\alpha_s - 1} \pm 1}{\alpha_s - 1} \varrho_2^{2\alpha_s} \varrho^{-\alpha_s - 1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\beta^{\alpha_s + 1} \pm 1}{\beta^2(\alpha_s - 1)} \varrho_2^2 \varrho^{\alpha_s - 1} - \frac{\beta^{-\alpha_s + 1} \pm 1}{\beta^2(\alpha_s + 1)} \varrho_2^{2\alpha_s + 2} \varrho^{-\alpha_s - 1} \right\} \cos \alpha_s \vartheta + C \cos \vartheta \right], \quad (3.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} u_\vartheta = \Re_e \left[2C_{10}(1 - \nu) \varrho \vartheta + C_{11} \left\{ \frac{1}{2(\varrho_1^2 + \varrho_2^2)} [(5 - 4\nu) \varrho^2 - \varrho_1^2 \varrho_2^2 \varrho^{-2}] + \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - 2\nu) \lg \varrho \right\} \sin \vartheta - 2C_{11}(1 - \nu) \vartheta \cos \vartheta + \sum_{s=1,2,\dots}^n (C_s - iD_s) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left\{ \left[1 + \frac{4(1 - \nu)}{\alpha_s} \right] \frac{\beta^{\alpha_s - 1} \pm 1}{\alpha_s + 1} \varrho^{\alpha_s + 1} + \left[1 - \frac{4(1 - \nu)}{\alpha_s} \right] \frac{\beta^{-\alpha_s - 1} \pm 1}{\alpha_s - 1} \varrho_2^{2\alpha_s} \varrho^{-\alpha_s + 1} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\beta^{\alpha_s + 1} \pm 1}{\beta^2(\alpha_s - 1)} \varrho_2^2 \varrho^{\alpha_s - 1} - \frac{\beta^{-\alpha_s + 1} \pm 1}{\beta^2(\alpha_s + 1)} \varrho_2^{2\alpha_s + 2} \varrho^{-\alpha_s - 1} \right\} \sin \alpha_s \vartheta - C \sin \vartheta \right], \quad (3.10) \end{aligned}$$

wobei das erste vom Winkel ϑ unabhängige Glied in den obenerwähnten Ausdrücken der Wurzel $\alpha = 0$, das zweite mit $\cos \vartheta$ bzw. mit $\sin \vartheta$ der Wurzel $\alpha = 1$ entspricht. Die Konstante C bedeutet die Verschiebung des Behälters als Ganzen.

Es stellt sich heraus, dass man bei der Anwendung einer kleinen Anzahl von Summanden in der Klammer (3,5)—(3,10) die Randbedingungen in den gewöhnlichen Fällen mit ausreichender Genauigkeit erfüllen kann. Für die Lösung wird nur der reelle Teil der obenerwähnten Ausdrücke in Betracht genommen.

Wie aus der näheren Untersuchung hervorgeht, nehmen die komplexen Lösungen mit zunehmendem Abstand von dem geradlinigen Rande bedeutend ab. Die Dämpfung kann man mit dem Exponentialausdruck $e^{-\frac{\nu}{\lg \beta}(\vartheta_1 - \vartheta)}$ ausdrücken, in dem $\frac{\nu}{\lg \beta}$ den imaginären Teil der Wurzel α bedeutet. Da das Verhältnis $\frac{\nu}{\lg \beta}$ z. B. bei den laufenden Typen von Dampfturbinengehäusen ≥ 6 ist, kann man diese Lösung bloss als eine lokale Lösung betrachten. Es

folgt daraus gleichzeitig, dass die in komplexer Form (3.9), (3.10) ausgedrückten Verformungen auf die Verformungen des anschliessenden Elements, z. B. des Flansches, empfindlich sind. Mit dem Festigkeitsproblem Flansch-Zylinder wollen wir uns später befassen.

