

Aplikace matematiky

Mirko Novák

Některé metody pro určení numerické hodnoty funkce $sn(u, k)$

Aplikace matematiky, Vol. 3 (1958), No. 6, 401–427

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102635>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1958

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ČLÁNKY

NĚKTERÉ METODY PRO URČENÍ NUMERICKÉ HODNOTY
FUNKCE $\operatorname{sn}(u, k)$

MIRKO NOVÁK

(Došlo dne 28. srpna 1957.)

DT: 517.727 : 518.12

Článek obsahuje přehled některých metod určení numerické hodnoty eliptických funkcí Jacobiho, speciálně funkce $\operatorname{sn}(u, k)$. Tato funkce má značnou důležitost v řadě oborů sdělovací elektrotechniky, zvláště pak v teorii elektrických frekvenčních filtrů. Diskutována je otázka přesnosti. Výsledky jsou shrnuty do řady diagramů.

Úvod

Při mnohých úlohách z teorie elektrických lineárních obvodů (speciálně při řešení otázek synthesy elektrických frekvenčních filtrů a korektorů aproximací ve smyslu Čebyševově) vyskytují se v celé řadě výrazů, důležitých pro výsledek, eliptické funkce Jacobiho. Z nich nejčastější je eliptický sinus, označovaný obvykle jako $\operatorname{sn}(u, k)$. Ostatní eliptické funkce Jacobiho, které též ve zmíněných aplikacích přicházejí v úvahu, jmenovitě eliptický cosinus (obvykle označovaný jako $\operatorname{cn}(u, k)$) a tzv. delta amplitudinis (obvykle označovaná jako $\operatorname{dn}(u, k)$) je možno na funkci $\operatorname{sn}(u, k)$ snadno převést pomocí dobře známých jednoduchých vztahů

$$\operatorname{sn}^2(u, k) + \operatorname{cn}^2(u, k) = 1$$

a

$$\operatorname{dn}^2(u, k) + k^2 \operatorname{sn}^2(u, k) = 1.$$

Při konkrétním technickém řešení výše zmíněných úloh je pochopitelně nutno vyrovnati se s otázkou, jakým způsobem lze pro dané hodnoty argumentu u a modulu k stanovit numerickou hodnotu příslušné funkce (respektive funkce $\operatorname{sn}(u, k)$). Jak je známo, je eliptický sinus $\operatorname{sn}(u, k)$ inverzní funkcí k eliptickému integrálu prvního druhu (Legendrova). Tento integrál nelze integrovati elementárně a nelze tudíž také elementárně určit hodnotu funkce $\operatorname{sn}(u, k)$.

V dalším budou proto rozvedeny detaily problému určení numerické hodnoty funkce $\operatorname{sn}(u, k)$. To je v zásadě možno provést těmito způsoby:

- a) odečtením hodnoty funkce $\operatorname{sn}(u, k)$ z diagramů,
- b) odečtením hodnoty funkce $\operatorname{sn}(u, k)$ z tabulek,
- c) výpočtem z hodnot jiných, lépe tabelovaných funkcí,
- d) výpočtem na základě rozvoje v některou nekonečnou řadu.

Pro technickou aplikaci má hlavní význam funkce $\operatorname{sn}(u, k)$ pro reálné hodnoty argumentu u a reálné hodnoty modulu k . Budeme se proto také v dalším zabývatí výhradně těmito případy. Pro reálné hodnoty u a reálné hodnoty k je funkce $\operatorname{sn}(u, k)$ všude spojitá — neobsahuje žádných singulárních bodů a pro $0 \leq u \leq \infty$ a $0 \leq k \leq 1$ je také $0 \leq \operatorname{sn}(u, k) \leq 1$. Pro praxi bude tudíž závažnou otázkou, s jakou přesností dokážeme hodnotu funkce tím kterým způsobem stanovit, respektive jaké se asi při tom dopustíme relativní chyby¹⁾.

V literatuře není však obvykle tato otázka zevrubněji sledována. To může vésti v určitých případech k nesprávnému názoru na užitečnou dotyčného způsobu výpočtu. Budou proto v dalším jednotlivé možnosti určení numerické hodnoty funkce $\operatorname{sn}(u, k)$ posuzovány především z tohoto hlediska.

Nejprve bude uveden přehled použitých symbolů, pak bude následovat shrnutí základních známých vlastností funkce $\operatorname{sn}(u, k)$ a posléze budou zevrubněji rozvedeny některé metody určení hodnoty této funkce způsoby a) až d). Na závěr je pak uveden obsažnější seznam literatury.

Přehled použitých symbolů

K	úplný eliptický integrál prvního druhu (Legendrova),
K'	doplňk tohoto integrálu,
$F(k, \varphi)$	} eliptický integrál prvního druhu (Legendrova),
u	
$\operatorname{sn}(u, k)$	} Jacobiho eliptické funkce
$\operatorname{cn}(u, k)$	
$\operatorname{dn}(u, k)$	
u	argument Jacobiho eliptických funkcí,
k	modul Jacobiho eliptických funkcí,
k'	doplňk modulu Jacobiho eliptických funkcí,

¹⁾ Tato otázka se jeví zvláště důležitou pro syntesu filtrů podle Čebyševovy aproximace, kde např. pro filtry navrhované podle provozních parametrů o užitkovatelné šířce propustného pásma $\kappa = 0,9801$ a stupni složitosti $\varrho = 4$ nám chyba +1% v určení hodnot funkce $\operatorname{sn}(u, k)$ v jednom z obou bodů, nutných pro návrh filtru, způsobí chybu funkce filtrace až o 30%.

$q = e^{-\pi \frac{\kappa'}{\kappa}}$ eliptická modulární funkce,
 $\left. \begin{array}{l} \vartheta_0 \\ \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{array} \right\}$ Jacobiho eliptické funkce theta (ϑ),
 $\lg a$ přirozený logaritmus čísla a ,
 $\log a$ dekadický logaritmus čísla a .

I. Základní vlastnosti funkce $\operatorname{sn}(u, k)$

Obečně lze eliptickou funkci definovat jako takovou analytickou²⁾ funkci $g(u, k)$, která je:

- 1) meromorfní³⁾;
- 2) dvojperiodická s periodami ω_1 a ω_2 , jejichž poměr $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ není reálný (viz na př. [9], [12], [23] atd.).

Pro mnohá použití jest účelné zavésti tzv. Jacobiho funkce, označené jako

$$\sin \operatorname{am}(u, k),$$

$$\cos \operatorname{am}(u, k),$$

$$\Delta \operatorname{am}(u, k)$$

(sinus amplitudinis, cosinus amplitudinis a delta amplitudinis), nebo, jak zavedl GUDERMAN, kratčeji $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$, $\operatorname{dn}(u, k)$, respektive pouze $\operatorname{sn}(u)$, $\operatorname{cn}(u)$, $\operatorname{dn}(u)$, či, jak se též často v literatuře píše $s(u)$, $c(u)$ a $d(u)$. V následujícím se podržíme nejobvyklejšího označování, tj. $\operatorname{sn}(u, k)$ atd.

Je-li

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (2)$$

eliptickým integrálem prvního druhu, ke φ je zváno *amplitudou* a k *modulem argumentu* u , píšeme, že

$$\varphi = \operatorname{am}(u, k) = \operatorname{am} u$$

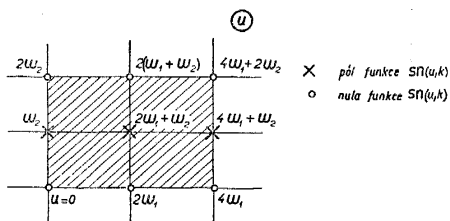
a

$$\Delta \operatorname{am} u = \Delta \varphi = (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}$$

²⁾ Podle [3] a [11] jest funkce analytickou v určité oblasti tehdy, je-li v této oblasti jednoznačná a diferencovatelná.

³⁾ Meromorfní funkci rozumíme takovou analytickou funkci, jejíž všechny v konečnu ležící singularity jsou póly. V omezené části roviny má meromorfní funkce pouze konečný počet pólů.

a tedy $\sin \varphi = \sin am u = \operatorname{sn}(u, k)$ je pak definován jako inverzní funkce k eliptickému integrálu (2). Lze dokázat (viz [11], [12] atd.), že tato funkce je inverzní funkcí k funkci $F(u, k)$, kterou obdržíme při hledání konformního zobrazení horní poloroviny (z) na rovnoběžník v rovině (u) (zobrazení je dáno integrálem Christoffela — Schwarzze). Funkce $\operatorname{sn}(u, k)$ tudíž zprostředkuje zobrazení opačné.



Obr. 1. Periodový rovnoběžník funkce $\operatorname{sn}(u, k)$.

Periodicita funkce $\operatorname{sn}(u, k)$: Lze dokázat, že funkce $\operatorname{sn}(u, k)$ je dvojperiodickou funkcí o periodách $4\omega_1 = 4\mathbf{K}$ a $2\omega_2 = j2\mathbf{K}'$. V periodovém rovnoběžníku $4\omega_1, 2\omega_2$ má nuly a póly rozloženy podle obr. 1. Bude tedy funkce $\operatorname{sn}(u, k)$ mít hodnotu $\operatorname{sn}(u, k) = 0$ pro $u = 2m\omega_1 + 2n\omega_2$, hodnotu $\operatorname{sn}(u, k) = \infty$ pak pro $u = 2m\omega_1 + (2n + 1)\omega_2$.

