Václav Doležal

O některých základních větách teorie lineárních elektrických obvodů

Aplikace matematiky, Vol. 3 (1958), No. 4, 289–320

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102624`

O NĚKTERÝCH ZÁKLADNÍCH VĚTÁCH TEORIE LINEÁRNÍCH ELEKTRICKÝCH OBVODŮ

VÁCLAV DOLEŽAL

(Došlo dne 15. srpna 1957.) DT: 621.392.9

Článek je věnován exaktnímu studiu základních vlastností $2n$-pólu, útvaru, který má základní význam pro teorii lineárních elektrických obvodů.

Po zavedení potřebných pojmů jsou dokázány věty o vlastnostech impedanční resp. admitanční matice $2n$-pólu, některé věty o ekvivalenci a konečně jako speciální případ jsou vyšetřeny vlastnosti paralelního a seriového spojení dvojpólů.

Úvod

V teorii lineárních elektrických obvodů se soustředěnými parametry hraje důležitou roli pojem tzv. $2n$-pólu. Je to útvar, který vznikne vzájemným pospojováním konečného počtu odporů, kondensátorů, vlastních a vzájemných indukčností, při čemž je vyznačeno n párů spojovacích bodů tohoto útvaru, které nazýváme svorkami, pomocí kterých je možno připojiti vnější zdroje elektromotorické síly nebo prostřednictvím těchto svorek je možno $2n$-pól zapojit do nějakého zařízení. Poněvadž zpravidla nás převážně zajímá to, kterak se takový $2n$-pól chová navenek, tj. kterak ovlivní chod zařízení do kterého je zapojen, jeví se účelným definovati vhodné ,,charakteristiky", které takové chování plně popisují. Nejobecnějšími charakteristikami $2n$-pólu jsou tzv. admitanční a impedanční matice.

V literatuře, pojednávající o teorii obvodů, přestože běží spíše o matematický než fysikální předmět, není $2n$-pól řádně zaveden, a věty, které pro něj platí, jsou odvozeny polofysikálním způsobem. Úkolem této práce je odstraniti tento nedostatek.

Věnujme nejdříve několik slov tomu, jaký má účel vybudování teorie ryze deduktivní cestou.

Uvažujme, že máme předložen nějaký ve skutečnosti existující systém. Připojíme-li k takovému systému zdroje, ustálí se jednotlivá napětí a proudy systému na určitých hodnotách, které můžeme měřením s libovolnou přesností stanovit. Fysikální zkušenost nás učí, že tyto hodnoty jsou jednoznačně určeny parametry uvažovaného systému a soustavou připojených zdrojů. Kdybychom nyní chtěli stanovit výpočtem jednotlivá napětí a proudy při dané soustavě zdrojů zcela přesně, za respektování všech detailů, museli bychom vyjít z Maxwellových rovnic elektromagnetického pole. Avšak matematické řešení takto postaveného problému je i v jednoduchých případech systémů prakticky nemožné. Aby tedy vůbec bylo možno naznačené otázky zodpovědět alespoň s přesností, postačující pro praxi, je nutno problém idealisovat. Taková idealisace nás vede v prvé řadě k zavedení pojmu „soustředěného parametru". Je-li systém sestaven z odporníků, kondensátorů a cívek, mezi kterými eventuelně existují vzájemné induktivní vazby, vyslovíme ten předpoklad, že napětí na odporníku je úměrno proudu, napětí na kondensátoru integrálu a konečně napětí na cívce derivaci proudu, který jimi protéká. (Jak známo, konstanty úměrnosti nazývají se odpor, resp. kapacita resp. indukčnost.) Zkušenost ukazuje, že tento předpoklad je, aspoň v určitém kmitočtovém rozmezí s dostatečnou přesností splněn. Dále připustíme též existenci vodičů, na kterých není napětí, ať jimi protéká jakýkoliv proud. Takovýmito vodiči myslíme si pak vzájemně pospojovány jednotlivé elementy vyšetřovaného systému. Sledujeme-li, kterak se právě zavedená idealisace projeví ve formulaci problému, dospějeme z Maxwellových rovnic ke známým Kirchhoffovým zákonům. Možno tedy na Kirchhoffovy zákony pohlížet jako na výsledek jistého limitního procesu.

Tímto způsobem dospěli jsme od skutečného systému k nějakému „limitnímu" systému, který s jistou přesností vystihuje skutečnost. Je však přirozené, že takto sestrojený idealisovaný systém nemusí mít tytéž obecné vlastnosti, jako systém původní, to znamená, že naprosto není možno spolehnout se na nějaký „fysikální cit". Uvažme jen následující triviální příklad. Jsou-li dva vodiče o odporech ϱ, 2ϱ, $\varrho > 0$ spojeny paralelně, budou proudy v jednotlivých vodičích v poměru $2 : 1$. Vyskytuje-li se takové paralelní spojení v nějakém skutečném obvodu a jsou-li ostatní jeho parametry značně větší než ϱ, pak provedeme-li idealisaci (tj. klademe-li $\varrho = 0$), snadno zjistíme, že potom formulaci idealisovaného případu vyhovuje libovolný poměr.

Všimněme si nyní následujícího faktu. V literatuře, pojednávající o teorii obvodů, jsou obecné vlastnosti idealisovaných systémů odvozeny tím způsobem, že se vhodná vlastnost skutečného systému dodatečně postuluje i pro systém idealisovaný, ačkoli není nikterak patrno, je-li to vůbec přípustné. (Např. princip o zachování energie.) Jedinou výhodou tohoto způsobu „důkazů" vlastností idealisovaných systémů je to, že důkaz je poměrně jednoduchý. Nyní se však může stát, že v některém konkrétním případě analysy skutečného systému za pomoci takto odvozených fakt dojdeme k závěrům, které budou v rozporu s naším očekáváním. Kde máme pak hledat chybu, v teorii nebo v předpokladech?

Z tohoto důvodu je tedy účelné vypracovat teorii idealisovaných systémů ryze deduktivním způsobem, tak jak je to provedeno dále. Hlavním předmětem naší teorie bude $2n$-pól, jak už jsme poznamenali výše. Soustředíme se převážně jen na jeho vlastnosti zásadního rázu, čímž potvrdíme platnost některých „polofysikálně" odvozených vět a dokážeme několik tvrzení, kterých se v teorii obvodů intuitivně používá.

Část I.

Než přistoupíme k problematice, kterou se hodláme zabývat, bude vhodné zavésti pojem „semipositivní matice" a vyšetřit její vlastnosti.

Označme Γ množinu všech komplexních čísel, která mají reálnou část kladnou, $\bar{\Gamma}$ buď její uzávěr.

Řekneme, že čtverečná matice $[Z_{ik}]$ n-tého řádu je semipositivní, jestliže:

1) všechny prvky Z_{ik} jsou racionálními funkcemi komplexní proměnné p s reálnými koeficienty,

2) pro každé $i, k \leqq n$ je $Z_{ik} = Z_{ki}$,

3) pro každý systém reálných čísel $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ a pro každé $p \in \Gamma$, které není pólem žádné Z_{ik}, platí

$$\operatorname{Re} \sum_{ik} Z_{ik} x_i x_k \geqq 0 .$$

Systém všech semipositivních matic n-tého řádu budeme značit $\mathfrak{S}_n$.

Jestliže nějaká matice $[Z_{ik}]$ n-tého řádu kromě bodů 1) 2) splní dokonce podmínku

3a) pro každý nenulový systém reálných čísel $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ a pro každé $p \in \Gamma$, které není pólem žádné Z_{ik}, je

$$\operatorname{Re} \sum_{ik} Z_{ik} x_i x_k > 0 ,$$

nazveme $[Z_{ik}]$ „positivní maticí".

Systém takových matic značíme $\mathfrak{P}_n$. Zřejmě $\mathfrak{P}_n \subset \mathfrak{S}_n$.

Dokažme na tomto místě následující lemma, které budeme později potřebovat:

Lemma 1. *Buď $[w_{ik}]$ symetrická matice komplexních čísel. Nutnou a postačující podmínkou, aby pro každý systém reálných čísel $\{x_i\}$ platilo* $\operatorname{Re} \sum_{ik} w_{ik} x_i x_k \geqq$ $\geqq 0$, *je* $\operatorname{Re} \sum_{ik} w_{ik} z_i \bar{z}_k \geqq 0$ (1)

pro každý systém komplexních čísel $\{z_i\}$.

D ů k a z: Že (1) je postačující podmínkou, je jasné. Dokažme tedy nutnost! Zvolme systém $\{z_i\}$ a buď $z_i = x_i + iy_i$. Pak je

$$\sum_{ik} w_{ik} z_i \bar{z}_k = \sum_{ik} w_{ik} \{(x_i x_k + y_i y_k) + i(x_k y_i - x_i y_k)\} .$$

Zřejmě však $\sum_{ik} w_{ik}(x_k y_i - x_i y_k) = 0$, odkud vyplývá tvrzení lemmatu.

Lemma 2. *Buďte* $[Z^{(1)}_{ik}] \in \mathfrak{S}_n$, $[Z^{(2)}_{je}] \in \mathfrak{S}_m$. *Sestrojme matici* $[Z_{ik}]$ *takto*:

$$\begin{aligned} Z_{ik} &= Z^{(1)}_{ik} && \textit{pro} && 1 \leqq i, k \leqq n\,, \\ Z_{ik} &= Z^{(2)}_{i-n,\,k-n} && \textit{pro} && n+1 \leqq i, k \leqq n+m\,, \\ Z_{ik} &= Z_{ki} = 0 && \textit{pro} && i > n\,,\ k < n+1\,. \end{aligned}$$

Pak $[Z_{ik}] \in \mathfrak{S}_{n+m}$.