Durch ähnliches Verfahren wird von P. F. PĀPKOVIČ [10] das biharmonische Problem an einem Rechteck oder Kreissektor gelöst. G. A. GRINBERG [10] hat diese Probleme theoretisch weitergeleitet. In diesen Arbeiten löst man aber das homogene Problem des Spannungszustands für den Fall, in dem die Nullspannungen an den geradlinigen Seiten auftreten, indem die angenäherten Spannungen sich an den krummen Sektorswandungen befinden. In vorliegender Arbeit wird ein entgegengesetztes Verfahren gewählt und zwar so, dass man das Problem mit den Nullspannungen an den krummen Sektorwandungen löst. Diese Methode ist bei der praktischen Anwendung von Besonderen Vorteil, da darin grösstenteils die geteilten Zylinder, deren Länge die dicke überschreitet, in Betracht kommen. In diesem Falle ist das in dieser Arbeit angedeutete Verfahren auch mit Rücksicht darauf geeigneter, da die Partikularlösung, welche die Spannungen an den krummen Sektorswandungen annulliert, sehr einfach ist. Wir haben den praktischen Vorgang dieser Lösung in unserer Arbeit angedeutet. Es erscheint als wahrscheinlich, dass man mit ähnlichen Methoden, die Grinberg angewandt hat, auch in unserem Falle vorgehen könnte. Diese Frage wurde von uns nicht gelöst, da die Konvergenz in dem von Grinberg vorgeschlagenen Verfahren zu langwierig ist und es praktisch geeigneter erscheint die lineare Kombination so zu wählen, dass die Randbedingungen in einigen Punkten an den erwogenen Seiten erfüllt seien.

4. Bestimmung der komplexen Wurzeln der transzendenten Gl. (3.2)

Führen wir die Gleichung (3.2) auf folgende Form über:

$$\sinh \xi = \pm \frac{\beta - \beta^{-1}}{2 \lg \beta} \xi, \quad (4.1)$$

wo

$$\xi = \alpha \lg \beta \text{ ist.}$$

In der Praxis treffen wir oft die Behälter, deren $\beta = \frac{b}{a}$ sich im Intervalle $1,1 \div 2$ bewegt. In diesem Falle ist das Verhältnis $\frac{\beta - \beta^{-1}}{2 \lg \beta}$ im Intervalle $(1,0016 \div 1,082)$, also unterscheidet sich wenig von der Eins. Zwecks der Vereinfachung werden wir im weiteren voraussetzen, dass die Bruchzahl $\frac{\beta - \beta^{-1}}{2 \lg \beta} \doteq 1$ ist. Dann gilt, dass

$$\sinh \xi = \pm \xi \text{ ist,} \quad (4.2)$$

$\xi_s = x + iy$ sei eine bestimmte komplexe Wurzel (der Index „s“ bedeutet die laufenden Nummern der einzelnen Wurzeln). Dann bilden die Lösung auch die Wurzeln

$$\xi'_s = -x + iy$$

und mit ihnen die komplex verbundene

$$\bar{\xi}_s = x - iy \quad \text{bzw.} \quad \bar{\xi}'_s = -(x + iy).$$

Eine von diesen vier komplexen Wurzeln liegt immer im ersten Quadranten der Ebene α . Es wird bewiesen, dass in jedem Gebiet ($k = 1, 2, \dots$) $2(k-1)\pi < y < \frac{\pi}{2} + 2(k-1)\pi$ bzw. $\pi + 2(k-1)\pi < y < \frac{3}{2}\pi + 2(k-1)\pi$ eine komplexe Wurzel existiert.

Zerlegen wir die Gl. (4.1) auf ihren reellen und imaginären Teil und bilden das Verhältnis linker und rechter Seiten von den auf diese Weise gebildeten Gleichungen; dann ergibt sich

$$\frac{\operatorname{tgh} x}{x} = \frac{\operatorname{tg} y}{y}.$$

Bezeichnen wir weiter

$$f(x) = \frac{\operatorname{tgh} x}{x}, \quad g(y) = \frac{\operatorname{tg} y}{y}.$$

Die Funktion $f(x)$ hat für $x > 0$ einen monotonfallenden Verlauf. Ähnlich ist auch die Funktion $g(y)$ im Intervalle $\left[\frac{\pi}{2} + 2(k-1)\pi; \frac{3}{2}\pi + 2(k-1)\pi\right]$ bzw. $\left[\frac{3}{2}\pi + 2(k-1)\pi; \frac{5}{2}\pi + 2(k-1)\pi\right]$ eine monotonwachsende Funktion (Abb. 3).

Für $x > 0$ ist $f(x) > 0$; daraus folgt, damit auch $g(y) > 0$ ist, d. h. der imaginäre Teil der Wurzel y muss im Intervalle $\left[2(k-1)\pi; \frac{\pi}{2} + 2(k-1)\pi\right]$ bzw. $\left[\pi + 2(k-1)\pi; \frac{3}{2}\pi + 2(k-1)\pi\right]$ liegen. Da $f(x)$ eine fallende und $g(y)$ eine wachsende Funktion ist, ergibt sich, dass in jedem der Intervalle $\left[2(k-1)\pi; \frac{\pi}{2} + 2(k-1)\pi\right]$ bzw. $\left[\pi + 2(k-1)\pi; \frac{3}{2}\pi + 2(k-1)\pi\right]$ eben nur eine einzige Wurzel existiert.

