Vratislav Horálek

Příspěvek k otazce hodnocení struktury materiálu

Aplikace matematiky, Vol. 3 (1958), No. 5, 376–383

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102631

PŘÍSPĚVEK K OTÁZCE HODNOCENÍ STRUKTURY MATERIÁLU

VRATISLAV HORÁLEK

(Došlo dne 29. října 1957.) DT: 620.18.001

V práci je stanoven vztah mezi průměrným počtem zrn v jednotce objemu materiálového vzorku a průměrným počtem rovinných průseků na jednotce plochy v rovině metalografického výbrusu. Řešení je podáno za předpokladu, že zrna kulovitého tvaru jsou v prostoru vzorku rozmístěna náhodně. O rozdělení průměrů zrn se předpokládá, že je logaritmicko-normální.

1. Úvod

Poněvadž metalografickými metodami lze pozorovat nebo měřit strukturní změny pouze v rovině metalografického výbrusu, je nutné znát vztahy mezi výsledky pozorování na rovině výbrusu a poměry v prostoru materiálového vzorku. Při studiu kovových materiálů např. při sferoidisaci cementitu, při grafitisaci temperované litiny s černým lomem apod. se setkáváme s případy, kdy zrna sledované fáze jsou přibližně kulovitá a jsou náhodně rozmístěna v prostoru materiálového vzorku. Jejich rozměry jsou však vzájemně rozdílné. Zde je pak zvláště důležitá otázka určení vztahu mezi průměrným počtem λ rovinných průseků zrn, který zjišťujeme na jednotkové ploše roviny výbrusu, a průměrným počtem $\varkappa$ zrn v jednotce objemu vzorku.

Touto otázkou se zabývala za různých předpokladů řada autorů jako např. Scheil [1], Fullman [2] a Saltykov [3]. Ve všech těchto pracích jsou řešeny pouze případy, kdy buď všechna zrna jsou stejně velká anebo je známa průměrná velikost zrn v prostoru.

V předložené práci se naproti tomu vychází z určitého zákona rozdělení rozměrů zrn, který obsahuje neznámé parametry. Předpokládá se, že toto rozdělení je logaritmicko-normální. Fysikální odůvodnění tohoto předpokladu a jeho ověření na základě experimentálních výsledků bude uveřejněno v samostatné práci [4].

2. Vztah mezi počtem zrn ve vzorku a počtem rovinných průseků zrn na rovině výbrusu

Uvažujme materiálový vzorek B, který má tvar válce s libovolnou podstavou a výškou v a v němž jsou náhodně umístěna kulovitá zrna. Přesněji řečeno, pravděpodobnost, že střed koule s padne do podmnožiny Δ vzorku B je

$$P(s \in \Delta) = \frac{|\Delta|}{|B|}, \quad \Delta \subset B, \tag{1}$$

kde $|\Delta|$ a $|B|$ značí objem Δ resp. B. Kolem středu s opišme kouli o poloměru $\frac{\xi}{2}$, kde náhodné proměnné ξ přísluší hustota pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\lg x - \lg \mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x > 0, \tag{2}$$

při čemž μ a σ^2 jsou neznámé parametry.

Válcem B veďme nyní rovnoběžně s podstavou rovinu ve vzdálenosti $\frac{v}{2}$ od podstavy. Označme A jev, kdy koule (s, ξ) náhodně umístěná ve válci B je touto rovinou protnuta. Pro pravděpodobnost jevu A zřejmě platí

$$P(A) = \int_0^v \frac{x}{v} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_v^\infty f(x)\,\mathrm{d}x .$$

Jelikož velikost zrn je ve srovnání s objemem vzorku $|B|$ mnohokrát menší, je možno psát

$$P(A) = \int_0^\infty \frac{x}{v} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma v} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\lg x - \lg \mu}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{v} \mu e^{\frac{1}{2}\sigma^2} . \tag{3}$$

Umístěme nyní uvedeným způsobem ve válci B nezávisle k koulí (s_i, ξ_i), $i = 1, 2, \ldots, k$, a označme l počet koulí, které byly proťaty rovinou řezu. Této náhodné proměnné zřejmě přísluší binomické rozdělení s parametry k a $P(A)$, takže vzhledem ke (3) je střední hodnota