Důkaz je zřejmý.

Podívejme se nyní na to, jak jsou rozloženy póly funkcí Z_{ik}, je-li $[Z_{ik}] \in \mathfrak{S}_n$. K tomu cíli všimneme si nejprve systému $\mathfrak{S}_1$. Každý element ze $\mathfrak{S}_1$ je matice, tvořená jedním prvkem a možno tedy klásti $f \equiv [f] \in \mathfrak{S}_1$. Snadno lze dokázat následující tvrzení: Je-li $f \in \mathfrak{S}_1$, pak f nemá pólů v Γ. Má-li f pól na imaginární ose nebo v bodě ∞, pak je jednoduchý. Vskutku, kdybychom předpokládali opak, snadno bychom nalezli bod $p_0 \in \Gamma$ tak, že by $\operatorname{Re} f(p_0) < 0$, což by byl spor s předpokladem (srv. [1]). Je tedy f holomorfní funkcí v Γ. Odtud plyne pak snadno použitím věty o minimu reálné části holomorfní funkce toto:

Je-li $f \in \mathfrak{S}_1$, pak buď $f \in \mathfrak{P}_1$ nebo $f \equiv 0$.[1])

Buď nyní $[Z_{ik}] \in \mathfrak{S}_n$. Zřejmě pak dle definice pro každý systém reálných čísel $\{x_i\}$ je $\Phi = \sum_{ik} Z_{ik} x_i x_k \in \mathfrak{S}_1$. Položíme-li specielně $x_r = 1$, $x_i = 0$ pro $i \neq r$, máme $Z_{rr} \in \mathfrak{S}_1$. Zvolme nyní indexy r, q, $1 \leqq r, q \leqq n$, $r \neq q$ a klaďme $x_r = x_q = 1$, $x_i = 0$ pro $i \neq r, q$. Pak je $\Phi_{rq} = Z_{rr} + Z_{qq} + 2Z_{rq}$. Odtud vyplývá, že funkce Z_{rq} je v Γ holomorfní a že případný její pól na imaginární ose nebo v ∞ je jednoduchý, neboť Φ_{rq}, Z_{rr}, $Z_{qq} \in \mathfrak{S}_1$ a proto mají tuto vlastnost.

Podívejme se nyní na tu okolnost, je-li pro nějaké r, $1 \leqq r \leqq n$, $Z_{rr} \equiv 0$. Potom musí být $Z_{ri} \equiv 0$ pro všechna i. Vskutku, zvolme $p \in \Gamma$, $i \neq r$ a klaďme $x_k = 0$ pro $k \neq r, i$. Pak dle definice je $\operatorname{Re} Z_{ri}(p)\, x_i x_r + \operatorname{Re} Z_{ii}(p)\, x_i^2 \geqq 0$. Odtud je zřejmé, že musí být $\operatorname{Re} Z_{ri}(p) = 0$, neboť v opačném případě by bylo možno najít čísla x_i, x_r tak, že by předchozí nerovnost nebyla splněna. Ježto ale Z_{ri} je v Γ holomorfní funkcí, která nabývá reálných hodnot pro p reálná, je $Z_{ri} \equiv 0$.

Odvodili jsme tedy větu:

Věta 1. *Buď* $[Z_{ik}] \in \mathfrak{S}_n$. *Pak*

a) *každá funkce* Z_{ik} *nemá póly v* Γ *a případné její póly na imaginární ose nebo v* ∞ *jsou jednoduché,*

---

[1]) Vskutku, buď $f \in \mathfrak{S}_1$ a nechť existuje aspoň jeden bod $p_0 \in \Gamma$ tak, že $\operatorname{Re} f(p_0) = 0$. Sestrojme kružnici K se středem v bodě p_0, která celá leží v Γ. Označme $m = \min_{p \in K} \operatorname{Re} f(p)$. Zřejmě $m \geqq 0$. Předpokládejme nyní, že $f \not\equiv$ konst. Pak dle věty o minimu je $m < \operatorname{Re} f(p_0) = 0$, což je spor. Nutně tedy $\operatorname{Re} f(p) \equiv 0$. Ježto f je v Γ holomorfní, plyne z podmínek C. R., že $\operatorname{Im} f(p) \equiv$ konst. Poněvadž však f nabývá reálných hodnot na reálné ose, je $\operatorname{Im} f(p) \equiv 0$ a tedy též $f \equiv 0$. Tím je tvrzení dokázáno.

b) *pro každé i je buď $Z_{ii} \in \mathfrak{P}_1$ nebo $Z_{ii} \equiv 0$,*

c) *je-li $Z_{rr} \equiv 0$ pro některé r, je $Z_{ri} \equiv 0$ pro všechna i.*

Dokažme nyní následující

Věta 2. *Buď $[Z_{ik}] \in \mathfrak{S}_n$ a nechť* $\det [Z_{ik}] \not\equiv 0$.
Pak $[Z_{ik}] \in \mathfrak{P}_n$.

Důkaz: Buď tedy $[Z_{ik}] \in \mathfrak{S}_n$, $\det [Z_{ik}] \not\equiv 0$ a předpokládejme, že existuje $p_0 \in \Gamma$ a nenulový systém reálných čísel $\{\tilde{x}_i\}$ tak, že

$$\mathrm{Re} \sum_{ik} Z_{ik}(p_0)\, \tilde{x}_i \tilde{x}_k = 0 \,.$$

Označme $\Phi = \sum_{ik} Z_{ik}(p)\, \tilde{x}_i \tilde{x}_k$. Ježto $\Phi \in \mathfrak{S}_1$, je buď $\Phi \in \mathfrak{P}_1$ nebo $\Phi \equiv 0$. Poněvadž však $\mathrm{Re}\, \Phi(p_0) = 0$, je $\Phi \equiv 0$.

Pro každé $p \in \Gamma$ je tedy $\mathrm{Re}\, \Phi(p) = 0$, takže podle věty o singulárních kvadratických formách nutně je $\det [\mathrm{Re}\, Z_{ik}(p)] = 0$ pro každé $p \in \Gamma$. Avšak $\det [\mathrm{Re}\, Z_{ik}(p)] = \det [Z_{ik}(p)]$ pro každé p reálné, a ježto $\det [Z_{ik}(p)]$ je holomorfní funkcí v Γ, plyne odtud, že $\det [Z_{ik}(p)] \equiv 0$, což je hledaný spor.

Část II.

Než přistoupíme k zavedení $2n$-pólu, je nutno definovat pojem sítě a vyšetřiti některé jeho vlastnosti. Taková fysikální síť je utvořena vzájemným pospojováním základních elementů a my se zajímáme o chování tohoto systému, působí-li ve větvích nějaké elektromotorické síly. Přitom zpravidla předpokládáme, že kmitočet všech vložených elektromotorických sil je stejný a je obecně roven nějakému komplexnímu číslu. Abychom popsali, jak jsou elementy pospojovány, nebo jinak řečeno, abychom popsali strukturu sítě, použijeme pojmu grafu. Zastavíme se proto nejdříve u pojmu grafu, ukážeme na některé jeho vlastnosti (ostatně dobře známé) a pak teprve vyslovíme definici abstraktní sítě.

Řekneme, že je dán normální graf G, je-li dána konečná neprázdná množina $V = \{v_1, v_2, \dots v_r\}$, jejíž prvky nazveme větvemi, dále konečná neprázdná množina $U = \{u_1, u_2, \dots u_s\}$, jejíž prvky nazveme uzly, při čemž každé $v_k \in V$ je přiřazena právě jedna uspořádaná dvojice (u_{i_k}, u_{j_k}), $u_{i_k} \neq u_{j_k}$, $u_{i_k}, u_{j_k} \in U$. Uzel u_{i_k}, u_{j_k} nazveme začátečním, resp. koncovým uzlem větve v_k. Přitom předpokládáme, že ke každému $u_e \in U$ existuje aspoň jedna větev $v \in V$ tak, že u_e je jejím začátečním nebo koncovým uzlem.

Dále zaveďme tyto pojmy:

Výraz $K = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i$, kde α_i jsou reálná čísla, nazveme větvovým komplexem, analogicky výraz $\sum_{i=1}^{s} \beta_i u_i$ uzlovým komplexem.

Je-li $K = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k v_k$ větvový komplex, pak uzlový komplex $K^{\cdot} = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \cdot$ $\cdot (u_{j_k} - u_{i_k})$ nazveme „hranicí komplexu K“.

Bude-li $K^{\cdot} = 0$, nazveme K „cyklem“.

Bude-li $K^{\cdot} = u_\beta - u_\alpha$, nazveme K „cestou mezi uzly u_α, u_β.“

Jestliže pro $u_\alpha, u_\beta \in U$ existuje cesta mezi nimi, budeme říkat, že uzly u_α, u_β jsou ekvivalentní na grafu G a budeme to značit $u_\alpha \sim u_\beta$.

Uveďme zde následující lemma, které budeme později potřebovat:

Lemma 3. *Je-li K větvový komplex a je-li $K^{\cdot} = \beta u_\sigma + \gamma u_\nu$, pak $\gamma = -\beta$.*

Důkaz, který lze provésti úplnou indukcí, čtenář snadno nahlédne.