Wie bereits gesagt, ist das Verhältnis $\frac{\beta - \beta^{-1}}{2 \operatorname{lg} \beta}$ sehr nahe der Eins. Bezeichnen wir den Unterschied

$$\frac{\beta - \beta^{-1}}{2 \operatorname{lg} \beta} - 1 = \varepsilon;$$

für $\beta \leq 2$ ist $\varepsilon \leq 0,082$. Schreiben wir die Gleichung (4.1) in der Form

$$\sinh \xi_s = \pm (1 + \varepsilon) \xi_s. \quad (4.3)$$

Setzen wir die Wurzel ξ_s in der Form einer Potenzreihe

$$\xi_s = \xi_{s_0} + \xi_{s_1} \varepsilon + \xi_{s_2} \varepsilon^2 + \dots \quad (4.4)$$

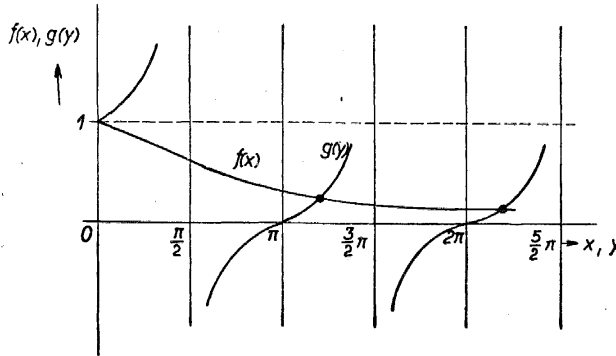


Abb. 3.

voraus. Durch Rückeinsetzung in die Gl. (4.1) und Entwicklung in eine Potenzreihe sowie durch den Vergleich der Glieder mit den gleichen Potenzen ε bekommen wir

$$\xi_{s_1} = \pm \frac{\xi_{s_0}}{\cosh \xi_0 \mp 1},$$

$$\xi_{s_2} = \frac{\xi_{s_1}^2}{\xi_{s_0}} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\xi_{s_0}}{\xi_{s_1}} \right] \text{ usw.},$$

wobei das positive bzw. das negative Vorzeichen der positiven bzw. der negativen rechten Seite der Gl. (4.1) entspricht.

Es ist möglich die Wurzeln ξ_4 , ξ_5 usw. in einer asymptotischen Form auszudrücken. Es ist klar, dass die linke Seite von der gegebenen transzendenten Gleichung eine periodische Funktion mit der Periode $2\pi i$ ist; man kann also die erste Annäherung der gesuchten Wurzel z. B. in folgender Form ($m = 2, 3, \dots$) schreiben ($2m = s$):

$$\xi_{2m} = 2\pi m i + \lg \left[\frac{2\pi i m}{\lg \beta} (\beta - \beta^{-1}) \right] + \gamma_{2m} \lg \beta, \quad (4.5)$$

wo γ_{2m} eine bisher unbekannte Funktion des Verhältnisses $\beta = \frac{b}{a}$ und der Reihenfolge s bildet. Setzen wir in die Gl. (4.1) für ξ_{2m} den Ausdruck (4.5)

ein und vernachlässigen wir das Glied $e^{-f_{2m}}$ der Eins gegenüber, bekommen wir

$$e^{\gamma_{2m} \lg \beta} \doteq 1 - \frac{i}{4\pi m} \lg \frac{2\pi i m}{\lg \beta} (\beta^i - \beta^{-1}) - \frac{i\gamma_{2m} \lg \beta}{2\pi m}.$$

Logarithmieren wir diese Gleichung und entwickeln wir den Logarithmus der rechten Seite in eine Potenzreihe nach γ , wobei in der Entwicklung nur das erste Glied belassen wird; auf diese Weise ergibt sich, das

$$\gamma_{2m} = \frac{1}{\lg \beta} \frac{\lg Z_{2m}}{1 + \frac{i}{2\pi m Z_{2m}}}, \quad (4.6)$$

wo

$$Z_{2m} = 1 + \frac{1}{4m} \left[1 - \frac{2i}{\pi} \lg \frac{2\pi m}{\lg \beta} (\beta - \beta^{-1}) \right] \text{ ist.}$$

Derselbe Vorgang gilt auch für die negative Seite der Gl. (4.1).