Dále lze dokázat, že platí

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(u + 2\omega_1, k) &= -\operatorname{sn}(u, k), \\ \operatorname{sn}(u + 2\omega_2, k) &= \operatorname{sn}(u, k), \\ \operatorname{sn}(u + 2\omega_1 + 2\omega_2, k) &= -\operatorname{sn}(u, k). \end{aligned} \quad (3)$$

Vztahy mezi funkcemi $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$ a $\operatorname{dn}(u, k)$ byly již uvedeny v úvodu. Pro aplikace mají však význam ještě vztahy:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(u + \omega_2, k) &= k^{-1} \operatorname{sn}^{-1}(u, k), \text{ } ^4) \\ \operatorname{sn}(u + \omega_1, k) &= \frac{\operatorname{cn}(u, k)}{\operatorname{dn}(u, k)}, \\ \operatorname{sn}(u + \omega_1 + \omega_2, k) &= k^{-1} \frac{\operatorname{dn}(u, k)}{\operatorname{cn}(u, k)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Adiční teorém: Jak je dokázáno např. v [12], str. 218, lze psáti

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(u + v, k) &= \frac{\operatorname{sn}(u, k) \cdot \operatorname{cn}(v, k) \cdot \operatorname{dn}(v, k) + \operatorname{sn}(v, k) \cdot \operatorname{cn}(u, k) \cdot \operatorname{dn}(u, k)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u, k) \cdot \operatorname{sn}^2(v, k)}, \\ \operatorname{sn}(u + v, k) \operatorname{sn}(u - v, k) &= \frac{\operatorname{sn}^2(u, k) - \operatorname{sn}^2(v, k)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u, k) \cdot \operatorname{sn}^2(v, k)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Zvláštní případy funkce $\operatorname{sn}(u, k)$: Lze dokázat (viz např. [12], str. 219), že pro modul $k = 1$ přejdou Jacobiho eliptické funkce na funkce hyperbolické a pro modul $k = 0$ na funkce trigonometrické.

Jest pak $\operatorname{sn}(u, 0) = \sin u$,
 $\operatorname{sn}(u, 1) = \operatorname{tgh} u$.

⁴⁾ Symbol $\operatorname{sn}^{-1}(u, k)$ zde znamená $\frac{1}{\operatorname{sn}(u, k)}$.

Souvislost eliptické funkce Jacobiho $\operatorname{sn}(u, k)$ s jinými eliptickými funkcemi:

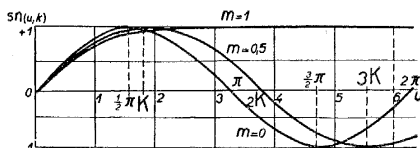
Souvislost s Weierstrassovou funkcí $\wp(u)$ je dána vztahem $\operatorname{sn}(u, k) = (\wp(u) - e_3)^{-\frac{1}{2}}$, kde e_3 je hodnota funkce $\wp(u)$ v bodě $u = 0,5\omega_2$, při čemž ω_1 a ω_2 jsou periodami funkce $\wp(u)$. (Viz též např. [12], str. 215, [1], str. 81.)

Souvislost s funkcí ϑ se uvádí ve tvaru

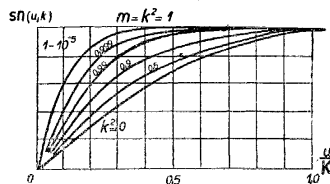
$$\operatorname{sn}(u, k) = k^{-\frac{1}{2}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}, \quad \text{kde } v = \frac{u}{2\mathbf{K}}. \quad (6)$$

II. Průběh funkce $\operatorname{sn}(u, k)$ pro reálné u a k a možnosti určení její numerické hodnoty přímým odečtením z diagramů

V předchozí stati byly uvedeny základní poznatky o periodicitě a rozložení nul a pólů funkce $\operatorname{sn}(u, k)$. Zde bude pro názornost naznačen celý její průběh pro reálné hodnoty argumentu u a různé hodnoty (reálné) modulu k . Napřed



Obr. 2. Průběh funkce $\operatorname{sn}(u, k)$ pro reálná u .



Obr. 3. Průběh funkce $\operatorname{sn}(u, k)$ pro reálná u v redukovaném měřítku.

však je ještě dlužno se zmínit o rozložení hodnot u , při nichž jest absolutní hodnota funkce $\operatorname{sn}(u, k)$ rovna jedné.⁵⁾ Tyto jsou při $u = (2n_1 - 1)\mathbf{K} + jn_2\mathbf{K}'$, kde $\pm n_1 = 1, 2, 3, \dots$ a $\pm n_2 = 0, 2, 4, 6, \dots$. Uvažujeme-li pouze reálné hodnoty argumentu u , přechází funkce $\operatorname{sn}(u, k)$, jak již bylo též uvedeno, pro modul k měnící se v mezích $0 < k < 1$ z trigonometrického sinu na hyperbolickou tangentu argumentu u . Dostaneme tak diagram, naznačený na obr. 2. (uvedený též v [11], str. 336 a v [18], str. 1), či, jak se též často uvádí v redukovaném měřítku pro argument u diagram obr. 3 (viz též [14], [3], [10]).

Je zřejmé, že přesnost odečtení numerické hodnoty $\operatorname{sn}(u, k)$ pro dané u a k z takového diagramu nebude příliš veliká a že bude vždy záviset na volbě měřítka diagramu a pečlivosti jeho narýsování. Jsme zde rovněž odkázáni pouze na zakreslené průběhy pro jednotlivé hodnoty modulu k , neboť interpolace hodnot $\operatorname{sn}(u, k)$ pro některé jiné k mezi zakreslenými křivkami je velmi problematická.

⁵⁾ Zde jsou uvažovány kromě obou os komplexní roviny u ještě body, kde u je celočíselným násobkem \mathbf{K} respektive $j2\mathbf{K}'$. Ve skutečnosti tvoří však spojnice jednotkových míst funkce $\operatorname{sn}(u, k)$ v komplexní rovině uzavřené křivky.

III. Tabulky Jacobiho eliptické funkce $\operatorname{sn}(u, k)$

Nejrychlejším a přitom ještě obvykle dostatečně přesným způsobem stanovení hodnoty určité funkce je pochopitelně její přímé odečtení z tabulek. V této stati jsou proto uvedeny některé snáze dostupné tabulky funkce $\operatorname{sn}(u, k)$ a je posouzen jejich význam pro dříve již uvedené aplikace.

1. Použití tabulek eliptických integrálů

Vzhledem k tomu, že funkce $\operatorname{sn}(u, k) = z$ je definována jako inverzní funkce k eliptickému integrálu prvního (Legendrova) druhu, je zřejmě možno její hodnoty přímo odečísti z tabulek pro tento integrál (viz např. [7], [14] atd.). Podstatnou nevýhodou je zde ovšem skutečnost, že:

a) takto hledáme hodnotu $u = F(\varphi, k)$ mezi neokrouhlými hodnotami, což ve většině případů vede k interpolaci,

b) většina tabulek funkce $F(\varphi, k)$ je sestavena pro argument $\varphi = \arcsin z$, a je tedy nutno k nalezenému φ určit ještě $z = \sin \varphi$.

Z uvedeného a z rozsahu zmíněných tabulek plyne, že toto rychlé určení numerické hodnoty funkce $\operatorname{sn}(u, k)$ má význam spíše informativní a nehodí se pro přesnější výpočty.

2. Tabulky Jacobiho eliptické funkce $\operatorname{sn}(u, k)$

V dostupné literatuře jsou tabulky pro přímé odečtení hodnot $\operatorname{sn}(u, k)$ zastoupeny poměrně velmi málo. Obvykle bývá citován [18], z novějších pak [20], [21] a [25].

Tabulky [18] obsahují pětimístné hodnoty všech tří zmíněných Jacobiho eliptických funkcí, a to pro modul $k^2 = m$ odstupňovaný po 1/10 v rozsahu 0 až 1,0 a pro reálný argument u , odstupňovaný v rozsahu $u = 0$ až $u = 3,00$ po 1/100 a v rozsahu $u = 3,00$ až $u = 6,5$ po 1/10. Od hodnoty $u = 2,00$ do $u = 2,50$ je pak rozsah modulu $m = k^2$ omezen na $m = 0,6$ až 1,0, od $u = 2,50$ do $u = 3,00$ na $m = 0,9$ a $m = 1,0$ a konečně pro $u = 3,00$ až $u = 6,5$ pouze na $m = 1,0$. Jsou zde uvedeny rovněž příslušné diference mezi sousedními hodnotami $\operatorname{sn}(u, k)$ ve směru argumentu u .

Novější tabulky [20] uvádějí na str. 159 všechny tři zmíněné Jacobiho eliptické funkce a to ve tvaru

$$\lg \frac{\operatorname{sn}(u, k)}{\sin x}, \quad \lg \frac{\operatorname{cn}(u, k)}{\cos x}, \quad \lg \operatorname{dn}(u, k)^{\text{e)},}$$

^{e)} V těchto tabulkách je symbolem $\lg a$ míněn dekadický logaritmus čísla a , na rozdíl od zde jinak užitého označení $\log a$.

jednak v závislosti na argumentu $z = \cos 2x = \cos \frac{\pi u}{\mathbf{K}}$ ⁷⁾ pro různé hodnoty modulu $q = e^{-\frac{\pi \mathbf{K}'}{\mathbf{K}}}$, jednak v závislosti na modulu q pro různé hodnoty argumentu z . Argument z je zde v rozsahu $-1 < z < +1$ měněn po 5/100, modul q v rozsahu $0 < q < 0,55$ po 1/100. Tyto značně rozsáhlé tabulky jsou devítimístné a uvádějí příslušné difference dvou sousedních hodnot funkce. Jejich předností je velká přesnost i značný rozsah, podstatnou nevýhodou je však nutnost převádění získaných hodnot na skutečný $\operatorname{sn}(u, k)$, respektive na ostatní požadované funkce.

Tabulky [25] jsou jedenáctimístné. Hodnoty $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$ a $\operatorname{dn}(u, k)$ je zde nutno určit jako podíl dvou ze čtyř funkcí $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$, $D(r)$ (což jsou Jacobiho funkce ϑ). Potřebné vztahy jsou uvedeny tamtéž na str. 248. Funkce $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$, $D(r)$ jsou zde uvedeny v závislosti na argumentu r , kde platí, že

$$u = e\mathbf{K} = \frac{r^\circ}{90^\circ} \mathbf{K}$$

a na modulu Θ který je dán vztahem $k = \sin \Theta$. Argument r je odstupňován po 1° v rozsahu 0 až 89° , modul Θ po 5° v rozsahu 0 až 80° a po 1° v rozsahu 80° až 89° .

3. Příklady použití uvedených tabulek

Jest naléztí numerickou hodnotu funkce $\operatorname{sn}(u, k)$ pro $u = 2,1$ a $k = 0,9$.