Pro další úvahy jeví se účelným zavésti representaci normálního grafu maticí. Nechť jako prve značí r počet větví normálního grafu G, s počet jeho uzlů. Definujme r-řádkovou s-sloupcovou matici a (která se též nazývá strukturální maticí grafu G) takto:

Prvek a_{ik}, stojící v i-tém řádku a k-tém sloupci klaďme

1) $a_{ik} = 1$, je-li u_k koncovým uzlem větve v_i,

2) $a_{ik} = -1$, je-li u_k začátečním uzlem větve v_i,

3) $a_{ik} = 0$, jestliže u_k není ani začátečním, ani koncovým uzlem větve v_i.

Je zřejmé, že případy $1 \div 3$ se navzájem vylučují. Z definice matice a vyplývá, že každý její řádek obsahuje právě jeden prvek 1, právě jeden prvek -1 a ostatní jsou nuly. Tato vlastnost je pro strukturální matici charakteristická. Zřejmě totiž ke každé matici této vlastnosti existuje právě jeden normální graf (přesněji, jediný systém vzájemně isomorfních grafů) tak, že jeho strukturální matice je rovna matici dané.

Pro zjednodušení vyjadřování zavedeme další matice.

Buď

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_r \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_s \end{bmatrix}, \quad v_i \in V, \quad u_i \in U.$$

Je-li $K = [K_{ik}]$, kde prvky K_{ik} jsou větvové komplexy, označme $K^{\cdot} = [K^{\cdot}_{ik}]$.

Pomocí této symboliky zřejmě možno psát:

$$v^{\cdot} = au. \tag{2}$$

Buď dále $K = \sum_{i=1}^{r} c_i v_i$ nějaký komplex.

Položíme-li $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix}$, můžeme napsat

$$[K] = c'v. \tag{3}$$

Stane-li se, že K je cykl, plyne z (2) a (3):

$$[K^{\cdot}] = [0] = c'v^{\cdot} = c'au\ .$$

Poněvadž ale prvky vektoru u jsou lineárně nezávislé, je $c'a = 0$, tj. $a'c = 0$.

Označme $x_1, x_2, \ldots, x_m$ nějakou úplnou soustavu lineárně nezávislých reálných řešení rovnice $a'x = 0$. Je-li

$$x_k = \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_r^k \end{bmatrix},\ \text{klaďme}\ X = [x_i^k]\ .$$

(což tedy je m-sloupcová r-řádková matice). Zřejmě X je maximální hodnosti a platí $a'X = 0$.

Jak známo z algebry, platí následující tvrzení:

Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby vektor x byl řešením rovnice $a'x = 0$ je, aby x bylo možno vyjádřit ve tvaru $x = Xy$, kde y je nějaký vektor (m-řádkový).

Z uvedeného například vyplývá, že m-řádkový vektor $X'v$ má za prvky úplnou soustavu lineárně nezávislých cyklů.

Vyslovme nyní definici sítě (přesněji „pasivní sítě se soustředěnými parametry.“).

Řekneme, že je dána síť S, je-li dán normální graf G a je-li každé dvojici jeho větví v_i, v_k přiřazena funkce Z_{ik} komplexní proměnné p, přičemž matice $[Z_{ik}] \in \mathfrak{S}_r$ (rozumí se, že matice je utvořena pro všechna i, k).

Matici $Z = [Z_{ik}]$ budeme nazývat charakteristickou maticí sítě S.

Fysikální smysl matice Z tkví v tom, že popisuje vzájemné elektrické vlastnosti dvojic větví sítě. Je-li například mezi prvou a druhou větví induktivní vazba, jejíž velikost je dána koeficientem vzájemné indukčnosti M_{12}, bude $Z_{12} = M_{12}p$. Jsou-li v prvé větvi zařazeny v serii odpor R_{11}, indukčnost L_{11} a kapacita C_{11}, bude $Z_{11} = R_{11} + L_{11}p + \dfrac{1}{C_{11}p}$. Všimněme si na tomto místě blíže toho, proč jsme v definici sítě axiomaticky přijali požadavek $Z \in \mathfrak{S}_r$. Ježto máme na mysli sítě pasivní, tj. takové, které samy nevyrábějí elektrickou energii, má charakteristická matice Z tvar

$$Z = R + pL + \frac{1}{p}\,H\ , \tag{4}$$

kde R, L, H jsou číselné matice. Přitom R, H jsou matice diagonální, jejichž všechny prvky hlavní diagonály jsou nezáporné, takže R, $H \in \mathfrak{S}_r$. Matice $L = [L_{ik}]$ není obecně diagonální, neboť v síti mohou existovat vzájemné induktivní vazby mezi jednotlivými větvemi. Tekou-li však větvemi $v_1 \div v_r$ okamžité proudy $I_1 \div I_r$, je magnetická energie sítě dána formou $\frac{1}{2}\sum\limits_{ik} L_{ik} I_i I_k$.

Tato energie musí však být nezáporná pro libovolnou soustavu $I_1 \div I_r$, takže $L \in \mathfrak{S}_r$. Odtud ale je zřejmé, že $Z \in \mathfrak{S}_r$.

Poněvadž požadavek, aby Z byla speciálního tvaru (4) je pro další výstavbu teorie nepodstatný, budeme z důvodů obecnosti předpokládat pouze $Z \in \mathfrak{S}_r$.

Vraťme se opět k matematické stránce věci. Nechť r opět značí počet větví grafu sítě S.

Řekneme, že pár číselných r-tic $\{[E_1, E_2, \dots E_r]; [I_1, I_2, \dots I_r]\}$ je přípustný pro některé $p \in \Gamma$ pro síť S, jsou-li splněny tyto podmínky:

1) Pro každý cykl $K = \sum_i c_i v_i$ je

$$\sum_i c_i E_i = \sum_{ik} c_i Z_{ik}(p)\, I_k\,. \tag{P1}$$

2) Pro $k = 1, 2, \dots s$ (počet uzlů G) je

$$\sum_i a_{ik} I_i = 0\,. \tag{P2}$$

Fysikálně vyjadřují podmínky P1, P2 splnění „Kirchhoffových zákonů" pro systém elektromotorických sil $E_1, \dots E_r$ a systém proudů $I_1, \dots I_r$ (elektromotorická síla E_k působí ve větvi v_k, I_k je proud tekoucí touto větví). Tak podmínka P1 značí, že součet elektromotorických sil v libovolném okruhu sítě je roven součtu úbytků, P2 pak vyjadřuje tu okolnost, že součet proudů tekoucích do libovolného uzlu sítě je nulový.

Pomocí matic lze podmínky P1, P2 zapsat v přehlednějším tvaru: K tomu cíli zaveďme vektory

$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_r \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_r \end{bmatrix}.$$

P1 možno pak formulovat takto: Pro všechna c, pro něž $a'c = 0$ je $c'E = c'ZI$. Jak bylo shora uvedeno, taková c možno vyjádřit ve tvaru $c = Xy$, tj. pro všechna y musí platit $y'X'(E - ZI) = 0$, takže $X'(E - ZI) = 0$.

P2 možno pak zřejmě psát ve tvaru $a'I = 0$.

Možno tedy „přípustnost" páru v maticové terminologii vyjádřit v následující ekvivalentní formě:

Řekneme, že pár $\{E'; I'\}$ je pro $p \in \Gamma$ přípustný pro síť S, platí-li pro toto p

$$X'(E - ZI) = 0 \tag{P I.}$$

$$a'I = 0 \tag{P II.}$$

Pak platí následující

Věta 3. *Buďte pro $p \in \Gamma$ $\{E_1'; I_1'\}$, $\{E_2'; I_2'\}$ přípustné páry pro síť S. Pak platí $I_1'E_2 = I_2'E_1$.*

Důkaz: Ježto $\{E_1'; I_1'\}$, $\{E_2'; I_2'\}$ jsou přípustné páry, jsou splněny následující rovnosti

$$X'(E_1 - ZI_1) = 0\,, \tag{5}$$

$$a'I_1 = 0\,, \tag{6}$$

$$X'(E_2 - ZI_2) = 0\,, \tag{7}$$

$$a'I_2 = 0\,. \tag{8}$$

Jak bylo poznamenáno výše, z rovnosti (6) plyne, že existuje vektor y_1 tak, že $I_1 = Xy_1$. Analogicky z (8) vyplývá existence vektoru y_2, pro který $I_2 = Xy_2$. Násobíme-li (5) vektorem y_2', máme

$$y_2'XE_1 = y_2'X'ZI_1\,,\quad \text{tj.}\quad I_2'E_1 = I_2'ZJ_1\,. \tag{9}$$

Stejným způsobem ze (7) plyne

$$I_1'E_2 = I_1'ZI_2\,. \tag{10}$$

Odečtením rovností (9) a (10) máme

$$I_2'E_1 - I_1'E_2 = I_2'ZI_1 - I_1'ZI_2\,. \tag{11}$$

Obě matice, stojící na pravé straně (11), jsou prvého řádu, tj. platí například $I_1'ZI_2 = (I_1'ZI_2)' = I_2'Z'I_1$. Ježto ale $Z' = Z$, je pravá strana (11) rovna nule, čímž je věta dokázána.

V elektrotechnice je důležitý speciální případ věty 3, známý pod jménem „theorém reciprocity“.