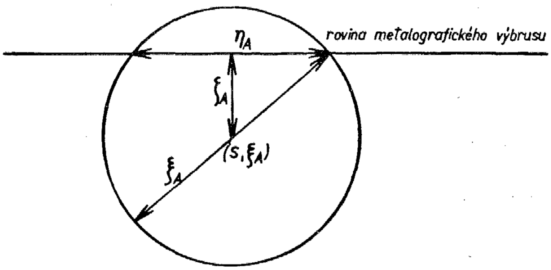
$$E(l) = \bar{l} = kP(A) = \frac{k}{v} \mu e^{\frac{1}{2}\sigma^2} . \tag{4}$$

Za předpokladu, že hodnoty $\bar{l}$, μ a σ^2 jsou známy, můžeme stanovit k z rovnice

$$k = \frac{\bar{l} v}{\mu e^{\frac{1}{2}\sigma^2}} . \tag{5}$$

3. Stanovení momentů rozdělení průměrů rovinných průseků koulí na rovině výbrusu

Předpokládejme, že nastal jev A, t. zn. že koule (s, ξ) je protnuta rovinou výbrusu (viz obr. 1). Označme:



Obr. 1.

ξ_A — průměr koule, která byla protnuta rovinou výbrusu, a $f_A(x)$ příslušnou hustotu pravděpodobnosti;

η_A — průměr rovinného průseku koule, který zjišťujeme na rovině výbrusu, a $g(y)$ příslušnou hustotu pravděpodobnosti;

ζ_A — vzdálenost středu koule od roviny výbrusu a $h(z)$ příslušnou hustotu pravděpodobnosti.

Podle Pythagorovy věty platí

$$\left(\frac{\eta_A}{2}\right)^2 = \left(\frac{\xi_A}{2}\right)^2 - \zeta_A^2 ,$$

z čehož

$$\eta_A = \xi_A \sqrt{1 - \tau^2} , \tag{6}$$

kde

$$\tau = \frac{2\zeta_A}{\xi_A} .$$

Poněvadž střed koule má rovnoměrné rozdělení nezávislé na poloměru ξ, má i náhodná proměnná τ rovnoměrné rozdělení nezávislé na ξ_A:

$$h(t) = \begin{cases} 1, \text{ pro } t \text{ uvnitř } (0,1) \\ 0, \text{ pro } t \text{ vně } \quad (0,1) . \end{cases}$$

Pro $f_A(x)$ vyplývá z Bayesova pravidla

$$f_A(x) = \frac{x \, . \, f(x)}{\int\limits_0^\infty x f(x) \, \mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\mu e^{\frac{1}{2}\sigma^2}} \, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\lg x - \lg \mu}{\sigma}\right)^2} \tag{7}$$

— podmíněná pravděpodobnost jevu A za podmínky $\xi = x$ je totiž $\frac{x}{v}$ a $f(x)$ je apriorní hustota pravděpodobnosti. Z výsledku (7) vyplývá, že náhodná proměnná ξ_A má opět logaritmicko-normální rozdělení s parametry $(\lg \mu + \sigma^2, \sigma^2)$.

Vzhledem k nezávislosti náhodných proměnných ξ_A a τ platí podle (6)

$$E(\eta^\nu) = \beta_\nu = E(\xi_A^\nu)\, E[(1 - \tau^2)^{\frac{\nu}{2}}]\,. \tag{8}$$

Jak známo, vzhledem ke vztahu (2) je

$$E(\xi^\nu) = \int_0^\infty x^\nu f(x)\, \mathrm{d}x = \mu^\nu e^{\frac{1}{2}\nu^2\sigma^2}\,. \tag{9}$$

Použijeme-li výše uvedeného důsledku, který vyplynul ze (7), dostáváme přímo

$$E(\xi_A^\nu) = (\mu e^{\sigma^2})^\nu\, e^{\frac{1}{2}\nu^2\sigma^2} = \mu^\nu e^{\frac{1}{2}\sigma^2\nu(\nu+2)}\,. \tag{10}$$

Dále můžeme vyjádřit

$$E[(1 - \tau^2)^{\frac{\nu}{2}}] = \int_0^1 \frac{s^{\nu+1}}{\sqrt{1 - s^2}}\, \mathrm{d}s = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right)}\,, \quad \nu = -1, 0, 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

kde $\Gamma(n)$ je gamma funkce.

