František Šubart

Odvození nejvýhodnějších dělících tlaků k-stupňové komprese, při ssacích teplotách lišících se v jednotlivých stupních

Aplikace matematiky, Vol. 3 (1958), No. 5, 372–375

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102630`

ODVOZENÍ NEJVÝHODNĚJŠÍCH DĚLÍCÍCH TLAKŮ k-STUPŇOVÉ KOMPRESE, PŘI SSACÍCH TEPLOTÁCH LIŠÍCÍCH SE V JEDNOTLIVÝCH STUPNÍCH

FRANTIŠEK ŠUBART

(Došlo dne 25. dubna 1957) DT: 621.5.01

Ve stati [1] je řešen nejvýhodnější poměr dělících tlaků pro k-stupňovou kompresi. Při tomto řešení je předpokládáno určité zjednodušení problému. V technické praxi však toto zjednodušení není vždy splněno. Z tohoto hlediska je řešení [1] zvláštním případem obecnějšího řešení, podaného v následující poznámce.

Za nejvýhodnější dělící tlaky budeme považovat takové, pro něž bude práce minimální. Polytropická práce kompresoru s k-stupňovou kompresí je dána v určitém případě vztahem

$$^{(k)}L = \frac{n}{n-1} G_1RT_1 \left[\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1\right] + \frac{n}{n-1} G_2RT_2 \left[\left(\frac{P_3}{P_2}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1\right] + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n}{n-1} G_kRT_k \left[\left(\frac{P_{k+1}}{P_k}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1\right], \tag{1}$$

v němž G_i, T_i ($i = 1, 2, \ldots; k$) je dopravované množství, resp. ssací teplota v i-tém stupni kompresoru, P_1 je ssací tlak prvního stupně, P_{k+1} výtlačný tlak k-tého stupně (posledního) a P_j ($j = 2, 3, \ldots, k$) jsou dělící tlaky jednotlivých stupňů. Přitom veličiny G_i, T_i, P_1, P_{k+1}, R a n jsou dané konstanty, vesměs kladné, zatím co P_j jsou veličiny proměnné a jejich definiční obor je

$$P_1 < P_j < P_{k+1} \,. \tag{2}$$

Fysikálně významné jsou však jen dělící tlaky určené tak, že platí

$$P_{j-1} < P_j < P_{j+1}\,, \quad \text{pro} \quad j = 2, 3, \ldots, k\,. \tag{3}$$

Poznámka. Různá dopravovaná množství v jednotlivých stupních kompresoru je případ technicky méně důležitý, zato různé ssací teploty je třeba často předem uvažovat. Např. [2] uvádí, že u 2-stupňové komprese je třeba volit kompresi v prvním stupni vyšší než ve druhém, což je důsledek *nedodržení podmínky ochlazení plynu na stejnou ssací teplotu*. Účelem této volby je podle [2] zabránit většímu zvýšení kompresní teploty. Tuto větu potvrdíme kvantitativním rozborem a dále ukážeme, že práce kompresoru se při takové volbě komprese zmenší oproti práci kompresoru se stejnou kompresí.

V dalším budeme uvažovat pouze ssací teploty rozdílné v jednotlivých stupních, zatím co protékající množství budeme pokládat za konstantní, tj. $G_1 = G_2 = \ldots = G_k = G$. Ve skutečnosti je však možno následující řešení použít i pro případ, kdy $G_1 \neq G_2 \neq \neq \ldots \neq G_k$, neboť součin $G_i T_i$ je konstanta podobně jako T_i. Stačí tedy v řešení nahradit T_i výrazy $G_i T_i$ a obdržíme řešení pro případ $G_1 \neq G_2 \neq \ldots \neq G_k$.

Řešením systému rovnic, vzniklých provedením $\frac{\partial L}{\partial P_i} = 0$ $(i = 2, 3, \ldots, k)$, obdržíme nejvýhodnější dělicí tlaky ve tvaru

$$ {}^{(k)}P^{k}_{k-a+1} = \prod_{i=1}^{a} \left(\frac{T_{k-i+1}}{T_{k-1}}\right)^{\frac{1}{m} i(k-a)} \prod_{i=a+1}^{k-1} \left(\frac{T_{k-i+1}}{T_{k-i}}\right)^{\frac{1}{m} a(k-i)} P_1^{a} P_{k+1}^{k-a} , \tag{4} $$

kde $a = 1, 2, \ldots, k - 1$ a $m = \frac{n-1}{n}$. Symbol ${}^{(k)}P_j$ znamená j-tý dělicí tlak, při uvažování k-stupňové komprese. Podle hořejších předpokladů je zřejmé, že fysikálně významná jsou jen realná kladná řešení pro jednotlivé dělicí tlaky. Snadno lze dokázati, že takové *řešení vždy existuje a to pouze jediné.*