Řešení:

a) Pomocí tabulek $F(\varphi, k)$, např. tabulek [14], str. 62 a další:

$$z_1 = \operatorname{sn}(u, k) = \operatorname{sn}(2,1; 0,9)^8)$$

určíme $\alpha = \arcsin k = \arcsin 0,9 \doteq 1,12 \doteq 64^\circ 10'$. Hledáme tedy v sloupečku $\alpha = 65^\circ$ hodnotu $u = 2,1$ a určíme přibližně $\varphi = 85^\circ$ a tedy $z_1 = \sin \varphi = 0,99619$. Lineární interpolačí pak docílíme určitého zlepšení.

b) Pomocí tabulek [18] určíme $m = k^2 = 0,9^2 = 0,81$. Vezmeme přibližně $m = 0,8$ a pro $u = 2,1$ nalezneme $z_1 = \operatorname{sn}(2,1; \sqrt{0,8}) = 0,9975$. Interpolujeme lineárně mezi $m = 0,8$ a $m = 0,9$ pro $m = 0,81$ a dostaneme $z_1 = 0,99654$.

c) Pomocí tabulek [20] stanovíme \mathbf{K} pro $k = 0,9$ na $\mathbf{K} = 2,2805491$ a k tomu příslušné $q = 0,10235242$. Dále (např. z tabulek [18]) určíme

$$x = \frac{\pi u}{2\mathbf{K}} = \frac{\pi \cdot 2,1}{2 \cdot 2,2805491} = 1,446$$

⁷⁾ V těchto tabulkách má symbol z jiný význam nežli v předchozím textu.

⁸⁾ Zde označíme pro vyloučení záměny symbolem z_1 veličinu z , uvažovanou jako argument funkce $F(z, k)$, tj. eliptického integrálu prvního druhu.

a $z = \cos 2x = \cos 2,892 = \cos 184,110^\circ = -0,997917$. Pro tyto hodnoty nalezneme v [20], str. 171 a 172 pro

$$q = 0,10 \quad a \quad z = -1,00 \quad \lg \frac{\operatorname{sn}(u, k)}{\sin x} = 0,0,$$

$$z = -0,95 \quad \lg \frac{\operatorname{sn}(u, k)}{\sin x} = 0,00321758.$$

Po lineární interpolaci mezi těmito hodnotami dostaneme

$$\text{pro } q = 0,10 \text{ a } z = -0,9979 \quad \lg \frac{\operatorname{sn}(u, k)}{\sin x} = 0,0001351371.$$

$$\text{Pro } q = 0,11 \text{ a } z = -1,00 \text{ je } \lg \frac{\operatorname{sn}(u, k)}{\sin x} = 0,0,$$

$$\text{pro } z = -0,95 \text{ je } \lg \frac{\operatorname{sn}(u, k)}{\sin x} = 0,00343335,$$

což po lineární interpolaci dá pro

$$q = 0,11 \text{ a } z = -0,9979 \quad \lg \frac{\operatorname{sn}(u, k)}{\sin x} = 0,00014126007.$$

Konečně po interpolaci pro $q = 0,10235$ dostaneme

$$\lg \frac{\operatorname{sn}(u, k)}{\sin x} = 0,1365759 \cdot 10^{-3} \text{ a tedy } \frac{\operatorname{sn}(u, k)}{\sin x} = 1,000315.$$

Protože $\sin x = \sin 1,446 = \sin 92,05529 = 0,9822229$, je konečně $\operatorname{sn}(u, k) = 1,000315 \cdot 0,9822229 = 0,9925354$.

d) Pomocí tabulek [25] nalezneme pro $u = 2,1$ a $k = 0,9$ hodnotu $r^\circ = \frac{90^\circ u}{\mathbf{K}} = 90^\circ \frac{2,1}{2,2805491} = 82,8747^\circ = 82^\circ 52' 29''$. Dále je $\Theta = \arcsin k = \arcsin 0,9 = 64^\circ 10'$. Z tabulek [25], str. 285 odečteme pro $\Theta = 65^\circ$ a $r = 83^\circ$

$$\sqrt{k'} \operatorname{sn}(u, k) = \frac{A(r)}{B(r)} = \frac{0,9918900707}{1,5302145843} = 0,64820514.$$

Dále platí výraz $k^2 + k'^2 = 1$ a tedy $k' = \sqrt{1 - k^2} = \sqrt{1 - 0,81} = 0,4356$, $\sqrt{k'} = 0,66$.

$$\text{Je tedy } \operatorname{sn}(2,1; 0,9) = \frac{0,6482}{0,66} = 0,98212.$$

Je zřejmo, že pro zpřesnění výsledku bychom musili celkem $4 \times$ interpolovat (vzhledem k neukrouhlým hodnotám Θ a r).

Z uvedeného příkladu je zřejmo, že:

a) Použitím tabulek $F(\varphi, k)$ podle předchozího lze ve většině případů určití numerickou hodnotu $\operatorname{sn}(u, k)$ pouze informativně.

b) Použití tabulek [18] dává rychle pětímístnou hodnotu $\operatorname{sn}(u, k)$; otevřenou otázkou je zde ovšem, jaká je číselná velikost případné chyby, zaviněné až dvojitou interpolací při takových hodnotách argumentu u a modulu $k^2 = m$, které nejsou přímo uvedeny v těchto tabulkách.

c) Použití tabulek [20] je dosti obtížné a zdlouhavé, zejména, vycházíme-li od obvyklé formy zadání v argumentu u a modulu k . Několikanásobnou interpolací (v uvedeném příkladě bylo interpolováno celkem $6 \times$) nedosáhneme však výsledků, vyvažujících počítařskou námahu. Rychlost a pohotovost k použití je též značně snížena jednak několika (v uvedeném příkladě pěti) početními úkony, nutnými k vyčíslení výsledku (kromě početních úkonů, nutných při interpolacích) a nutností použití kromě uvedených ještě troje jiné tabulky (tj. tabulky \mathbf{K} a q , které bývají obvykle sloučeny, tabulky trigonometrických funkcí a tabulky dekadických logaritmů). Ještě větší obtíže nastanou, není-li daná hodnota modulu k (respektive $k^2 = m$) obsažena v tabulkách \mathbf{K} respektive q a hodnota získaná interpolací nedostačuje. Pak nezbude, než užití pro určení numerické hodnoty \mathbf{K} respektive q některého ze způsobů, uvedených např. v [10] či [33].

d) Konečně při použití jinak velmi přesných tabulek [25] je zřejmo, že kromě případné čtyřnásobné interpolace musíme ještě dvakrát odmocňovat a dvakrát dělit. Situace se poněkud zjednoduší v případech řešení úloh ze synthesy elektrických frekvenčních filtrů, užívajících Čebyševovské aproximace (ve smyslu řešení tzv. III. úlohy Zolotarevovy), kdy, jak je zřejmo např. ze vzorců uváděných v [3], [10], [15], [26], [38] atd., přicházejí v úvahu pouze argumenty u typu

$$u = \frac{m}{n} \mathbf{K},$$

kde m, n jsou kladná a celá čísla. Tím se sice poněkud urychlí postup výpočtu, hlavní těžkosti však zůstanou.

IV. Výpočet numerických hodnot funkce $\operatorname{sn}(u, k)$ na základě jiných, lépe tabelovaných funkcí, respektive rozvojem v nekonečnou řadu

1. Výpočet pomocí funkcí ϑ

Jak bylo již uvedeno dříve (a jak je též odvozeno na př. v [19], str. 17, 18, [1], str. 80, 88, 91 a [12], str. 215), lze Jakobiho funkci $\operatorname{sn}(u, k)$ vyjádřit na podkladě funkcí ϑ následujícím vztahem

$$\operatorname{sn}(u, k) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}, \quad (6)$$

kde ϑ_1 a ϑ_0 jsou eliptické funkce theta (ϑ), a $v = \frac{u}{2\mathbf{K}}$, při čemž \mathbf{K} je úplný

eliptický integrál prvního druhu. Provedeme-li rozvoj funkcí ϑ_0 a ϑ_1 podle vzorců, uvedených např. v [12], dostaneme pro $\operatorname{sn}(u, k)$ vztah

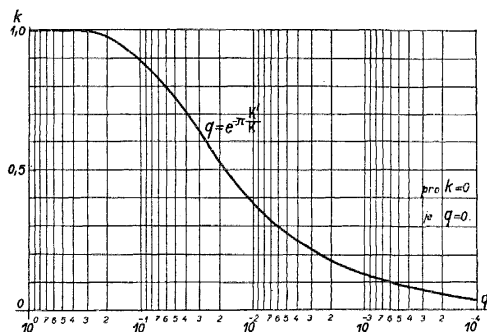
$$\operatorname{sn}(u, k) = \frac{2}{\sqrt{k}} \frac{q^{\frac{1}{4}} \sin \pi v - q^{\frac{3}{4}} \sin 3\pi v + \dots}{1 - 2q \cos 2\pi v + \dots} = \frac{2}{\sqrt{k}} \frac{S_1}{S_2}, \quad (7)$$

který přivádí problém určení hodnoty eliptické funkce $\operatorname{sn}(u, k)$ na otázku určení hodnoty eliptické modulární funkce q a obvyklých trigonometrických funkcí. Protože funkce q má význam též v dalším, všimneme si nyní blíže jednotlivých možností určení její numerické hodnoty.

Metody pro určení numerické hodnoty eliptické modulární funkce $q(k) = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$

Pro informaci o průběhu funkce q pro hodnoty modulu k v rozmezí $0 < k < 1$ byl sestaven diagram obr. 4. Vidíme, že funkce q roste v oblasti $0 < k < 0,8$

poměrně pomalu a ve zbývajících oblasti $0,8 < k < 1$ poměrně velmi prudce.



Obr. 4. Diagram průběhu funkce q pro hodnoty modulu $0 < k < 1$.

Tabulky funkce q , uvedené např. v [19], str. 114–116 a v [18]; str. 66–69, podávají rovněž závislost hodnot funkce q na modulu $m = k^2$ (odstupňovaném po 0,01 v [18] a v [19] pak ještě kromě toho jemněji v rozmezí $0,8 < m < 1,0$ po 0,001). Tabulky [14], str. 50 a 51 jsou sestaveny v hodnotách $\log q$ pro modul $\alpha = \arcsin k$ odstupňovaný v roz-

mezí 0 až $89^\circ 55'$ po $5'$. V tabulkách [20] jsou na str. 282 uvedeny hodnoty $\frac{1}{1-q}$ v závislosti na modulu $-\log k'$, odstupňovaném v rozmezí 0–3,0 po 0,005.