Věta 3a. *Buďte pro* $p \in \Gamma\{[0, \ldots, 0, \underset{i-\text{té místo}}{1}, 0 \ldots 0]; [I_1^i, I_2^i, \ldots, I_r^i]\}$ *a* $\{[0, \ldots, 0, \underset{k-\text{té místo}}{1}, 0, \ldots, 0]; [I_1^k, I_2^k, \ldots, I_r^k]\}$ *přípustné páry pro síť* S. *Pak platí* $I_i^k = I_k^i$.

Dokažme nyní následující

Věta 4. *Buď* $\{[E_1, E_2, \ldots, E_r]; [I_1, I_2, \ldots, I_r]\}$ *pro některé* $p \in \Gamma$ *přípustný pár sítě* S. *Pak platí*

$$\operatorname{Re} \sum_{i=1}^{r} E_i \bar{I}_i \geqq 0\,. \tag{12}$$

Důkaz: Zaveďme vektory E, I jako prve. Pak platí rovnosti $X'E = X'ZI$, $a'I = 0$. Existuje tedy vektor y tak, že $I = Xy$. Násobíme-li prvou rovnost $\bar{y}'$, máme $\bar{y}'X'E = \bar{y}'X'ZI$, tj. $\bar{I}'E = \bar{I}'ZI$. Ježto ale $Z \in \mathfrak{S}_r$, pak podle lemma 1 je $\operatorname{Re} \bar{I}'ZI \geqq 0$, čímž je věta dokázána.

Všimněme si zde fysikálního smyslu předchozí věty! Jak známo, protéká-li generátorem o elektromotorické síle E proud I, je výkon, který generátor dodává, roven $\operatorname{Re} E\bar{I}$. Věta 4 tedy tvrdí, že veškerý výkon, který dodávají generátory do sítě, je nezáporný. To je v souhlase s tím faktem, že uvažovaná síť je pasivní, tj. že sama nevyrábí elektrickou energii.

Nyní můžeme přikročit k zavedení $2n$-pólu.

Řekneme, že je dán $2n$-pól, je-li dána síť S a je-li vyznačeno n uspořádaných dvojic $(u_1^{(k)}, u_2^{(k)})$, $u_1^{(k)} \neq u_2^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ jejího grafu G. Dvojici $(u_1^{(k)}, u_2^{(k)})$ nazveme k-tým párem svorek, uzel $u_1^{(k)}$, $u_2^{(k)}$ začáteční resp. koncovou svorkou k-tého páru.

Jak jsme uvedli v úvodu, lze některým $2n$-pólům (zpravidla každému $2n$-pólu, který má praktický význam) přiřaditi jisté charakteristiky, které popisují jejich chování navenek. Takové $2n$-póly budeme nazývat „regulární“.[2]) Abychom mohli regularitu definovat, zavedeme pomocný pojem, tzv. „sítě, přidružené $2n$-pólu“. Je to síť (v námi zavedeném slova smyslu), která je jistým způsobem sestrojena na základě sítě $2n$-pólu.

Buď tedy dán $2n$-pól sítí S a n páry svorek. (Zde i v dalším vyhradíme písmeno „n“ k označení počtu párů svorek.) Označme $v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots, v_{n+r}$ větve příslušného grafu G a buď dále Z_{ik}, $n + 1 \leqq i, k \leqq n + r$ funkce, přiřazená dvojici větví v_i, v_k.

Sestrojme nyní síť $\tilde{S}$ takto:

1) Sestrojme graf $\tilde{G}$ tak, že doplníme graf G větvemi $v_1, v_2, \ldots, v_n$, přičemž začátečním uzlem větve v_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ bude svorka $u_1^{(k)}$, koncovým svorka $u_2^{(k)}$.

2) Dvojici větví v_i, v_k grafu $\tilde{G}$ přiřaďme funkci $\tilde{Z}_{ik} = Z_{ik}$, je-li $n + 1 \leqq \leqq i, k \leqq n + r$, $\tilde{Z}_{ik} = 0$ je-li $1 \leqq i \leqq n$ nebo $1 \leqq k \leqq n$.

Poznamenejme, že podle lemma 2 je $[\tilde{Z}_{ik}] \in \mathfrak{S}_{n+r}$, takže $\tilde{S}$ bude sítí v našem smyslu.

Takto sestrojenou síť $\tilde{S}$ nazveme „přidruženou sítí $2n$-pólu“. (Že síť je přidružená k nějakému $2n$-pólu, budeme v dalším označovat vždy vlnovkou.)

Regularitu zavedeme takto:

Řekneme, že $2n$-pól je regulární, je-li splněna následující podmínka A nebo B:

A) Pro každé $p \in \Gamma$ a pro každou n-tici čísel $[E_1, E_2, \ldots, E_n]$ existuje právě jedna n-tice čísel $[I_1, I_2, \ldots, I_n]$ a čísla $I_{n+1}, I_{n+2}, \ldots, I_{n+r}$ tak, že pár $\{[E_1, E_2, \ldots, E_n, 0, \ldots, 0]; [I_1, I_2, \ldots, I_n, I_{n+1}, \ldots, I_{n+r}]\}$ je přípustný pro síť $\tilde{S}$.

V tomto případě budeme říkat, že $2n$-pól je A-regulární.

B) Pro každé $p \in \Gamma$ a pro každou n-tici čísel $[I_1, I_2, \ldots, I_n]$ existuje právě jedna n-tice čísel $[E_1, E_2, \ldots, E_n]$ a čísla $I_{n+1}, I_{n+2}, \ldots, I_{n+r}$ tak, že pár $\{[E_1, E_2, \ldots, E_n, 0, \ldots, 0]; [I_1, I_2, \ldots, I_n, I_{n+1}, \ldots, I_{n+r}]\}$ je přípustný pro síť $\tilde{S}$.

Zde říkáme, že $2n$-pól je W-regulární.

Zastavme se na chvíli u fysikálního významu této definice. Je-li $2n$-pól A-regulární, značí to, že pak lze připojit ke každému páru svorek zdroj elektro-

[2]) Poznamenejme, že skutečně existují $2n$-póly, které nejsou regulární. Snadno se přesvědčíme na následujícím triviálním příkladě, že čtyřpól s páry svorek (u_1, u_2), (u_3, u_4) popsaný rovnostmi $\dot{v}_1 = u_4 - u_1$, $\dot{v}_2 = u_3 - u_2$, $Z_{11} = Z_{22} = Z_{12} = 0$ není regulární. Takové $2n$-póly nazývají se v literatuře „degenerované“, nebo „Ausnahmefälle“ (Cauer).

motorické síly jakékoli velikosti (ovšem všechny elektromotorické síly mají stejný kmitočet) a tím budou jednoznačně stanoveny proudy, které tyto zdroje vtlačí do $2n$-pólu.

Podobná situace je v případě, kdy $2n$-pól je W-regulární.

Označme $E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$. Pak platí důležitá

Věta 5. *Je-li $2n$-pól A-regulární, pak pro každé $p \in \Gamma$ existuje jediná matice A tak, že $I = AE$. Přitom je $A \in \mathfrak{S}_n$. Matice A sluje „admitanční matice".*

Je-li $2n$-pól W-regulární, pak pro každé $p \in \Gamma$ existuje jediná matice W tak, že $E = WI$. Přitom $W \in \mathfrak{S}_n$. Matice W sluje „impedanční mat ice".

Důkaz: Nechť tedy $2n$-pól je A-regulární. Zvolme nějaké $p \in \Gamma$ a zafixujme je pro další úvahu. Snadno dokážeme existenci matice A. K tomu cíli poznamenejme, že zřejmě platí následující tvrzení:

Jsou-li

$$\{[E_1, E_2, \ldots, E_{n+r}];\quad [I_1, I_2, \ldots, I_{n+r}]\}$$

a

$$\{[E_1', E_2', \ldots, E_{n+r}'];\quad [I_1', I_2', \ldots, I_{n+r}']\} \tag{13}$$

přípustné páry sítě $\tilde{S}$, α číslo, pak též

$$\{[E_1 + E_1', E_2 + E_2', \ldots, E_{n+r} + E_{n+r}'];\quad [I_1 + I_1', I_2 + I_2', \ldots, I_{n+r} + I_{n+r}']\}$$

a

$$\{[\alpha E_1, \alpha E_2, \ldots, \alpha E_{n+r}];\quad [\alpha I_1, \alpha I_2, \ldots, \alpha I_{n+r}]\} \tag{14}$$

jsou přípustné páry pro $\tilde{S}$.

Buď $\begin{bmatrix} I_1^k \\ I_2^k \\ \vdots \\ I_n^k \end{bmatrix}$ vektor, sestavený z čísel I_i, která podle předpokladu jednoznačně

existují k vektoru $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *k-té místo.* Označíme-li $I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$ vektor, příslušející ně-

jakému vektoru $E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix}$, pak, ježto je $E = E_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + E_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + E_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, platí podle hořejší poznámky, že též vektor

$$I^* = E_1 \begin{bmatrix} I_1^1 \\ I_2^1 \\ \vdots \\ I_n^1 \end{bmatrix} + E_2 \begin{bmatrix} I_1^2 \\ I_2^2 \\ \vdots \\ I_n^2 \end{bmatrix} + \dots + E_n \begin{bmatrix} I_1^n \\ I_2^n \\ \vdots \\ I_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1^1 & I_1^2 & \dots & I_1^n \\ I_2^1 & I_2^2 & \dots & I_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ I_n^1 & I_n^2 & \dots & I_n^n \end{bmatrix} . E$$

bude příslušet vektoru E. Ježto ale takový vektor existuje jen jeden, nutně je $I^* = I$. Je tedy $I = [I_i^k]\, E$, čímž je existence matice $A = [A_{ik}] = [I_i^k]$ prokázána.