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] *Галеркин Б. Г.*: Упругое равновесие полого кругового цилиндра и части цилиндра. Собрание сочинений, Том I, 1952.
- [2] *Hámpel M.*: Namáhání silnostěnné, polokulové nádoby hydrostatickým tlakem. Masarykova akademie práce, 1929.
- [3] *Hámpel M.*: Über die hemisphärische Funktion. Monatshefte für Mathematik und Physik, Nr. 2, 1930.
- [4] *Hámpel M.*: Das Spannungsproblem der achsensymmetrisch belasteten dicken Kugelschale. Der Stahlbau, 1943.
- [5] *Kennelly A. E.*: Tables of complex hyperbolic and circular functions. Cambridge Harvard University Press, 1921.
- [6] *Love E. H.*: A treatise on the mathematical theory of elasticity. Oxford, 1927.
- [7] *Pöschel T.*: Zur Theorie der zylindrischen Schalen und Bogenträger. ZAMM, Nr. 3, 1927.
- [8] *Valenta J.*: Teoretické řešení tlustostěnné dělené válcové skořepiny. VÚTT-57-01015
- [9] *Hámpel M., Valenta J.*: Das Spannungsproblem für dicke offene Schalen. ZAMM, H. 7/8, 1957.
- [10] *Гришберг Г. А.*: О методе, предложенном П. Ф. Напковичем для решения плоской задачи упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками, и о некоторых его обобщениях. Прикладная математика и механика, Том XVII, В. 2, 1953.

Souhrn

TEORETICKÉ ŘEŠENÍ TLUSTOSTĚNNÉ DĚLENÉ VÁLCOVÉ SKOŘEPINY

JAROSLAV VALENTA

(Došlo dne 27. března 1958.)

V práci je řešena napjatost válcové výseče, symetricky zatížené vzhledem ke své rovině symetrie. Řešení problému spočívá v nalezení harmonické funkce Φ a biharmonické funkce χ , které hoví statickým rovnicím rovnováhy a rovnicím kompatibility. Funkce Φ a χ jsou obecně dány Fourierovou řadou s argumenty ve tvaru $\alpha\theta$. Předpokládáme-li, že normální napětí na vnitřním resp. vnějším povrchu válce lze rozvinout ve Fourierovu řadu, pak ke splnění těchto okrajových podmínek dostaneme pro každé celé α systém čtyř lineárních rovnic.

Na podélných krajích mohou být předepsána buď napětí nebo radiální a obvodová deformace. K splnění těchto podmínek použijeme tzv. „homogenního“ řešení, které je nezávislé na zatížení křivých stěn nádoby. Jinými slovy to znamená, že index α musí být takový, aby napětí na vnitřním resp. vnějším poloměru vymizelo. Z této podmínky dostaneme pro index α transcendentní rovnici, jejíž kořeny jsou reálné a komplexní. Komplexních kořenů je nekonečně mnoho, což zřejmě odpovídá i nekonečnému počtu okrajových podmínek na podélných krajích válce, na rozdíl od tenkostěnné skořepiny.

Резюме

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЧАСТИ ТОЛСТОСТЕННОГО ЦИЛИНДРА

ЯРОСЛАВ ВАЛЕНТА (Jaroslav Valenta)

(Поступило в редакцию 27/III 1958 г.)

В работе дается расчет части цилиндрической оболочки, ограниченной двумя концентрическими круговыми цилиндрами и двумя плоскостями, проходящими через ось цилиндра, с нагрузкой симметрически распределенной по отношению к плоскости симметрии оболочки. Решение проблемы сводится к нахождению гармонической функции Φ и бигармонической функции χ , которые удовлетворяют статическим уравнениям равновесия

и уравнениям совместности. Функции Φ и χ в общем всегда даются рядами Фурье с аргументами вида $\alpha\vartheta$. В предположении, что нормальные напряжения на внутренней и наружной поверхности цилиндра можно представить рядом Фурье, можно удовлетворить заданным краевым условиям решением системы четырех линейных уравнений для каждого целого α .

На продольных краях цилиндра условия могут быть заданы либо в напряжениях, либо в радиальных и окружных перемещениях. Для удовлетворения этим условиям можно применить так наз. однородное решение, которое не зависит от условий на цилиндрических поверхностях оболочки. Это означает, что индекс α должен быть таким, чтобы напряжения на внутреннем и наружном радиусе равнялись нулю. Из этого условия получается трансцендентное уравнение для индекса α , имеющее вещественные и комплексные корни. Комплексных корней содержится бесконечное количество, что, очевидно, соответствует — в отличие от тонкостенной оболочки — бесконечному числу краевых условий на продольных краях цилиндра.