Pokud je třeba určit hodnotu funkce q pro nějakou neokrouhlou hodnotu modulu k , která není obsažena v tabulkách, lze použít rozvoje

$$q = \varepsilon + 2\varepsilon^5 + 15\varepsilon^9 + 150\varepsilon^{13} + 1707\varepsilon^{17} + \dots, \quad (8)$$

kde $\varepsilon = \frac{1 - \sqrt{k}}{2 \cdot (1 + \sqrt{k'})}$ (viz též [10], str. 395, nebo [14], str. 44) a $k'^2 = 1 - k^2$

Je zřejmo, že pro $0 \leq k \leq 1,0$ bude $0 \leq \varepsilon \leq 0,5$. Řada (8) konverguje pro každé $0 \leq k \leq 1,0$ a to poměrně velmi rychle.

Otázky konvergence rozvoje (7) pro funkci $\operatorname{sn}(u, k)$

Nejprve si všimneme otázky konvergence rozvoju pro funkce ϑ_0 a ϑ_1 , obsažených v rov. (7). Postačující podmínkou pro jejich konvergenci je, aby kon-

vergovaly řady sestavené z absolutních hodnot jejich členů. Aby tyto řady, které označíme jako S'_1 a S'_2 konvergovaly, postačí, budou-li konvergovati řady

$$S''_1 = \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}, \quad S''_2 = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2}.$$

Zřejmě platí, že $|S_{1,2}| \leq S'_{1,2} \leq S''_{1,2}$. Použijeme-li pro vyšetření konvergence řad $S''_{1,2}$ d'Alembertova kriteria, dostaneme pro řadu S''_1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^{(n+\frac{3}{2})^2}}{q^{(n+\frac{1}{2})^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} q^{2n+2} = 0 \quad \text{pro } 0 < q < 1$$

a pro řadu S''_2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^{(n+1)^2}}{q^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} q^{2n+1} = 0 \quad \text{pro } 0 < q < 1.$$

Obě limity jsou menší než jedna, řady S''_1 i S''_2 tedy konvergují a tedy konvergují i řady S_1 a S_2 pro funkce ϑ_0 a ϑ_1 . Za předpokladu, že ϑ_0 se neblíží nule, konverguje i výraz (7).

Pro posouzení rychlosti konvergence tohoto rozvoje zjistíme, pro které hodnoty argumentu u a modulu k nepřekročí absolutní hodnota n -tého členu rozvoje (7) zvolenou hodnotu Δ . Celkový tvar rozvoje (7) lze psát takto

$$\operatorname{sn}(u, k) = \frac{2}{\sqrt{k}} \cdot \frac{A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + \dots}{B_0 - B_1 + B_2 - B_3 + \dots} = \frac{2}{\sqrt{k}} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} A_n (-1)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} B_n (-1)^n}. \quad (7a)$$

Pro $n = 0$ je $\operatorname{sn}(u, k) = \frac{2}{\sqrt{k}} \cdot \frac{A_0}{B_0} = a_0$ a dále pro $n = 1, 2, 3, \dots$ je postupně

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}_{n=1}(u, k) &= \frac{2}{\sqrt{k}} \left(\frac{A_0}{B_0 - B_1} - \frac{A_1}{B_0 - B_1} \right) = a'_0 - a_1, \\ \operatorname{sn}_{n=2}(u, k) &= \frac{2}{\sqrt{k}} \left(\frac{A_0}{B_0 - B_1 + B_2} - \frac{A_1}{B_0 - B_1 + B_2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_2}{B_0 - B_1 + B_2} \right) = a''_0 - a'_1 + a_2, \quad \text{atd.}, \end{aligned} \quad (7b)$$

kde $\operatorname{sn}_n(u, k)$ značí přibližnou hodnotu funkce $\operatorname{sn}(u, k)$, vypočtenou z rozvoje (7) při uvažování n jeho členů. Dále je pro $n = l$

$$\operatorname{sn}_l(u, k) = \frac{2}{\sqrt{k}} \frac{A_0 - A_1 + A_2 - \dots + (-1)^{l-1} A_{l-1} + (-1)^l A_l}{B_0 - B_1 + B_2 - \dots + (-1)^{l-1} B_{l-1} + (-1)^l B_l}$$

a tedy

$$\frac{\sqrt{k}}{2} \operatorname{sn}_l(u, k) = \frac{A_0 - A_1 + A_2 - \dots + (-1)^{l-1} A_{l-1}}{B_0 - B_1 + B_2 - \dots + (-1)^l B_l} +$$

$$+ \frac{(-1)^l A_l}{B_0 - B_1 + B_2 - \dots + (-1)^l B_l} = \frac{\sqrt{k}}{2} \frac{\operatorname{sn}_{l-1}(u, k)}{1 + (-1)^l b_l} + (-1)^l a_l, \quad (7c)$$

kde

$$b_l = \frac{B_l}{B_0 - B_1 + B_2 - \dots + (-1)^{l-1} B_{l-1}}. \quad (7d)$$

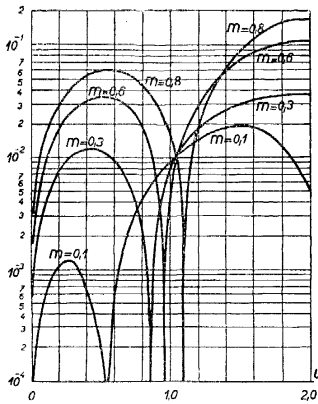
Nyní provedeme rozbor závislosti velikosti n -tých členů rozvoje (7b) na velikosti argumentu u a modulu k .

Pro $n = 0$ je

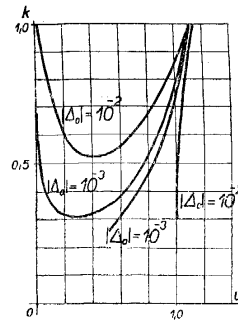
$$\operatorname{sn}_{n=0}(u, k) = k^{-1/2} 2q^{1/4} \sin \pi \frac{u}{2\mathbf{K}} = a_0.$$

Položíme podmínku, aby $|a_0 - \operatorname{sn}_n^*(u, k)| \leq |\Delta_0|$, kde Δ_0 je předem stanovená odchylka skutečné a takto vypočtené hodnoty funkce $\operatorname{sn}(u, k)$. Pak je

$$|\Delta_0| \geq \left| \frac{2}{\sqrt{k}} q^{1/4} \sin \frac{\pi u}{2\mathbf{K}} - \operatorname{sn}(u, k) \right|.$$



Obr. 5. Diagram závislosti $|\Delta_0|$ na argumentu u pro různé hodnoty modulu $m = k^2$ při výpočtu pomocí funkcí ϑ .



Obr. 6. Diagram závislosti argumentu u a modulu k pro různé hodnoty $|\Delta_0|$ při výpočtu pomocí funkcí ϑ .

Po vyčíslení tohoto vztahu pro různé hodnoty argumentu u a modulu k dostaneme diagramy obr. 5 a obr. 6. Prvý z nich podává závislost mezi argumentem u a veličinou $|\Delta_0|$ pro různé hodnoty modulu $k^2 = m$, druhý pak závislost argumentu u a modulu k pro určité, předem zvolené $|\Delta_0|$. Průběh hodnot a_0 je pro různá k v závislosti na u vyneseno informativně v obr. 7. (čárkovaně).

Odtud je zřejmo, že s rostoucím modulem k roste i velikost odchylky $|\Delta_0|$ při všech hodnotách argumentu u . Z diagramu obr. 6. lze pak pro danou hodnotu modulu k přibližně určit, při kterých hodnotách argumentu u nepřestoupí odchylka $|\Delta_0|$ přípustnou velikost.

Pro $n = 1$ vyjádříme na rozdíl od předešlého podmínku, aby $|a_1| \leq |\Delta_1|$, tj. aby absolutní hodnota $n + 1$ -ho členu rozvoje (7) byla menší nebo nanejvýše rovna danému kladnému číslu Δ_n .

Je tedy

$$|a_1| = \left| \frac{2}{\sqrt{k}} \frac{q^{3/4} \sin \frac{3\pi u}{2K}}{1 - 2q \cos \frac{\pi u}{K}} \right| \leq |\Delta_1|.$$

Odtud

$$\frac{2}{\Delta_1 \sqrt{k}} q^{3/4} \sin \frac{3\pi u}{2K} \leq 1 - 2q \cos \frac{\pi u}{K}.$$

Označíme-li

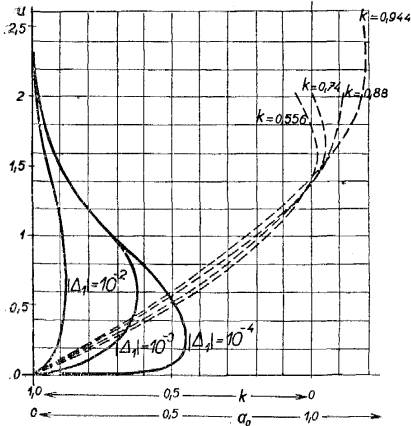
$$\frac{\pi u}{2K} = \pi v \text{ jako } \beta,$$

$$\frac{2}{\Delta_1 \sqrt{k}} q^{3/4} \text{ jako } l_1,$$

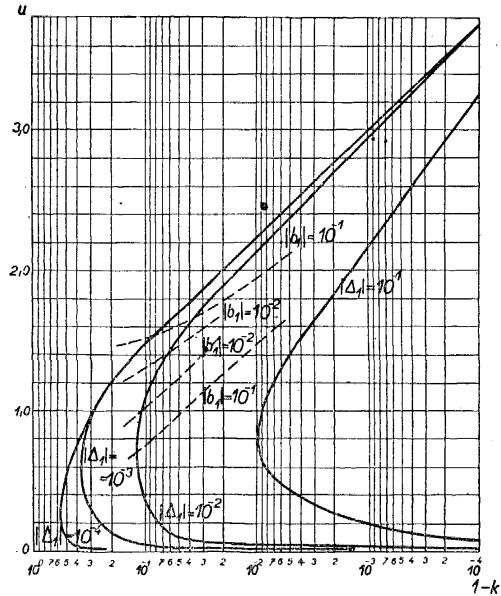
$$\text{a } 2q \text{ jako } l_2,$$

lze předešlý vztah psát jako

$$l_1 \sin 3\beta \leq 1 - l_2 \cos 2\beta. \quad (8)$$



Obr. 7. Diagram závislosti argumentu u a modulu k pro různé hodnoty $|\Delta_1|$ při výpočtu pomocí funkcí ϑ (v lineárním měřítku).