Ukažme nyní, že matice A je symetrická. Vskutku, ježto pro každé $1 \leqq k \leqq \leqq n$ je

$$\{[0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]; \ [I_1^k, I_2^k, \dots, I_n^k, I_{n+1}^k, \dots I_{n+r}^k]\}$$

přípustný pár pro síť $\tilde{S}$, platí podle věty 3a pro každou dvojici indexů q, s, $1 \leqq q, s \leqq n : I_s^q = I_q^s$, tj. $A_{sq} = A_{qs}$.

Dokažme nyní, že $\operatorname{Re} \sum_{ik} A_{ik} x_i x_k \geqq 0$ pro každou soustavu reálných čísel $\{x_i\}$. Zvolme libovolně vektor E a určeme příslušný vektor $I = AE$. Pak platí $\bar{E}'I = \bar{E}'AE = \sum_{i,k \leqq n} A_{ik} E_i \bar{E}_k$. Nechť $I_{n+1}, \dots, I_{n+r}$ jsou ta čísla, příslušná dle definice vektoru E, pro něž $\{[E_1, \dots, E_n, 0, \dots, 0]; [I_1, \dots, I_n, I_{n+1}, \dots, I_{n+r}]\}$ je přípustným párem pro $\tilde{S}$.

Podle věty 4 pak platí

$$\operatorname{Re} \bar{E}'I = \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{n} \bar{E}_i I_i = \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{n+r} E_i \bar{I}_i \geqq 0, \tag{15}$$

čímž je v důsledku platnosti lemmatu 1 tvrzení dokázáno. Poněvadž číslo p jsme volili libovolně, platí dokázaná tvrzení pro všechna $p \in \Gamma$.

Zbývá dokázat, že prvky A_{ik} jsou racionálními funkcemi p s reálnými koeficienty. K tomu cíli označme

$$\tilde{I}' = [I_1, I_2, \dots, I_n, I_{n+1}, \dots, I_{n+r}] \,, \ \tilde{E}' = [E_1, \dots, E_n, 0, \dots, 0] \,.$$

Je-li $\{\tilde{E}'; \tilde{I}'\}$ přípustný pár pro $\tilde{S}$ pro nějaké $p \in \Gamma$, pak jsou splněny podmínky P1, P2:

$$X'\tilde{Z}\tilde{I} = X'\tilde{E} \tag{16}$$

$$a'\tilde{I} = 0 \,.$$

Označme $\begin{bmatrix} X'\tilde{Z} \\ a' \end{bmatrix} = H(p)$, $\begin{bmatrix} X'E \\ 0 \end{bmatrix} = E^*$ a (16) můžeme zapsat ve tvaru

$$H(p)\, \tilde{I} = E^* \,. \tag{17}$$

Pohlížejme nyní na (17) jako na systém rovnic a sledujme jeho řešení podle proměnných $I_1, \dots, I_n$ v závislosti na p.

Předně víme podle předpokladu A-regularity, že pro každé $p \in \Gamma$ a každou soustavu $E_1, \ldots, E_n$ řešení systému (17) existuje.

Označme $h = \max_{p \in \Gamma} \operatorname{rank} H(p)$ a buď $\Gamma^* = \mathop{\mathsf{E}}_{p \in \Gamma} [\operatorname{rank} H(p) = h]$. Snadno nahlédneme, že Γ^* je otevřená množina. Vskutku, zvolme $p_0 \in \Gamma^*$. Pak existuje submatice $K(p_0)$ h-tého řádu matice $H(p_0)$, pro kterou je $\det K(p_0) \neq 0$. Ježto prvky matice $H(p)$ jsou v Γ holomorfní a tedy též spojité funkce p, je i $\det K(p)$ spojitou funkcí. Existuje tedy okolí $U(p_0)$ bodu p_0 tak, že $\det K(p) \neq 0$ pro $p \in U(p_0)$, takže $U(p_0) \subset \Gamma^*$, což bylo dokázat.

Hledejme nyní řešení (17) podle proměnných $I_1, \ldots, I_n$. Zvolme tedy $p_0 \in \Gamma^*$. Pak lze vybrat ze (17) právě h rovnic, které jsou lineárně nezávislé a ostatní jsou jejich kombinacemi. Obecně takový výběr V_1 nebude jediný. Který výběr zvolíme, bude ihned patrno z dalšího. Označme $\tilde{H}_{p_0}(p_0)$ matici koeficientů takto vybrané soustavy, $\tilde{E}_{p_0}$ vektor pravých stran. (Je tedy $\tilde{E}_{p_0}$ submaticí vektoru E^* a tudíž její prvky jsou lineárními kombinacemi prvků $E_1, \ldots, E_n$.) Je tedy soustava

$$\tilde{H}_{p_0}(p_0)\, \tilde{I} = \tilde{E}_{p_0} \tag{18}$$

ekvivalentní soustavě (17). Dále je možno z $\tilde{H}_{p_0}(p_0)$ vybrat h sloupců tak, že takto vzniklá submatice $K_{p_0}(p_0)$ bude nesingulární. Tento výběr V_2 obecně rovněž nemusí být jednoznačný. Z předpokladu A-regularity však vyplývá, že ze všech možných výběrů V_1 a následujících V_2 existuje aspoň jeden V_1^* a V_2^* tak, že prvky $K_{p_0}(p_0)$, stojící v prvých n sloupcích jsou prvky prvých n sloupců matice $H(p_0)$. (Je tedy nutně $h \geq n$.) Kdyby tomu tak nebylo, nemohla by pro p_0 ke zvolené soustavě $E_1, \ldots, E_n$ existovat jediná soustava $I_1, \ldots, I_n$. Takto sestrojenou matici $K_{p_0}(p_0)$ zafixujme. Bez újmy obecnosti předpokládejme, že k-tý sloupec $n + 1 \leq k \leq h$ matice $K_{p_0}(p_0)$ je tvořen prvky k-tého sloupce matice $H(p_0)$.

Všimněme si blíže matice $K_{p_0}(p)$! Zřejmě její prvky jsou racionálními funkcemi p s reálnými koeficienty, které nemají pólů v Γ. Odtud vyplývá, že $\det K_{p_0}(p)$ je racionální funkcí p, která má v Γ nejvýše konečný počet nulových bodů. Buď Q_{p_0} množina těchto nulových bodů. Je tedy $\det K_{p_0}(p) \neq 0$ pro $p \in \Gamma - Q_{p_0}$, tj. $\Gamma^* \supset \Gamma - Q_{p_0}$.

Označíme-li $\mathsf{I}' = [I_1, \ldots, I_h]$, $\mathsf{I}_0' = [I_{h+1}, \ldots, I_{n+r}]$, můžeme (18) psát ve tvaru

$$K_{p_0}(p_0)\, \mathsf{I} + N_{p_0}(p_0)\, \mathsf{I}_0 = \tilde{E}_{p_0} \tag{19}$$

(význam $N_{p_0}(p_0)$ je zřejmý).

Z toho, co jsme odvodili, plyne, že rovnost

$$\mathsf{I} = K_{p_0}^{-1}(p)\, \tilde{E}_{p_0} - K_{p_0}^{-1}(p)\, N_{p_0}(p)\, \mathsf{I}_0 \tag{20}$$

je pro každé $p \in \Gamma - Q_{p_0}$ ekvivalentní (17), tj. pro tato p určené I při předepsaných $E_1, \ldots, E_n$ a zvolených $I_{h+1}, \ldots, I_{n+r}$ tvoří přípustný pár pro $\tilde{S}$.

Z podmínky A-regularity vyplývá ještě to, že matice $K_{p_0}^{-1}(p)\, N_{p_0}(p)$ musí mít prvých n řádků nulových (jednoznačnost $I_1, \ldots, I_n$).

Zavedeme-li vektory $I' = [I_1, \ldots, I_n]$, $E' = [E_1, \ldots, E_n]$, snadno sestrojíme z rovnosti (20) matici $A_{p_0}(p)$, pro kterou je

$$I = A_{p_0}(p)\, E \tag{21}$$

pro každé $p \in \Gamma - Q_{p_0}$. Zřejmě prvky $A_{p_0}(p)$ jsou racionálními funkcemi p s reálnými koeficienty, které v Γ mohou mít póly v bodech množiny Q_{p_0}.

Výše jsme však ukázali, že matice $A_{p_0}(p)$ je symetrická a pro každou soustavu reálných čísel $x_1, \ldots, x_n$ splňuje podmínku $\operatorname{Re} \sum_{ik} A_{p_0 i,k}(p)\, x_i x_k \geqq 0$, tj. $A_{p_0}(p) \in \mathfrak{S}_n$. Z věty 1 však víme, že pak prvky $A_{p_0 i,k}(p)$ nemají pólů v Γ, tj. že $Q_{p_0} = \emptyset$ a tedy $\Gamma^* = \Gamma$. Platí tedy rovnosti (21) a (20) dokonce pro každé $p \in \Gamma$.