Dosazením výsledků (10) a (11) do vztahu (8) získáme hledaný výraz pro ν-tý moment rozdělení průměrů rovinných průseků koulí na rovině výbrusu

$$\beta_\nu = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right)}\, \mu^\nu e^{\frac{1}{2}\sigma^2\nu(\nu+2)}\,, \tag{12}$$

pro $= -1, 0, 1, 2, \ldots$.

4. Odhad průměrného počtu zrn v jednotce objemu materiálového vzorku

Označme $\varkappa$ průměrný počet koulí v jednotce objemu materiálového vzorku a λ průměrný počet rovinných průseků koulí na jednotkové ploše roviny výbrusu V. Jestliže k je počet koulí ve vzorku, jehož objem $|B| = vV$, potom

$$\varkappa = \frac{k}{vV}$$

a

$$\lambda = \frac{\bar{l}}{V}\,.$$

Vzhledem k (5) dostáváme tedy

$$\varkappa = \frac{\lambda}{\mu e^{\frac{1}{2}\sigma^2}}\,. \tag{13}$$

Stanovme nyní odhad $\hat{\varkappa}$.

Označíme-li d_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) počet rovinných průseků koulí, který jsme zjistili při i-tém náhodném položení jednotkové plochy na plochu roviny výbrusu V, můžeme λ odhadnout ze vztahu

$$\lambda \approx \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} d_i \,. \tag{14}$$

Předpokládejme dále, že jsme na rovině výbrusu náhodně vybrali a proměřili n průměrů rovinných průseků koulí. Označme výsledky $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Poněvadž podle (12) je

$$\frac{\pi}{2\mu e^{\frac{1}{2}\sigma^2}} = \beta_{-1} = E(\eta^{-1}) \,,$$

můžeme položit pro dostatečně velké n

$$\frac{1}{\mu e^{\frac{1}{2}\sigma^2}} \approx \frac{\pi}{2n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{y_j} \,. \tag{15}$$

Pomocí (14) a (15) získáme z (13)

$$\hat{\varkappa} = \frac{\pi}{2mn} \sum_{i=1}^{m} d_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{y_j} \,. \tag{16}$$

Označíme-li C_d a $C_{\frac{1}{y}}$ příslušné koeficienty variace dostáváme

$$C_{\varkappa}^2 = \frac{C_d^2}{m} + \frac{C_{\frac{1}{y}}^2}{n} + \frac{C_d^2 C_{\frac{1}{y}}^2}{mn} \,. \tag{17}$$

Stanovme nyní optimální poměr mezi počtem měření m a n, který minimalisuje náklady na měření při dané přesnosti. Označme

a — náklad na položení jednotkové plochy na rovinu výbrusu a na zjištění příslušného počtu rovinných průseků,

b — náklady na zjištění průměru jednoho náhodně vybraného rovinného průseku koule.

Požadujeme-li nyní, aby celkové náklady, potřebné k získání podkladů pro odhad $\hat{\varkappa}$, byly minimální, tj. aby

$$am + bn = \text{minimum} \,, \tag{18}$$

kde proměnné m a n jsou vázány vedlejší podmínkou (17), v níž zanedbáváme člen $\frac{C_d^2 C_{\frac{1}{y}}^2}{mn}$, musí zřejmě

$$\frac{m}{n} = \frac{C_d}{C_{\frac{1}{y}}} \sqrt{\frac{b}{a}} \,. \tag{19}$$

Velikost koeficientů variace C_d a $C_{\frac{1}{y}}$ odhadneme z výsledků pozorování na rovině výbrusu

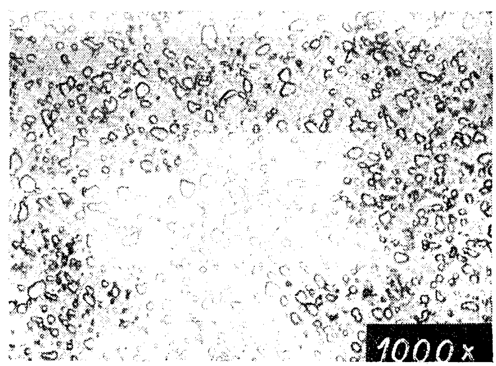
$$C_d \approx \left(\frac{m_1 \sum_{i=1}^{m_1} d_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{m_1} d_i \right)} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{20}$$

$$C_{\frac{1}{y}} \approx \left(\frac{n_1 \sum_{j=1}^{n_1} \frac{1}{y_j^2}}{\left(\sum_{j=1}^{n_1} \frac{1}{y_i} \right)^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{21}$$

kde m_1 resp. n_1 jsou rozsahy pozorování.