Obr. 8. Diagram závislosti argumentu u a modulu k pro různé hodnoty $|\Delta_1|$ při výpočtu pomocí funkcí ϑ (v logaritmickém měřítku).

Grafické znázornění řešení vztahu (8) nám dá závislost argumentu u a modulu k pro různé hodnoty $|\Delta_1|$. Toto je znázorněno v diagramu obr. 7 v lineárním a v diagramu obr. 8 v logaritmickém měřítku pro modul k (respektive $1 - k$).

Dále je

$$\frac{\sqrt{k}}{2} \operatorname{sn}_1(u, k) = \frac{\sqrt{k}}{2} \operatorname{sn}_0(u, k) - a_1 = \frac{a_0}{1 - b_1} - a_1, \quad (8a)$$

kde

$$b_1 = 2q \cos 2\pi v = 2q \cos \frac{\pi u}{\mathbf{K}}. \quad (8b)$$

Průběh křivek $b_1 = \text{konst}$ v prvním kvadrantu roviny u, k je informativně zakreslen rovněž v obr. 8.

Pro $n = 2$ je opět podmínka $|a_2| \leq |\Delta_2|$ formulována v témže smyslu jako pro $n = 1$.

Pak jest

$$|a_2| = \left| \frac{2}{\sqrt{k}} \frac{q^{25/4} \sin 5\pi u \, 0,5\mathbf{K}^{-1}}{1 - 2q \cos 2\pi u \, 0,5\mathbf{K}^{-1} + 2q^4 \cos 4\pi u \, 0,5\mathbf{K}^{-1}} \right| \leq |\Delta_2|.$$

Položíme-li opět $v = \frac{u}{2\mathbf{K}}$ a $\pi v = \beta$,

$$\frac{2q^{25/4}}{\Delta_2 \sqrt{k}} = l_3, \quad 2q = l_2, \quad \text{a} \quad 2q^4 = l_4,$$

bude podobně jako dříve platit výraz

$$l_3 \sin 5\beta \leq 1 - l_2 \cos 2\beta + l_4 \cos 4\beta. \quad (9)$$

Podobně jako dříve je zde

$$\frac{\sqrt{k}}{2} \operatorname{sn}_2(u, k) = \frac{\sqrt{k}}{2} \operatorname{sn}_1(u, k) + a_2, \quad (9a)$$

kde

$$b_2 = \frac{2q^4 \cos \frac{2\pi u}{\mathbf{K}}}{1 - 2q \cos \frac{\pi u}{\mathbf{K}}} = \frac{2q^4 \cos \frac{2\pi u}{\mathbf{K}}}{1 - b_1}. \quad (9b)$$

Grafické znázornění řešení vztahů (9) a (9b) je uvedeno v diagramu obr. 9, který informativně udává závislost argumentu u a modulu k pro různé hodnoty $|\Delta_2|$ a b_2 (opět v logaritmickém měřítku pro modul k , respektive $1 - k$). Ze srovnání diagramů obr. 8 a obr. 9 je zřejmo, že rozvoj (7) konverguje značně rychle v široké oblasti argumentu u i při velkých hodnotách modulu k ($0 < k < 1$).

Všimneme si ještě blíže vrcholů křivek v diagramech obr. 8 a obr. 9 (tj. těch bodů, v nichž příslušné vztahy přestanou mít řešení a $|\Delta_n|$ je pro všechna u menší nežli zvolená hodnota). Přibližně zjistíme:

pro $n = 1$	$ \Delta_1 = 10^{-1}$	$k = 0,99$
	$ \Delta_1 = 10^{-2}$	$k = 0,88$
	$ \Delta_1 = 10^{-3}$	$k = 0,63$
pro $n = 2$	$ \Delta_2 = 10^{-1}$	$k \rightarrow 1,0$
	$ \Delta_2 = 10^{-2}$	$k = 0,9999$
	$ \Delta_2 = 10^{-3}$	$k = 0,999$
	$ \Delta_2 = 10^{-4}$	$k = 0,99$
	$ \Delta_2 = 10^{-5}$	$k = 0,95$
	$ \Delta_2 = 10^{-6}$	$k = 0,9$
	$ \Delta_2 = 10^{-7}$	$k = 0,85$
	$ \Delta_2 = 10^{-8}$	$k = 0,8$

Tyto dvě tabulky a předchozí diagramy nám vymezují použitelnost rozvoje (7).

Nutno ještě podotknouti, že vzhledem k tomu, že vztahy (8), (8b) a (9), (9b) jsou periodické pro u , vyskytnou se ve skutečnosti při případném rozšíření zobrazeného argumentu u ještě další větve křivek $|\Delta_n|$. Pro jednoduchost nebyly však tyto další větve v obr. 7, 8 a 9 kresleny.

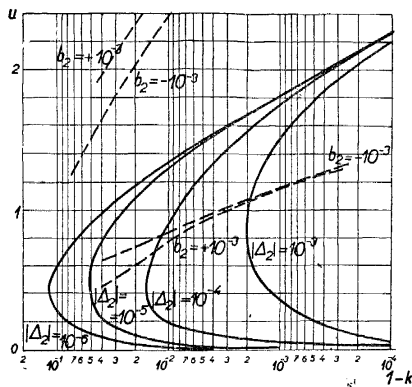
2. Výpočet pomocí potenční řady

Potenční řadu pro funkci $sn(u, k)$ lze odvodit několika způsoby. V [10], str. 395, [6], str. 81, [4], str. 56 atd. jsou uvedeny některé z nich (např. pomocí věty Colin MacLaurinovy nebo pomocí binomické věty).

Tak jako předešle zde bude zkoumána nejprve otázka konvergence, její rychlost a posléze budou uvedeny některé diagramy, usnadňující praktické použití této řady pro výpočet funkce $sn(u, k)$.

Potenční řadu pro funkci $sn(u, k)$ lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned} sn(u, k) &= \zeta_1 u - \zeta_3 \frac{u^3}{3!} + \zeta_5 \frac{u^5}{5!} - \zeta_7 \frac{u^7}{7!} + \dots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \zeta_{2n-1} \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \end{aligned} \quad (10)$$



Obr. 9. Diagram závislosti argumentu u a modulu k pro různé hodnoty $|\Delta_2|$ při výpočtu pomocí funkce ϑ (v logaritmickém měřítku).

kde ζ_{2n-1} jsou následující funkce modulu k :

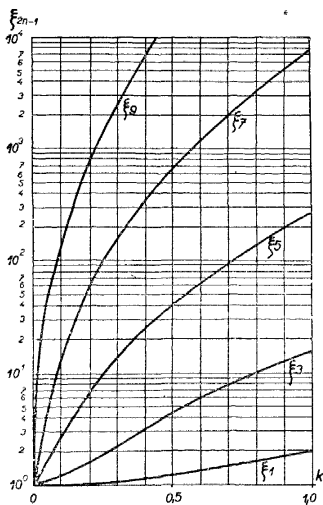
$$\begin{aligned} \zeta_1 &= 1, \\ \zeta_3 &= 1 + k^2, \\ \zeta_5 &= 1 + 14k^2 + k^4, \\ \zeta_7 &= 1 + 135k^2 + 135k^4 + k^6, \\ \zeta_9 &= 1 + 1228k^2 + 5478k^4 + 1228k^6 + k^8, \\ \zeta_{11} &= 1 + 11069k^2 + 165826k^4 + 165826k^6 + 11069k^8 + k^{10} \text{ atd.}, \end{aligned} \quad (11)$$

Pro různé hodnoty modulu k jsou velikosti koeficientů sestaveny v následující tabulce na obr. 10 nebo pro neokrouhlé hodnoty modulu k v diagramu obr. 11.

$k \backslash \zeta_{2n-1}$	ζ_3	ζ_5	ζ_7	ζ_9	ζ_{11}
0,99	1,9801	15,68199601	263,935441	7623,7681109	336478,173513
0,95	1,9025	14,44950625	233,5309356	5474,491499	274298,433253
0,9	1,81	12,9961	199,454941	5197,83581521	198299,6056992
0,8	1,64	10,3696	142,958144	3352,78940416	120343,9569572
0,5	1,25	4,5625	42,203125	669,56640625	15766,6455078
0,2	1,04	1,5616	6,61664	59,67072256	815,23857674

Obr. 10. Tabulka velikosti koeficientů ζ_{2n-1} potenční řady pro $\operatorname{sn}(u, k)$ pro různé hodnoty modulu k a $n = 2, \dots, 6$.

Z rovnic (11) je zřejmo, že v krajním případě pro $k = 0$ přejde řada (10) na obvyklou potenční řadu pro trigonometrický sinus.

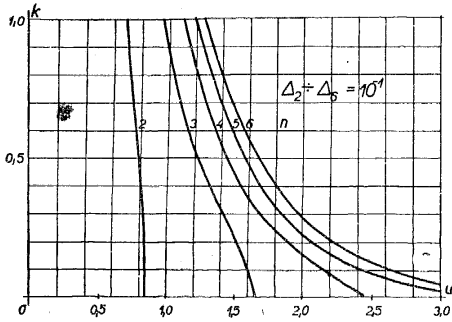


Otázky konvergence rozvoje (10) pro funkci $\operatorname{sn}(u, k)$

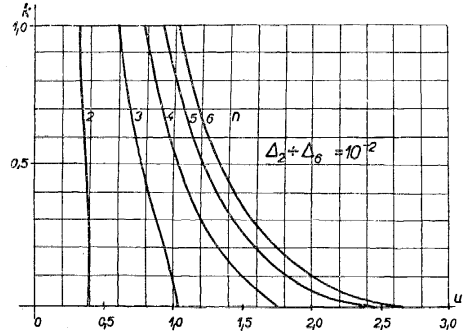
Řadu (10) je možno odvodit z MacLaurinova rozvoje funkce $\operatorname{sn}(u, k)$ (viz např. [33]). Poloměr konvergence této řady je pak $r = (p)$, kde p je pól funkce $\operatorname{sn}(u, k)$ nejbližší k bodu $u = 0$.