Z celé konstrukce matice $A_{p_0}(p)$ vyplývá, že $A_{p_0}(p)$ může záviset jak od volby p_0, tak od výběrů V_1^*, V_2^* matice $K_{p_0}(p_0)$. Snadno však nahlédneme, že tomu tak není. Vskutku, zvolme nějaké $p_1 \in \Gamma$ a sestrojme stejným způsobem matici $A_{p_1}(p)$. Z požadavku A-regularity však plyne, že musí být $A_{p_1}(p) = A_{p_0}(p)$ pro každé $p \in \Gamma$, takže je $A_{p_1}(p) \equiv A_{p_0}(p)$. Tím je věta dokázána.

Důkaz druhého tvrzení věty 5, kdy $2n$-pól je W-regulární, provede se zcela stejně jako prve, a proto jej nebudeme opakovat.

Sledujme nyní blíže ten případ, kdy $2n$-pól je současně A- i W-regulární. Zde platí

Věta 6. *Má-li $2n$-pól jak admitanční matici A, tak impedanční matici W, platí $AW \equiv 1$.*

Důkaz: Zvolme $p \in \Gamma$ a soustavu čísel $E_1, \ldots, E_n$. Pak dle předpokladu existuje jediná soustava $I_1, \ldots, I_n$ a čísla $I_{n+1}, \ldots, I_{n+r}$ tak, že $\{[E_1, \ldots, E_n, 0, \ldots, 0]; [I_1, \ldots, I_{n+r}]\}$ je přípustným párem pro $\tilde{S}$. Přitom je $I = AE$, kde $I' = [I_1, \ldots, I_n]$, $E' = [E_1, \ldots, E_n]$. Avšak pro soustavu $I_1, \ldots, I_n$ existuje jediná soustava čísel $E_1^*, \ldots, E_n^*$ a čísla $I_{n+1}^*, \ldots, I_{n+r}^*$ tak, že $\{[E_1^*, \ldots, E_n^*, 0, \ldots \ldots, 0]; [I_1, \ldots, I_n, I_{n+1}^*, \ldots, I_{n+r}^*]\}$ je přípustným párem pro $\tilde{S}$, při čemž $E^* = WI$, kde $E^{*\prime} = [E_1^*, \ldots, E_n^*]$.

Avšak nutně je $E^* = E$. Vskutku, kdyby $E^* \neq E$, existovaly by k soustavě $I_1, I_2, \ldots, I_n$ dvě různé soustavy $E_1, \ldots, E_n$ a $E_1^*, \ldots, E_n^*$, což dle předpokladu W-regularity není možné.

Platí tedy $E = WAE$, tj. $(1 - WA)\, E = 0$ pro každé E, takže $WA - 1 = 0$, c. b. d.

Dále platí

Věta 7. *Nechť $2n$-pól N má admitanční matici A, a nechť pro každé $p \in \Gamma$ existuje A^{-1}. Pak N má impedanční matici, která je rovna A^{-1}. Stejné tvrzení platí i pro impedanční matici.*

Důkaz: Zvolme pevně nějaké $p \in \Gamma$. Zvolme dále vektor I, $I' = [I_1, I_2, \ldots \ldots, I_n]$ a sestrojme vektor $E = A^{-1}I$. K tomuto vektoru E existuje dle předpokladu A-regularity jediný vektor $AE = AA^{-1}I = I$ a čísla $I_{n+1}, \ldots, I_{n+r}$ tak, že $\{[E_1, \ldots, E_n, 0, \ldots, 0]; [I_1, \ldots, I_n, I_{n+1}, \ldots, I_{n+r}]\}$ je přípustným párem pro $\tilde{S}$. Věta bude dokázána, jestliže dokážeme toto: Existuje-li k vektoru I ještě vektor E^* a čísla $I^*_{n+1}, \ldots, I^*_{n+r}$ tak, že $\{[E^*_1, \ldots, E^*_n, 0, \ldots, 0]; [I_1, \ldots \ldots, I_n, I^*_{n+1}, \ldots, I^*_{n+r}]\}$ bude přípustným párem pro $\tilde{S}$, pak $E = E^*$. Nechť tedy takový vektor E^* existuje. Pak ale dle předpokladu k E^* existuje jediný vektor $I = AE^*$. Odtud však plyne $E = A^{-1}I = A^{-1}AE^* = E^*$, c. b. d.

Důkaz pro impedanční matici je obdobný.

Věta 8. *Nechť jsou splněny předpoklady věty* 6 *nebo* 7. *Pak* A, $W \in \mathfrak{P}_n$.

Důkaz: Jsou-li splněny uvedené předpoklady, pak například existuje A^{-1}, tj. $\det A \neq 0$ pro všechna $p \in \Gamma$. Ježto však $A \in \mathfrak{S}_n$, je podle věty 2 $A \in \mathfrak{P}_n$. Stejně se dokáže pro W.

Přistupme nyní k zavedení důležitého pojmu ekvivalence $2n$-pólů. Jak jsme viděli, je každému regulárnímu $2n$-pólu přiřazena právě jedna admitanční nebo impedanční matice. Neplatí však opak. Lze totiž snadno sestrojit dva různé $2n$-póly, jejichž admitanční (impedanční) matice jsou totožné. Zavedeme proto toto označení:

Řekneme, že dva $2n$-póly N_1, N_2 jsou ekvivalentní, jestliže jejich admitanční nebo impedanční matice jsou identické. (Odtud plyne, že N_1 a N_2 jsou regulární.)

Všimněme si nyní poněkud blíže některých podmínek ekvivalence.

Buď tedy dán $2n$-pól N. Nechť $\{v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots, v_{n+r}\}$ je množina větví příslušného grafu, $\{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$ množina uzlů, $(u_{k_q}, u_{k'_q})$, $q = 1, 2, \ldots, n$ páry svorek, Z_{ik} funkce přiřazená dvojici větví v_i, v_k, $[Z_{ik}] \in \mathfrak{S}_r$.

Sestrojme $2n$-pól N^* takto: Zvolme soustavu čísel $\{\delta_{n+1}, \delta_{n+2}, \ldots, \delta_{n+r}\}$, kde každé δ_k je buď $+1$ nebo -1.

Buď $\{v^*_{n+1}, v^*_{n+2}, \ldots v^*_{n+r}\}$ množina větví grafu N^*, $\{u^*_1, u^*_2, \ldots u^*_s\}$ množina uzlů, $(u^*_{k_q}, u^*_{k'_q})$ páry svorek.

Kladme $v^*_i = \delta_i(u^*_m - u^*_n)$, je-li $v_i = u_m - u_n$, $Z^*_{ik} = \delta_i\delta_k Z_{ik}$ pro všechna i, k. Zřejmě $[\delta_i\delta_k Z_{ik}] \in \mathfrak{S}_r$ a má tedy N^* smysl. Lehko vidíme, že graf N^*, je „až na orientaci" isomorfní s grafem N. $2n$-póly N, N^* budeme nazývat „podobné".

Pak platí

Věta 9. *Buďte* N, N^* *podobné* $2n$-*póly a buď* N *regulární. Pak* N^* *je regulární a* N, N^* *jsou ekvivalentní.*

Důkaz: Nechť tedy N má například admitanční matici A. Zvolme $p \in \Gamma$ a dokažme nejprve, že je-li $E^*_1, \ldots, E^*_n$ libovolná soustava čísel, že pak existuje jediná soustava čísel $I_1^*, \ldots, I_n^*$ a čísla $I_{n+1}^*, \ldots, I_{n+r}^*$ tak, že $\{[E_1^*, \ldots, E_n^*, 0, \ldots, 0]; [I_1^*, \ldots, I_n^*, I_{n+1}^*, \ldots, I_{n+r}^*]\}$ je přípustný pár sítě $\tilde{S}^*$ (přidružená síť k N^*).

Všimněme si nejprve, že zřejmě platí toto tvrzení:

Je-li $\sum_{i=1}^{n+r} c_i v_i^*$ cykl $\tilde{S}^*$, pak $\sum_{i=1}^{n+r} c_i \delta_i v_i$ je cykl $\tilde{S}$ (klademe $\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_n = 1$).

Zvolme $E'^* = [E_1^*, \ldots, E_n^*]$ a určeme $J'^* = [I_1^*, \ldots, I_n^*]$, $I^* = AE^*$ a buďte $\delta_{n+1} I_{n+1}^*, \ldots, \delta_{n+r} I_{n+r}^*$ dle definice existující čísla, pro něž

$$\{[E_1^*, \ldots, E_n^*, 0, \ldots, 0]\ ;\ [I_1^*, \ldots, I_n^*, \delta_{n+1} I_{n+1}^*, \ldots, \delta_{n+r} I_{n+r}^*]\}$$

je přípustný pár pro $\tilde{S}$. Pak možno tvrdit:

$$\{[E_1^*, \ldots, E_n^*, 0, \ldots, 0];\ [I_1^*, \ldots, I_n^*, I_{n+1}^*, \ldots, I_{n+r}^*]\} \tag{21}$$

je přípustný pár pro $\tilde{S}^*$. Dokažme to!

Buď tedy $\sum_i c_i v_i^*$ cykl $\tilde{S}^*$. Pak $\sum_i c_i \delta_i v_i$ je cykl $\tilde{S}$ a platí

$$\sum_i c_i \delta_i E_i^* = \sum_{ik} c_i \delta_i Z_{ik} \delta_k I_k^* .$$

Avšak levá strana poslední rovnosti je rovna $\sum_i c_i E_i^*$. Ježto však $\delta_i \delta_k Z_{ik} = Z_{ik}^*$, platí $\sum_i c_i E_i^* = \sum_{ik} c_i Z_{ik}^* I_k^*$. Splňuje tedy pár (21) podmínku P1.