Dělicí tlaky musí splňovat podmínky (2) a (3). Zatím budeme předpokládat, že ssací teploty $T_1, T_2, \ldots, T_k$ jsou zadány tak, že je možno splnit tyto podmínky o vzájemných velikostech dělicích tlaků. V dalším ukážeme, jaké vztahy musí ssací teploty splňovat. Rovnice (4) též kvantitativně vysvětluje větu z [2] (viz pozn.), neboť při 2-stupňové kompresi a $T_2 > T_1$ bude patrně poměr tlaků v prvním stupni větší než ve druhém.

Dělicí tlaky určené z rovnice (4), dosazené do (1), dávají extrémní velikost práce kompresoru, o níž lze dokázat, že je minimem. Tento důkaz vede na speciální determinanty, které lze snadno převést na jednoduché kontinuanty.

Technicky důležitý je vztah udávající poměr dělicích tlaků, tzv. *kompresní poměr*. Je určen vztahem

$$ \frac{{}^{(k)}P_{k-a+1}}{{}^{(k)}P_{k-a}} = \left\{ \prod_{i=1}^{a} \left(\frac{T_{k-i+1}}{T_{k-i}}\right)^{\frac{1}{m} i} \left(\frac{T_{k-a}}{T_{k-a-1}}\right)^{\frac{1}{m}(a+1-k)} \prod_{i=a+2}^{k-1} \left(\frac{T_{k-i+1}}{T_{k-i}}\right)^{\frac{1}{m}(i-k)} \frac{P_{k+1}}{P_1} \right\}^{\frac{1}{k}} , \tag{5} $$

kde $a = 0, 1, 2, \ldots, k - 1$. Pro technickou praxi je důležité všimnout si blíže tzv. *kompresních teplot* T'_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ v jednotlivých stupních. Kompresní teploty jsou definovány vztahy (při k-stupňové kompresi)

$$ {}^{(k)}T'_i = T_i \left(\frac{{}^{(k)}P_{i+1}}{{}^{(k)}P_i}\right)^{m} . \tag{6} $$

Dosazením ze vztahu (5) obdržíme

$$ {}^{(k)}T'_{k-a} = T_{k-a} \left\{ \prod_{i=1}^{a} \left(\frac{T_{k-i+1}}{T_{k-i}}\right)^{i} \left(\frac{T_{k-a}}{T_{k-a-1}}\right)^{(a+1-k)} \prod_{i=a+2}^{k-1} \left(\frac{T_{k-i+1}}{T_{k-i}}\right)^{(i-k)} \left(\frac{P_{k+1}}{P_1}\right)^{m} \right\}^{\frac{1}{k}} . \tag{7} $$

Po dosazení za $a = 0, 1, 2, \ldots, k - 1$ zjistíme, že kompresní teploty budou ve všech stupních stejné

$$ {}^{(k)}T'_1 = {}^{(k)}T'_2 = \ldots = {}^{(k)}T'_k = {}^{(k)}T' \tag{8} $$

a budou rovny

$$ {}^{(k)}T' = \left[\prod_{i=1} T_i \left(\frac{P_{k+1}}{P_1} \right)^m \right]^{\frac{1}{k}} . \tag{9} $$

Při kvalitativním rozboru rovnice (4) jsme předpokládali, že ssací teploty jsou zadané tak, že je vskutku možno splnit základní fysikální podmínky (2) a (3) o dělících tlacích. Ukážeme, že tyto podmínky budou splněny tenkrát, jestliže ssací teploty budou menší než kompresní teploty, tj.

$$ T_i < {}^{(k)}T' , \quad i = 1, 2, \ldots, k , \tag{10} $$

(takže stlačenému plynu bude při přechodu do dalšího stupně odebráno určité množství tepla). Z podmínky $T_i < {}^{(k)}T'$ totiž plyne

$$ \frac{{}^{(k)}T'}{T_i} = \left(\frac{{}^{(k)}P_{i+1}}{{}^{(k)}P_i} \right)^m > 1 , $$

což vede k základní fysikální podmínce $0 < P_1 < {}^{(k)}P_2 < \ldots < {}^{(k)}P_k < P_{k+1}$. Celá naše úvaha má tedy fysikální význam tehdy, *splňují-li ssací teploty podmínku* $T_i < {}^{(k)}T'$.