Řada (10) konverguje též absolutně. Pro dostatečně malá u bude tato konvergence stejnoměrná (prakticky pro $u = 1,5$). Pak platí, že

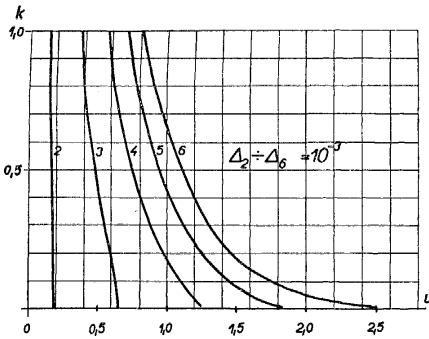
Obr. 11. Diagram závislosti koeficientů ζ_{2n-1} potenční řady pro $\operatorname{sn}(u, k)$ pro různé hodnoty modulu k a $n = 1, \dots, 4$.



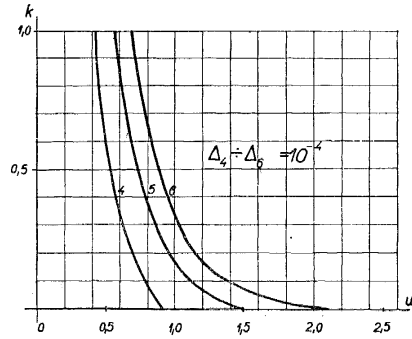
Obr. 12. Diagram závislosti $\Delta_n = 10^{-1}$ na argumentu u a modulu k při výpočtu pomocí potenční řady.



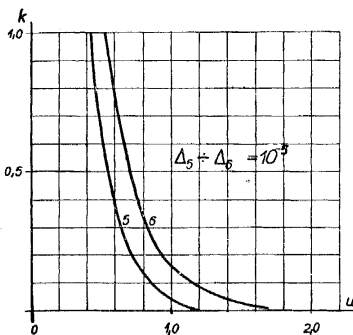
Obr. 13. Diagram závislosti $\Delta_n = 10^{-2}$ na argumentu u a modulu k při výpočtu pomocí potenční řady.



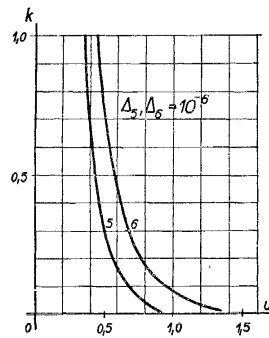
Obr. 14. Diagram závislosti $\Delta_n = 10^{-3}$ na argumentu u a modulu k při výpočtu pomocí potenční řady.



Obr. 15. Diagram závislosti $\Delta_n = 10^{-4}$ na argumentu u a modulu k při výpočtu pomocí potenční řady.



Obr. 16. Diagram závislosti $\Delta_n = 10^{-5}$ na argumentu u a modulu k při výpočtu pomocí potenční řady.



Obr. 17. Diagram závislosti $\Delta_n = 10^{-6}$ na argumentu u a modulu k při výpočtu pomocí potenční řady.

$|R_{n+1}| < |a_n|$, kde R_{n+1} je zbytek řady (10) od $n + 1$ ho členu a a_n je n -tý člen.

Abychom zjistili, jak rychle bude řada (10) konvergovat, položíme podmínku, aby $|a_n| \leq \Delta_n$. Jinými slovy, bude nás zajímat, pro které hodnoty u a k nepřestoupí velikost n -tého členu rozvoje požadovanou velikost Δ_n . Bude tedy pro $n = 2$

$$|a_2| \leq \Delta_2 \quad \text{čili} \quad \zeta_3 \frac{|u|^3}{3!} \leq \Delta_3,$$

pro $n = 3$

$$|a_3| \leq \Delta_3 \quad \text{čili} \quad \zeta_5 \frac{|u|^5}{5!} \leq \Delta_5,$$

atd.

Grafické znázornění těchto vztahů je pro $n = 2 - 6$ při různých hodnotách argumentu u a modulu k provedeno v následujícím diagramech:

- obr. 12 pro $\Delta_n = 10^{-1}$,
- obr. 13 pro $\Delta_n = 10^{-2}$,
- obr. 14 pro $\Delta_n = 10^{-3}$,
- obr. 15 pro $\Delta_n = 10^{-4}$,
- obr. 16 pro $\Delta_n = 10^{-5}$,
- obr. 17 pro $\Delta_n = 10^{-6}$,
- obr. 18 pro $\Delta_n = 10^{-7}$.

Pomocí těchto diagramů je možno posoudit, až do jaké hodnoty n je nutno počítat pomocí tohoto rozvoje pro dané u a k , chceme-li docílit požadované přesnosti.

Pro usnadnění konkrétního výpočtu ještě uvedeme hodnoty $(2n - 1)!$ a $[(2n - 1)!]^{-1}$ pro $n = 1, \dots, 6$, uspořádané do tabulky na obr. 19 a diagramy závislosti přibližných hodnot výrazu $\zeta_{2n-1}[(2n - 1)!]^{-1}$ jednak na modulu k pro určitá n , jednak na n při určitých k (viz obr. 20 a 21). Prodloužení vypočtených křivek v posledním diagramu umožní dosti dobrý odhad těchto součinitelů pro n nepříliš větší než $n = 6$.

3. Výpočet pomocí Fourierova rozvoje

Provedeme-li Fourierův rozvoj pro funkci $\text{sn}(u, k)$, dostaneme řadu

$$\text{sn}(u, k) = \frac{2\pi}{\mathbf{K}k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+1/2}}{1 - q^{2n+1}} \sin \left[\frac{(2n+1)\pi u}{2\mathbf{K}} \right], \quad (12)$$

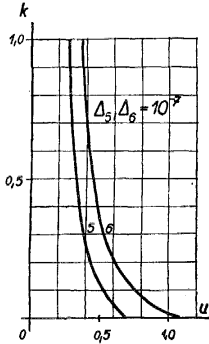
kde $q = e^{-\pi \frac{\mathbf{K}'}{\mathbf{K}}}$ je opět eliptická modulární funkce. Odvození tohoto rozvoje je uvedeno např. v [1], str. 249. Zde si všimneme otázky konvergence této řady, rychlosti konvergence při různých hodnotách argumentu u a modulu k a úpravy této řady pro použití v teorii filtrů, uvedené též V. FETZEREM v [10].

V řadě (12) položíme nyní

$$\frac{2\pi}{Kk} = P, \quad \frac{u}{2K} = v, \quad p_{2n+1} = \frac{q^{n+1/2}}{1 - q^{2n+1}}. \quad (13)$$

Pak bude

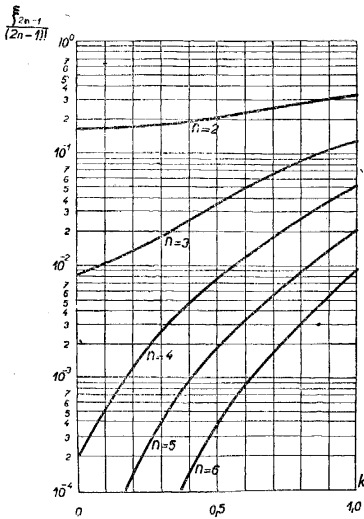
$$\operatorname{sn}(u, k) = P \sum_{n=0}^{n=\infty} p_{2n+1} \sin(2n+1)v\pi = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n = S. \quad (14)$$



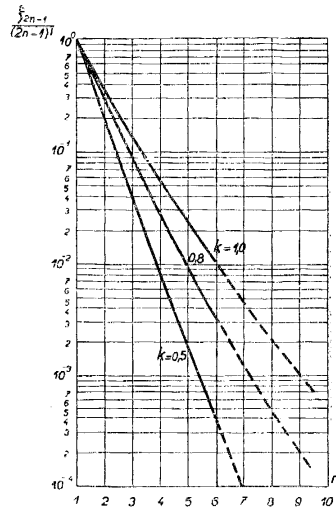
Obr. 18. Diagram závislosti $\Delta_n = 10^{-7}$ na argumentu u a modulu k při výpočtu pomocí potenční řady.

n	$(2n-1)!$	$\frac{1}{(2n-1)!}$
1	1	1
2	6	0,16
3	120	0,0073
4	5040	0,0001984126984
5	362880	0,000002755731922
6	39916800	0,00000002505210838

Obr. 19. Tabulka hodnot $(2n-1)!$ a $[(2n-1)!]^{-1}$ pro $n = 1, \dots, 6$.



Obr. 20. Diagram hodnot $\zeta_{2n-1}[(2n-1)!]^{-1}$ pro $n = 2, \dots, 6$ v závislosti na k .

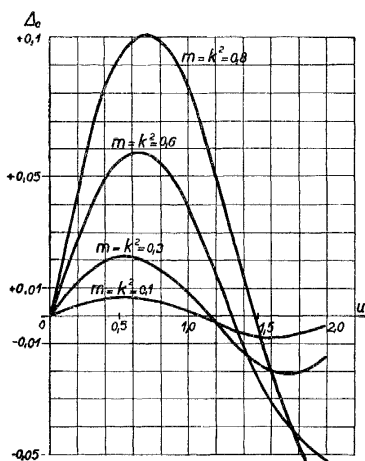


Obr. 21. Diagram hodnot $\zeta_{2n-1}[(2n-1)!]^{-1}$ pro $k = 0,5; 0,8; 1,0$.

Postačující podmínkou pro konvergenci řady (12), resp. (14) je, aby konvergovala řada

$$S' = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = P \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{q^{n+1/2}}{1 - q^{2n+1}} \sin(2n+1)\pi v \right|, \quad (14a)$$

sestavená z absolutních hodnot jejích členů. Pro všechna n pak platí, že $S \leq S'$.



Obr. 22. Diagram hodnot A_0 v závislosti na argumentu u pro určité hodnoty modulu k .