Všimněme si dále, že zřejmě platí: Je-li $[a_{ik}]$, $[a_{ik}^*]$ strukturální matice sítě $\tilde{S}$ resp. $\tilde{S}^*$, pak $[a_{ik}^*] = [\delta_i a_{ik}]$. Zvolme některý uzel u_k^* sítě $\tilde{S}^*$. Pro odpovídající uzel u_k sítě $\tilde{S}$ platí

$$\sum_i a_{ik} \delta_i I_i^* = 0\ , \quad \text{tj.} \quad \sum_i a_{ik}^* I_i^* = 0\ ,$$

a tedy pár (21) splňuje podmínku P2. Tím je naše tvrzení dokázáno.

Z metody provedeného důkazu zároveň vyplývá, že ke zvolenému vektoru E^* existuje jediný vektor I^* tak, že $\{[E_1^*, \ldots, E_n^*, 0, \ldots, 0]; [I_1^*, \ldots, I_n^*, I_{n+1}^*, \ldots$ $\ldots, I_{n+r}^*]\}$ je přípustným párem pro $\tilde{S}^*$. Kdyby totiž existoval ještě vektor I^{**}, pak lehko nahlédneme, že by pak $\{[E_1^*, \ldots, 0]; [I_1^{**}, \ldots, I_n^{**}, \ldots]\}$ byl přípustný pár pro $\tilde{S}$, což by byl spor s předpokladem jednoznačnosti.

Tím je tvrzení věty 9 pro případ existence admitanční matice dokázáno. V případě W-regularity je důkaz stejný.

Upozorněme na tomto místě na jednu v dalším potřebnou okolnost, která je důsledkem věty 9.

Má-li regulární $2n$-pól N tu vlastnost, že pro některé q funkce $Z_{qi} = 0$ pro všechna $i \neq q$, pak možno větev v_q „přeorientovat", a příslušná admitanční (impedanční) matice se nezmění.

Zcela stejným způsobem, jako větu 9, možno dokázat následující

Věta 10. *Buď N $2n$-pól o admitanční matici $[A_{ik}]$. Přehodíme-li uspořádání q-tého páru svorek $(u_1^{(q)}, u_2^{(q)})$, tj. pokládáme-li svorku $u_2^{(q)}$ za začáteční, $u_1^{(q)}$ za koncovou, pak pro admitanční matici $[A'_{ik}]$ takto vzniklého $2n$-pólu platí*

$$\begin{aligned} A'_{ik} &= A_{ik} && \text{pro} \quad i, k \neq q \,, \\ A'_{iq} &= -A_{iq} && \text{pro} \quad i \neq q \,, \\ A'_{qq} &= A_{qq} \,. \end{aligned}$$

Stejné tvrzení platí v případě, má-li N impedanční matici.

Pro odvození dalších vlastností $2n$-pólů bude účelné, vyšetříme-li blíže případ, kdy $n = 1$, tj. případ „dvojpólu".

Má-li dvojpól admitanční nebo impedanční matici, pak tato je tvořena jediným prvkem, který nazýváme admitance resp. impedance.

Z věty 10 vyplývá, že je lhostejno, kterou svorku dvojpólu považujeme za začáteční a kterou za koncovou.

Pro dvojpól dokáže se snadno následující

Věta 11. *Buď D dvojpól.*

a) *Má-li D tu vlastnost, že pro některé $p \in \Gamma$ a nějaké $E \neq 0$ existuje soustava čísel $I_1, I_2, \ldots, I_{r+1}$, tak, že $\{[E, 0, \ldots, 0]; [I_1, I_2, \ldots, I_{r+1}]\}$ je přípustným párem pro $\tilde{S}$, pak číslo I_1 existuje jediné.*

b) *Má-li D tu vlastnost, že pro některé $p \in \Gamma$ a nějaké $I_1 \neq 0$ existuje číslo E a čísla $I_2, I_3, \ldots, I_{r+1}$ tak, že $\{[E, 0, \ldots, 0]; [I_1, I_2, \ldots, I_{r+1}]\}$ je přípustný pár pro $\tilde{S}$, pak číslo E existuje jediné.*

Důkaz snadno provedeme na základě věty 3.

a) Nechť tedy pro $E \neq 0$ a některé $p \in \Gamma$ existuje soustava $I_1, I_2, \ldots, I_{r+1}$ a soustava $I'_1, I'_2, \ldots, I'_{r+1}$ tak, že $\{[E, 0, \ldots, 0]; [I_1, \ldots, I_{r+1}]\}$ a $\{[E, 0, \ldots \ldots, 0]; [I'_1, \ldots, I'_{r+1}]\}$ jsou přípustné páry pro $\tilde{S}$. Dle věty 3 pak je $EI_1 = EI'_1$ tj. $I_1 = I'_1$, c. b. d.

b) se dokáže stejně.

Všimněme si nyní „degenerovaných dvojpólů", tj. takových, jejichž admitance resp. impedance je identicky rovna nule. Platí tu následující

Věta 12. *Buďte u_α, u_β svorky dvojpólu a nechť tyto nejsou ekvivalentní na jeho grafu. Pak admitance dvojpólu $A \equiv 0$.*

Důkaz: Všimněme si nejprve, že platí toto tvrzení: Je-li $\sum_{i=1}^{r+1} \alpha_i v_i$ cykl sítě $\tilde{S}$, pak $\alpha_1 = 0$. Vskutku, kdyby $\alpha_1 \neq 0$, pak by z rovnosti $(\sum_{i=1}^{r+1} \alpha_i v_i)^{\cdot} = 0$ plynulo $(\sum_{i=2}^{r+1} \alpha_i v_i)^{\cdot} = -\alpha_i \dot{v}_1 = -\alpha_1(u_\beta - u_\alpha)$, tj. komplex $-\frac{1}{\alpha_1} \sum_{i=2}^{r+1} \alpha_i v_i$ by byl cestou mezi uzly μ_α, μ_β na grafu dvojpólu, což je spor s předpokladem u_α non $\sim u_\beta$. Dále je lehko vidět, že pro každé $p \in \Gamma$ a každé E je $\{[E, 0, \ldots, 0]; [0, \ldots, 0]\}$

přípustným párem pro $\tilde{S}$. Avšak dle věty 11 ke každému $E \neq 0$ existuje jediné I_1, a to právě 0. Odtud plyne, že admitance $A \equiv 0$, c. b. d.

Věta 13. *Buďte u_α, u_β svorky dvojpólu. Nechť existuje cesta $\sum_{i=2}^{r+1} \alpha_i v_i$ na grafu dvojpólu mezi uzly u_α, u_β tak, že $\alpha_i Z_{ii} \equiv 0$ pro $i = 2, 3, \ldots, r + 1$. Pak impedance dvojpólu $W \equiv 0$.*

Důkaz: Zvolme $p \in \Gamma$. Musíme dokázat, že ke každému číslu I_1 existují čísla $I_2, \ldots, I_{r+1}$ tak, že

$$\{[0, \ldots, 0]; [I_1, I_2, \ldots, I_{r+1}]\} \tag{22}$$

je přípustným párem pro $\tilde{S}$. Bez újmy obecnosti předpokládejme, že čísla $\alpha_n \neq 0$ pro $2 \leqq n \leqq q \leqq r + 1$, $\alpha_{q+1} = \alpha_{q+2} = \ldots = \alpha_{r+1} = 0$. Dle předpokladu věty je tedy $Z_{ii} \equiv 0$ pro $2 \leqq i \leqq q$. Ježto však $[Z_{ik}] \in \mathfrak{S}_{r+1}$, platí podle věty 1, že $Z_{ik} \equiv 0$ pro $i \leqq q$ a všechna k.

Ukažme, že čísla $I_2, \ldots, I_{r+1}$ možno volit předpisem $I_k = -\alpha_k I_1$. K tomuto cíli všimněme si, že komplex $v_1 - \sum_{i=2}^{r+1} \alpha_i v_i$ je cyklem grafu sítě $\tilde{S}$, tj. že vektor

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -\alpha_2 \\ -\alpha_3 \\ \vdots \\ -\alpha_{r+1} \end{bmatrix} \text{ je řešením rovnice } \tilde{a}'x = 0. \text{ Ježto ale vektor } I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_{r+1} \end{bmatrix} = I_1 x,$$

bude též $\tilde{a}'I = 0$, čímž je dokázáno splnění podmínky P2.

Snadno nahlédneme též splnění podmínky P1. Zřejmě $X'E = 0$ a $X'[Z_{ik}]$ . . $I = 0$, neboť $Z_{ik} I_k = 0$ pro libovolnou dvojici i, k. Tím je dokázáno, že (22) je přípustným párem. Z věty 11 pak plyne, že ke každému $I_1 \neq 0$ existuje právě jedno $E_1 = 0$, takže $W \equiv 0$, což jsme měli dokázat.

Jako příklad vyšetříme ještě „elementární dvojpól", tj. dvojpól, jehož graf je tvořen jedinou větví.