5. Příklad

Na obr. 2 je ukázka mikrostruktury vzorku, která je tvořena základní hmotou ferritickou, v níž jsou uložena silně sferoidisovaná zrna cementitu. Na vypracované rovině metalografického výbrusu byla provedena měření jednak velikosti rovinných průseků zrn (počet měření n) a jednak počtu těchto průseků nacházejících se na jednotkové ploše (počet měření m). Odhad veličin C_d a $C_{\frac{1}{y}}$ (při $n = 100$ a $m = 50$) byl proveden pomocí vztahů (20) a (21). Bylo zjištěno $\hat{C}_{\frac{1}{y}} = 0{,}4$ a $\hat{C}_d = 0{,}17$. Poněvadž poměr nákladů $b : a = 1 : 4$, je tedy podle (19) optimální poměr $m : n = 1 : 5$.



Obr. 2.

Pro odhad průměrného počtu $\varkappa$ zrn jednotce objemu bylo pak proměřeno 300 průměrů náhodně vybraných rovinných průseků zrn a 60krát byla položena jednotková plocha na rovinu výbrusu. Z výsledků měření byly stanoveny výrazy

$$\sum_{j=1}^{300} \frac{1}{y_j} = 3861{,}2 \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^{60} d_i = 1073$$

Podle (14) resp. (16) je tedy $\hat{\lambda} \doteq 18$ a $\hat{\varkappa} \doteq 147$.

Poznámka: Rovinné průseky zrn byly vybrány tak, že na danou plochu roviny výbrusu byla položena průhledná deska s vyznačenými náhodnými body, jejichž souřadnice byly určeny pomocí tabulek náhodných čísel a do výběru byly pojaty průseky zrna, jejichž předem stanovená část (např. dolní část) — stejně velká u všech zrn — ležela pod některým z těchto bodů. Kdybychom do výběru přijali rovinný průsek po každé, když byl zasažen, pak by pravděpodobnost přijetí tohoto průseku zrna do výběru byla úměrná jeho ploše. Tomu jsme se vyhnuli právě tím, že pro přijetí do výběru byla směrodatná pouze část zrna (přibližně rovná ploše nejmenších průseků zrn). Průseky, jejichž obrys po naleptání splynul, nebyly vzaty v úvahu.

LITERATURA

[1] *Scheil E.:* Statistische Gefügenuntersuchungen, Zeitschrift für Metallkunde 1935 (str. 199) a 1936 (str. 340).

[2] *Fullman R. L.:* Measurement of Particle Sizes in Opaque Bodies, Journal of Metals, 1953, March.

[3] *Салтыков:* Введение в стереометрическую металлографию, Издательство Академии наук армянской ССР, Ереван, 1950.

[4] *Drápal S., Horálek V.:* Některé vztahy mezi rovinnými a prostorovými parametry struktury materiálu (dosud nepublikováno).

Резюме

ЗАМЕТКА К ПРОБЛЕМЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СТРУКТУРЫ МАТЕРИАЛА

ВРАТИСЛАВ ГОРАЛЕК (Vratislav Horálek)

(Поступило в редакцию 29/X 1957 г.)

В статье дается решение вопроса, имеющего большое значение при изучении физики металлов, именно отношение между средним количеством λ сечений зерн на единице плоскости в плоскости шлифа и средним количеством $\varkappa$ зерн в единице объема образца. При условии, что диаметр шарообразных зерн, помещаемых случайно в образце, имеет распределение

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\lg x - \lg \mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x > 0 .$$

где μ и σ^2 — параметры распределения, получим

$$\varkappa = \frac{\lambda}{\mu e^{\frac{1}{2}\sigma^2}} .$$

Summary

A CONTRIBUTION TO THE STUDY OF THE STRUCTURE OF MATERIALS

VRATISLAV HORÁLEK

(Received 29 October 1957.)

The paper treats an interesting question of the physics of metals: the relation between the average number λ per unit volume of intersections of particles with a plane cross-section on one hand, and the average number $\varkappa$ per unit volume of particles on the other. If spherical particles are positioned at random within a given volume, and their radii have a probability density

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\lg x - \lg \mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x > 0\,,$$

with given parameters μ and σ, then the relation in question is

$$\varkappa = \frac{\lambda}{\mu e^{\frac{1}{2}\sigma^2}}\,.$$