Řada S' bude konvergovat vždy, bude-li konvergovat též řada

$$S'' = P \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+1/2}}{1 - q^{2n+1}}, \quad (14b)$$

protože je

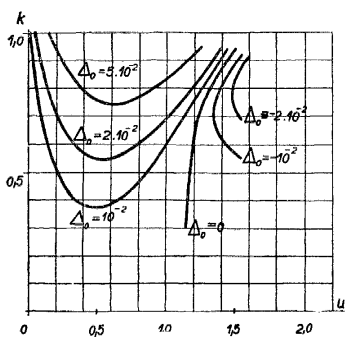
$$S \leq S' \leq S'' \quad (14c)$$

Pro vyšetření konvergence řady S'' lze použít některého z kritérií pro řady s kladnými členy. Podle d'Alembertova kritéria konvergence řady s kladnými členy stačí, aby řada konvergovala, je-li

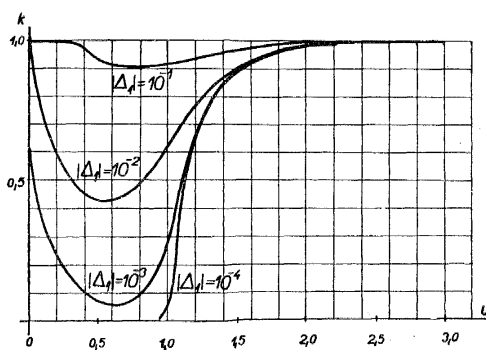
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \rho < 1.$$

Použijeme-li tohoto kritéria na řadu (14b), bude

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{q^{n+3/2}}{1 - q^{2n+3}}}{\frac{q^{n+1/2}}{1 - q^{2n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} q \frac{1 - q^{2n+1}}{1 - q^{2n+3}} = q,$$



Obr. 23. Diagram hodnot $A_0 = \text{konst.}$ v rovině u, k .



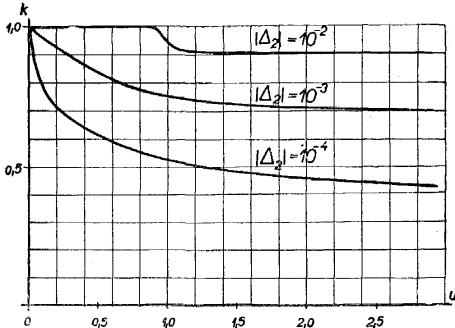
Obr. 24. Diagram hodnot $|A_1| = \text{konst.}$ v rovině u, k .

protože pro všechna $0 < k < 1$ je též $0 < q < 1$, konverguje tedy řada (14b) a podle vztahu (14c) tedy i řady (14a) a (14), resp. (12).

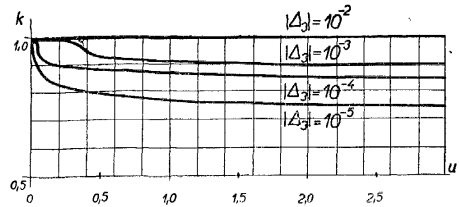
Pro posouzení rychlosti konvergence řady (12) v závislosti na různých hodnotách argumentu u a modulu k vyjádříme nejprve odchylku správné hodnoty funkce $\text{sn}(u, k)$ od hodnoty prvního členu rozvoje (12)

$$\Delta_0 = \text{sn}(u, k) - a_0 = \text{sn}(u, k) - Pp_1 \sin \frac{\pi u}{2K}.$$

Grafické znázornění závislosti hodnoty Δ_0 na argumentu u pro určité hodnoty modulu k je provedeno v diagramu obr. 22 a opačné křivky $\Delta_0 = \text{konst.}$, jsou v rovině u, k uvedeny v diagramu obr. 23.



Obr. 25. Diagram hodnot $|\Delta_2| = \text{konst.}$ v rovině u, k .



Obr. 26. Diagram hodnot $|\Delta_3| = \text{konst.}$ v rovině u, k .

Tak jako předešle určíme pro další členy rozvoje pouze závislost jejich absolutní velikosti na hodnotách argumentu u a modulu k a sestavíme do příslušných diagramů (viz obr. 24, 25 a 26). Snadno totiž nahlédneme, že pro zbytek řady (14) platí odhad $R_n = \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \right| < P \frac{p_{2n+3}}{1-q}$. Vskutku, platí $R_n \leq P$

$(p_{2n+3} + p_{2n+5} + \dots)$. Poněvadž $0 < q < 1$, je $q^{2n+3+k} < q^{2n+3}$ pro každé $k \geq 1$, a tedy $\frac{1}{1 - q^{2n+3+k}} < \frac{1}{1 - q^{2n+3}}$. Avšak $p_{2(n+i)+3} = \frac{q^{n+i+1/2}}{1 - q^{2(n+i)+3}} =$

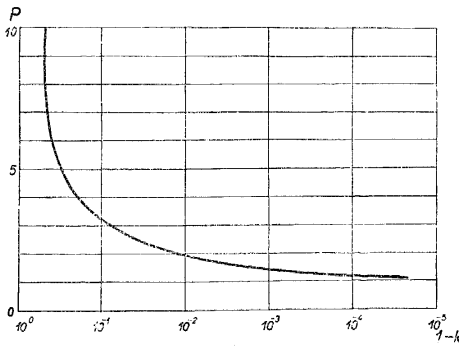
$= p_{2n+3} \frac{q^i(1 - q^{2n+3})}{1 - q^{2(n+i)+3}} < p_{2n+3} q^i$ pro $i = 1, 2, \dots$. Platí tedy $R_n <$

$< Pp_{2n+3}(1 + q + q^2 + \dots) = Pp_{2n+3} \frac{1}{1-q}$, čímž je tvrzení dokázáno.

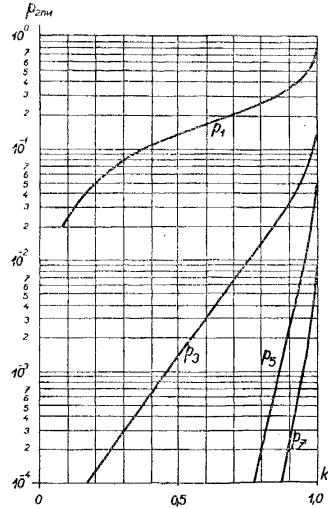
Pro usnadnění praktického výpočtu je dále uveden ještě v obr. 27 diagram závislosti hodnot P [viz rov. (13)] na modulu k , umožňující ovšem pouze přibližně jejich určení. Podobně jsou hodnoty p_{2n+1} [viz opět rov. (13)] pro $n = 1, \dots, 4$ v závislosti na modulu k sestaveny do diagramu obr. 28 a hodnoty v [viz rov. (13)] pro různé hodnoty modulu k v závislosti na argumentu u v diagramu obr. 29.

Při synthese elektrických frekvenčních filtrů podle Čebyševovy aproximace Caurovou metodou přicházejí v úvahu hlavně eliptické funkce $\operatorname{sn}(u, k)$, jejichž argument u je typu $u = \frac{l\mathbf{K}}{\varrho}$, kde $l = 1 \dots (\varrho - 1)$ a ϱ je stupeň tzv. funkce filtrace Φ v Ω^2 , (ϱ je celé kladné číslo).

$$\text{Pak je } v = \frac{u}{2\mathbf{K}} = \frac{l\mathbf{K}}{2\varrho\mathbf{K}} = \frac{l}{2\varrho}.$$



Obr. 27. Diagram hodnot P v závislosti na modulu k .



Obr. 28. Diagram hodnot p_{2n+1} pro $n = 1, \dots, 4$ v závislosti na modulu k .

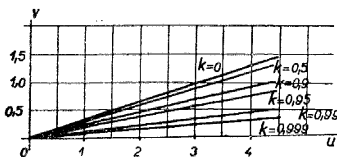
Protože pro praktický výpočet filtrů touto metodou vystačíme s $\varrho = 2, \dots, 12$, lze pro různé hodnoty ϱ a l podstatně zjednodušit výrazy (12) a (14).

Tak pro

$$\varrho = 2 \text{ bude } \operatorname{sn}\left(\frac{\mathbf{K}}{2}, k\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{k'^2}}}.$$

$$\text{Pro } \varrho = 3 \text{ bude } \operatorname{sn}\left(\frac{\mathbf{K}}{3}, k\right) = P\left[\frac{1}{2}(p_1 + p_5 - p_7 - p_{11} + p_{13} + p_{17} - p_{19} - \dots) + (p_3 - p_9 + p_{15} - p_{21} + \dots)\right]$$

atd. Výrazy P a p_{2n+1} jsou podle (13) pouze funkcí modulu k . V. Fetzer uvádí v [10] v dodatku celou tabulku takto sestavených výrazů pro $\varrho = 2, \dots, 12$.



Obr. 29. Diagram hodnot v v závislosti na argumentu u pro různá k .

Za zmínku pak stojí ještě vztah

$$\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{2}, k\right) = \frac{1 - \operatorname{cn}(u, k)}{1 + \operatorname{dn}(u, k)}$$

který usnadní výpočet v případech, že

$$u = \frac{\mathbf{K}}{2\nu} \text{ (kde } \nu = 1, 2, 3, \dots, \varrho).$$

Závěr

Provedeme-li srovnání uvedených tří metod výpočtu numerické hodnoty eliptické funkce $sn(u, k)$, je z příslušných diagramů zřejmo, že v největším rozsahu argumentu u a modulu k lze při téže počtu členů rozvoje a téže přesnosti použít rozvoje pomocí funkcí ϑ . Nevýhodou tohoto rozvoje je však nutnost použití kromě obvyklých trigonometrických funkcí ještě eliptické modulární funkce q . Tato nevýhoda je společná také Fourierovu rozvoji. Jeho předností však je jednodušší postup při výpočtu. Při použití potenční řady pro $sn(u, k)$ nepotřebujeme na rozdíl od předchozích postupů, žádných tabulek ani jiných funkcí a vystačíme pouze s původně danými hodnotami u a k a základními algebraickými operacemi. V určitých případech vede ovšem k cíli tento rozvoj jen velmi pomalu.

Závěrem celého tohoto pojednání lze pak říci, že výpočet numerické hodnoty Jacobiho eliptické funkce $sn(u, k)$, pokud nelze ovšem šťastnou okolností použití přímo tabulek, je vždy poměrně pracnou záležitostí, jejíž složitost pochopitelně roste s požadovanou přesností. To je jedna z příčin potíží při praktické synthese elektrických filtrů podle Čebyševovy aproximace, kterou ovšem nelze žádným jednoduchým způsobem odstranit. Tyto obtíže nejsou příliš závažné u jednoduchých filtrů, avšak rostou s nároky, kladenými na vlastnosti filtru a v krajních případech mohou technika zcela odradit od použití této metody synthesy. Značně přesné výpočty zde nutně vyžadují pak použití mechanických počítačích strojů a ty nebývají vždy k dispozici. Proto se též v poslední době věnuje zvýšená pozornost grafickým a analogickým metodám, umožňujícím rychlé řešení těchto otázek s přesností postačující v běžných případech.