Práce kompresoru s nejvýhodnějšími dělícími tlaky je absolutně minimální. Důkaz tohoto tvrzení, tj. výpočet hraničních minim, spočívá v dokázání nerovnosti

$$ {}^{(j+1)}L < {}^{(j)}L , \quad (j = 1, 2, \ldots, k - 1) . \tag{11} $$

Nerovnost (11) vede na nerovnost

$$ jN^{j+1} - (j + 1) N^j + 1 > 0 , $$

resp. po přepsání na nerovnost

$$ (N - 1)^2 [jN^{j-1} + (j - 1) N^{j-2} + \ldots + 3N^2 + 2N + 1] > 0 , \tag{12} $$

kde

$$ N = \left[\left(\frac{P_{k+1}}{P_1} \right)^m \frac{T_1 T_2 \ldots T_j}{T^j_{j+1}} \right]^{\frac{1}{j(j+1)}} , $$

což je možno psát ve tvaru

$$ N = \left[\frac{{}^{(j)}T'}{T_{j+1}} \right]^{\frac{1}{j+1}} = \left[\frac{{}^{(j+1)}T'}{T_{j+1}} \right]^{\frac{1}{j}} . \tag{13} $$

Protože podle (10) platí pro fysikálně významné případy

$$ T_{j+1} < {}^{(j+1)}T' \tag{14} $$

je potom v našem případě $N > 1$ a nerovnost (12) a tedy i (11) je splněna. Z (13) plyne ihned

$$ [{}^{(j+1)}T']^{j+1} = [{}^{(j)}T']\, {}^{j}T_{j+1} $$

a uvážením (14) obdržíme

$$ {}^{(j)}T' > {}^{(j+1)}T' . \tag{15} $$

Protože hraniční minima představují zároveň práce kompresoru (u něhož je počet stupňů menší než k), je možno nerovnost (11) též vyslovit větou: *Platí-li vztah* (14), *pak práce* ($j + 1$)*-stupňového kompresoru je menší než práce* j*-stupňového* (*při stejných ostatních podmínkách*).

LITERATURA

[1] *Bošek:* Odvození nejvýhodnějšího poměru dělících tlaků pro k-stupňovou kompresi, Aplikace matematiky, 1957, sv. 2. č. 1.

[2] *Chlumský:* Pístové kompresory, TVN, Praha 1952, str. 37.

Резюме

ВЫВОД САМЫХ ВЫГОДНЫХ ПАРЦИАЛЬНЫХ ДАВЛЕНИЙ ДЛЯ k-СТУПЕНЧАТОЙ КОМПРЕССИИ ПРИ ВСАСЫВАЮЩИХ ТЕМПЕРАТУРАХ, ОТЛИЧАЮЩИХСЯ В ОТДЕЛЬНЫХ СТУПЕНЯХ КОМПРЕССОРА

ФРАНТИШЕК ШУБАРТ (František Šubart)

(Поступило в редакцию 25/IV 1957 г.)

В статье определяется самое выгодное отношение парциальных давлений для k-ступенчатой компрессии, когда всасывающие температуры отличаются в отдельных ступенях. Вопрос, в сущности, заключается в определении абсолютного минимума функции (1).

В статье являются новыми производные отношения, важные по своему техническому значению, особенно уравнения (4), (5), (9).

Zusammenfassung

BESTIMMUNG DER GÜNSTIGSTEN STUFENDRÜCKE DER k-STUFIGEN VERDICHTUNG, WENN DIE SAUGTEMPERATUREN IN DEN EINZELNEN STUFEN VERSCHIEDEN SIND

FRANTIŠEK ŠUBART

(Eingegangen am 25. April 1957.)

In diesem Artikel wird die Bestimmung des günstigsten Stufendruckverhältnisses der k-stufigen Verdichtung behandelt. Dabei sind die Saugtemperaturen in den einzelnen Stufen verschieden. Es geht im Grunde um die Beurteilung des absoluten Minimums der Funktion (1).

Im Artikel werden einige neue, technisch bedeutende Formeln, besonders die Gleichungen (4), (5), (9) abgeleitet.