LITERATURA

- [1] *Ахлесер*: Элементы теории электрических функций. ГИИТЭЛ, Москва 1948. (KVŠT: 69114)
- [2] *Baker A. L.*: Elliptic Functions. J. Wiley, New York 1915. (KVŠT: Cp624; KMU: A983)
- [3] *Cauer W.*: Theorie der linearen Wechselstromschaltungen. Akademie-Verlag, Berlin 1954.
- [4] *Cayley A.*: An Elementary Treatise on Elliptic Functions. G. Bell, London 1895. (KMU: Q1456)
- [5] *Cazenave R.*: Intégrales et fonctions elliptiques usuelles. Ann. Télécomm. 1954, No 4, str. 103—108.
- [6] *Čuřík F.*: Matematika. Technický průvodce I. ČMT, Praha 1944.
- [7] *Čuřík F.*: Mathematické a statické tabulky. Díl I. (Mathematické tabulky.) ČMT, Praha 1944.
- [8] *Dwight H. B.*: Tables of Integrals and other Mathematical Data. MacMillan Co., New York 1934. (ZKČSAV: 10680/55, F6708)

- [9] *Enneper*: Elliptische Funktionen. 2. vyd., Halle 1890 (KVŠT: 21707)
- [10] *Fetzer V.*: Die praktische Berechnung der elliptischen Funktionen „sn“ von Jacobi unter besonderer Berücksichtigung der Bestimmung der Cauchy Parameter für Filter mit Betriebsdämpfungsverhalten. AEÜ 1953, str. 393—401.
- [11] *Fuchs, Šabat*: Funkce komplexní proměnné. Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1953.
- [12] *Hurwitz A., Courant R.*: Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen. Springer, Berlin 1922, 1925, 1929. (KVŠT: 20966; 51469; VI—82)
- [13] *Jacobi C. G. J.*: Theorie der elliptischen Funktionen aus den Eigenschaften der Theta-Reihen abgeleitet. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1927 (KVŠT: P752)
- [14] *Jahnke, Emde*: Tafeln höherer Funktionen. Teubner, Leipzig 1952.
- [15] *Kogan*: Theorie elektrických frekvenčních filtrů. SNTL, Praha 1953.
- [16] *Лаурентьев М. А., Шабат Б. В.*: Методы теории функций комплексного переменного, ГИИТЛ, Москва 1951.
- [17] *Magnus W., Oberhettinger F.*: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Springer, Berlin 1943. (KVŠT: 35823)
- [18] *Milne, Thomson L. M.*: Die elliptischen Funktionen von Jacobi. Springer, Berlin 1931 (KVŠT: 24437)
- [19] *Oberhettinger F., Magnus W.*: Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik. Springer, Berlin 1948. (KVŠT: 66438)
- [20] *Schuler M., Gebelein H.*: Acht- und neunstellige Tabellen zu den elliptischen Funktionen. Springer, Berlin 1955. (ÚRE: 1984, C378)
- [21] *Spenceley*: Smithsonian Elliptic Function Tables. Washington 1947.
- [22] *Vojtěch*: Základy matematiky II. JČMF, Praha 1946.
- [23] *Whittaker E. T., Watson G. N.*: A Course of Modern Analysis. Cambridge, 4. vyd. 1927, 5. vyd. 1935, 4. vyd. přetisk 1950. (KVŠT: II. — 61548); 4. vyd. přetisk 1952. (ÚRE, 1938, C374)
- [24] *Weierstrass*: Theorie der elliptischen Funktionen. Sitzungsberichte der Berliner Academie, 1883.
- [25] *Adams E. P., Hippisley R. L.*: Smithsonian Mathematical Formulae and Tables of Elliptic Functions, Smithsonian Institution, Washington D. C., 1922, 2. vyd. 1947. (ÚRE: B745)
- [26] *Золотарев Е. И.*: Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее уклоняющихся от нуля. Сбírka úloh, sv. II., Akademie věd SSSR, 1932.
- [27] *Гурвиц А. (Hurwitz A.)*: Теория аналитических и эллиптических функций. Гостехиздат, Москва, 1933.
- [28] *Krause M., Naetsch E.*: Theorie der elliptischen Funktionen. Leipzig 1912. (KVŠT: 2D181—13)
- [29] *Halphen G. H.*: Traité de fonctions elliptiques et de leurs applications. 3. svazky 1886—1891.
- [30] *Tricomi*: Funzioni ellittiche. Bologna 1937.
- [31] *Сикорский*: Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике, ОНТИ, 1936.
- [32] *Журавский А. М.*: Справочник по эллиптическим функциям, Издательство Академии наук СССР, 1941.
- [33] *Novák M.*: Základní vlastnosti eliptických funkcí a některé metody jejich numerického výpočtu se zřetelem k synthése elektrických filtrů. Výzkumná zpráva č. Z-16, ÚRE ČSAV, 1956.

Význam použitých zkratek:

KVŠT... Knihovna vysokých škol technických, Praha I., Klementinuin.

KMU... Knihovna matematického ústavu ČSAV, Praha II., Žitná 25.

ZKČSAV Základní knihovna ČSAV, Praha I., Národní 3.

ÚŘE... Knihovna Ústavu radiotechniky a elektroniky ČSAV Praha I., Karlova 2.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
ЧИСЛЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ
 $\operatorname{sn}(u, k)$

МИРКО НОВАК (Mírko Novák)

(Поступило в редакцию 28/VIII 1957 г.)

Эллиптические функции Якоби, в особенности эллиптический синус $\operatorname{sn}(u, k)$, имеют большое значение во многих приложениях в технической практике. Без них нельзя также обойтись при решении задач из теории электрических линейных цепей, когда требуется найти численное значение нескольких выражений, содержащих эти функции. При этом обычно возлагаются значительные требования на точность. Итак, мы часто встречаемся с задачей определить численное значение функции $\operatorname{sn}(u, k)$ с предписанной точностью. Этим вопросам посвящена настоящая работа. Автор в ней ограничивается только значениями функции $\operatorname{sn}(u, k)$ для действительных значений аргумента u и модуля k , имеющих для практики наиболее важное значение.

В первой части приводятся в краткости некоторые важные свойства функции $\operatorname{sn}(u, k)$, и указывается связь с другими эллиптическими функциями. Затем показаны диаграммы для некоторых значений модуля k . В третьей части описаны некоторые, сравнительно доступные, таблицы, проводится их анализ с указанием области, которую они охватывают, и с расчленением параметров, и оценка с точки зрения их приложений. Дается несколько примеров их применения. Требованиям практики не удовлетворяют никакие из описанных таблиц. Поэтому в статье уделяется большее внимание методам вычисления численного значения функции $\operatorname{sn}(u, k)$ при помощи других, лучше табелированных функций или при помощи разложения в бесконечный ряд. Эти методы разработаны в следующей части работы. В первую очередь производится вычисление при помощи эллиптических функций ϑ . Справедливо соотношение

$$\operatorname{sn}(u, k) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)},$$

где ϑ_0 и ϑ_1 — эллиптические функции тэта, $v = \frac{u}{2K}$, K — полный эллиптический интеграл первого рода. Функции ϑ_0 и ϑ_1 сравнительно хорошо табулированы. Кроме того, их можно разложить в бесконечные тригонометрические, очень быстро сходящиеся ряды. Тогда

$$\operatorname{sn}(u, k) = \frac{2}{\sqrt{k}} \cdot \frac{q^{1/4} \sin \pi v - q^{3/4} \sin 3\pi v + \dots}{1 - 2q \cos 2\pi v + \dots},$$

Символом $q(k)$ здесь обозначена эллиптическая модулярная функция модуля k . Возможности определения ее численного значения как по таблицам, так и для незакругленных значений модуля k путем разложения в бесконечный ряд, описаны в последующем отделе работы. Для усмотрения скорости сходимости этого разложения $\operatorname{sn}(u, k)$ проводится несколько расчуждений и приводится несколько диаграмм.

Затем описывается метод вычисления, опирающийся на степенной ряд. Этот ряд является знакопеременным, и скорость сходимости можно, следовательно, усмотреть, зная абсолютные величины его отдельных членов. Приводится целый ряд диаграмм, показывающих, для каких u и k это значение меньше данного значения.

Последним из приведенных методов является вычисление при помощи разложения Фурье. И здесь приводится несколько диаграмм, облегчающих определить число членов ряда, необходимых для получения требуемой точности значения $\operatorname{sn}(u, k)$.

В заключение дается краткая оценка описанных методов и список соответствующей литературы.

Summary

A DISCUSSION OF SOME METHODS OF CALCULATION OF THE FUNCTION $\operatorname{sn}(u, k)$

MIRKO NOVÁK

(Received August 28th 1957.)

Elliptic functions and the elliptic sine $\operatorname{sn}(u, k)$ in particular have become important in a number of branches of technology. E. g., some parts of advanced network theory require the numerical calculation of large numbers of values of these functions, and with a considerable degree of accuracy. The present article discusses these questions, at least for real u, k .

After a concise exposition of the main properties of $\operatorname{sn}(u, k)$, some tables

are discussed, their range and applicability. None of these appear to be completely suitable for practical requirements.

In the direct computation of $\text{sn}(u, k)$ we make use either of its relation to functions for which more suitable tables are available, or of its expansions in infinite series. Thus

$$\text{sn}(u, k) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)},$$

where ϑ_0, ϑ_1 are the elliptic theta functions, $v = \frac{u}{2\mathbf{K}}$ and \mathbf{K} is the complete elliptic integral of the first kind. Using the rapidly converging series of the theta functions, we may even write

$$\text{sn}(u, k) = \frac{2}{\sqrt{k}} \frac{q^{1/4} \sin \pi v - q^{9/4} \sin 3\pi v + \dots}{1 - 2q \cos 2\pi v + \dots},$$

where $q(k)$ is the elliptic modular function of modulus k . The use of these expressions for computational work is discussed.

In the power series for $\text{sn}(u, k)$ which is alternating, the degree of approximation is shown by the absolute values of individual terms in the series; graphs are constructed, determining values of u for which these terms are less than a given constant and thus the number of terms necessary to obtain any required accuracy. Graphs with a similar purpose are constructed for the expansion of $\text{sn}(u, k)$ into a trigonometrical series.