Označme tuto větev v_2 a buď $\dot{v}_2 = u_\beta - u_\alpha$ a Z funkce, přiřazená v_2. Ukažme, že impedance tohoto dvojpólu je rovna Z. Graf sítě $\tilde{S}$ bude tvořen větvemi v_1, v_2, při čemž $\dot{v}_1 = u_\beta - u_\alpha$.

Zvolme $p \in \Gamma$ a $I_1 \neq 0$. Existuje-li číslo E_1 tak, že $\{[E_1, 0]; [I_1, I_2]\}$ je přípustný pár $\tilde{S}$, musí platit:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= 0 \\ -I_1 - I_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{(P2 pro uzel } u_\beta \text{ resp. } u_\alpha.) \tag{23}$$

Cyklem $\tilde{S}$ je komplex $v_1 - v_2$, musí tedy být

$$E_1 = -ZI_2 \,. \tag{24}$$

Z (23) a (24) plyne $E_1 = ZI_1$, čímž je tvrzení dokázáno.

Vraťme se nyní zpět k obecnému $2n$-pólu a odvoďme jednu větu o ekvivalenci, která v konkrétních případech usnadňuje stanovení admitanční resp. impedanční matice. K tomu cíli bude nutno zavésti některé další pojmy, a to pojmy „redukovatelného" a „redukovaného" $2n$-pólu.

Buď dán $2n$-pól N svým grafem, svorkami a systémem funkcí Z_{ik}.

Řekneme, že N je redukovatelný, jestliže existuje rozklad množiny větví V jeho grafu na dvě disjunktní třídy V_1 a V_2, $V = V_1 + V_2$, který má tyto vlastnosti:

1) Je-li U_1 množina začátečních a koncových uzlů větví z V_1, U_2 množina začátečních a koncových uzlů větví z V_2, pak průnik $U_1 \,.\, U_2$ obsahuje právě dva různé uzly (buďte to u_α, u_β).

2) Množina $U_2 - \{u_\alpha, u_\beta\}$ neobsahuje žádnou svorku.

3) Je-li $v_i \in V_1$, $v_k \in V_2$, pak $Z_{ik} \equiv 0$.

4) Dvojpól D_N, jehož graf je dán množinami V_2, U_2 (při čemž jeho větve mají tytéž hranice jako v N, je tedy graf D_N podgrafem grafu N), funkce, přiřazená dvojici v_P, $v_Q \in V_2$ je Z_{PQ} a jehož svorky jsou u_α, u_β, má impedanci w.

Abychom zjednodušili další vyjadřování, zaveďme následující označení pro síť S_1 $2n$-pólu N:

$$V_1 = \{v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots, v_{n+r}\}\ ; \quad V_2 = \{v_{n+r+1}, v_{n+r+2}, \ldots, v_{n+r+q}\}\ ;$$
$$U_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_d\}\ ; \quad U_2 = \{u_{d-1}, u_d, u_{d+1}, \ldots u_s\}\ ,$$

klademe tedy

$$u_\alpha = u_{d-1}\ , \quad u_\beta = u_d\ .$$

Zřejmě matice $[Z_{ik}]$ má tvar

$$[Z_{ik}] = \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c|c} Z_1 & 0 \\ \hline 0 & Z_2 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \}\, r \\ \}\, q \end{array}$$

Sestrojme nyní $2n$-pól N^* takto:

a) Nechť graf jeho sítě S_3 má větve $\{v_{n+1}, \ldots, v_{n+r}, v'_{n+r+1}\}$, při čemž každé větvi v_k, $n + 1 \leqq k \leqq n + r$ je přiřazena stejná dvojice uzlů z U_1 jako v S_1, pro větev v'_{n+r+1} pak je $\dot{v}'_{n+r+1} = u_d - u_{d-1}$.

b) Svorky N^* nechť jsou tytéž uzly, které jsou svorkami N.

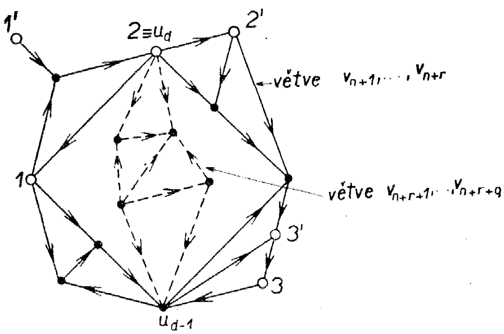
c) Charakteristická matice sítě S_3 buď

$$Z' = \left[\begin{array}{c|c} Z_1 & 0 \\ \hline 0 & w \end{array}\right] \quad (r + 1\text{-ho řádu}).$$

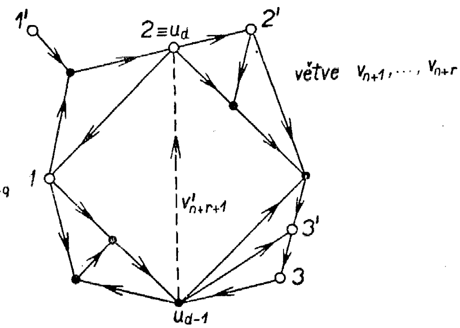
Zřejmě $Z' \in \mathfrak{S}_{r+1}$.

Takto sestrojený $2n$-pól N^* nazveme redukovaným $2n$-pólem, příslušným k N.

Jak známo, znázorňují se grafy obvykle schematy, kde větve jsou vyznačeny orientovanými obloučky a uzly styčnými body obloučků. Aby si čtenář mohl náležitě ujasnit smysl posledních dosti složitých definic a ozřejmit charakteristické vlastnosti struktur tam uvažovaných grafů, je na obr. 1 znázorněn graf redukovatelného šestipólu. Jeho svorky jsou vyznačeny kroužky, větve, příslušející dvojpólu D_N jsou vyznačeny čárkovaně. Na obr. 2 je pak znázorněn příslušný redukovaný šestipól.



Obr. 1.



Obr. 2.

Pak platí následující

Věta 14. a) *Buď N regulární redukovatelný $2n$-pól. Pak příslušný redukovaný $2n$-pól N^* je regulární a je ekvivalentní N.*

b) *Buď N redukovatelný $2n$-pól. Nechť příslušný redukovaný $2n$-pól N^* je regulární. Pak N je regulární a je akvivelentní N^*.*

Důkaz: Dokažme nejprve tvrzení a) pro případ, že existuje admitanční matice $2n$-pólu N. Symboly $\tilde{S}_1$, $\tilde{S}_2$, $\tilde{S}_3$ nechť značí přidruženou síť k N, resp. D_N, resp. N^*.

Zvolme některé $p \in \Gamma$ a nechť $\{[E_1, E_2, \ldots, E_n, 0, \ldots, 0]; [I_1, \ldots, I_n, I_{n+1}, \ldots \ldots, I_{n+r+q}]\}$ je přípustný pár pro $\tilde{S}_1$. Přitom dle předpokladu A-regularity N je soustava $I_1, I_2, \ldots, I_n$ jednoznačně stanovena soustavou $E_1, E_2, \ldots, E_n$.

Všimněme si nejprve strukturální matice a sítě $\tilde{S}_1$. Snadno nahlédneme, že má tvar

$$a' = \begin{array}{c}\left[\begin{array}{cc:cc} * * \cdots & * & & \\ \vdots\ \vdots & \vdots & 0 & \\ * * \cdots & * & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & * * \cdots & * \\ 0 & & \vdots\ \vdots & \vdots \\ & & * * \cdots & * \end{array}\right]\begin{array}{l} - u_1 \\ \\ \\ - u_{d-1} \\ - u_d \\ \\ \\ - u_s\end{array} \\ \begin{array}{cccc} v_1 & v_{n+r} & v_{n+r+1} & v_{n+r+q}\end{array}\end{array} \tag{25}$$

Ježto platí

$$a'I = 0 \,, \tag{26}$$

kde $I' = [I_1, \ldots, I_{n+r+q}]$, pak píšeme-li poslední maticovou rovnost jako systém rovnic, dostaneme sečtením prvních d rovnic

$$\sum_{i=n+r+1}^{n+r+q} a_{i,d-1} I_i + \sum_{i=n+r+1}^{n+r+q} a_{i,d} I_i = 0 \tag{27}$$

(Připomeňme, že v každém sloupci matice a' stojí právě jeden prvek 1, a právě jeden -1.)

Podobně sečtením $d-1$ až s-té rovnice obdržíme

$$\sum_{i=1}^{n+r} a_{i,d-1} I_i + \sum_{i=1}^{n+r} a_{i,d} I_i = 0 \,. \tag{28}$$

Položme pro zkrácení

$$I^* = -\sum_{i=1}^{n+r} a_{i,d} I_i \,. \tag{29}$$

Všimněme si nyní dvojpólu D_N. Nechť množina větví jeho přidružené sítě $\tilde{S}_2$ je $\{v_0, v_{n+r+1}, \ldots, v_{n+r+q}\}$, $\dot{v}_0 = u_d - u_{d-1}$. Pak pro číslo $-I^*$ existují čísla $I'_{n+r+1}, \ldots, I'_{n+r+q}$ a číslo E tak, že $\{[E, 0, \ldots, 0]; [-I^*, I'_{n+r+1}, \ldots, I'_{n+r+q}]\}$ je přípustný pár pro $\tilde{S}_2$. Poněvadž D_N má impedanci w, je $E = -wI^*$. Snadno nahlédneme, že je možno klást $I'_{n+r+k} = I_{n+r+k}$ pro $k = 1, 2, \ldots, q$. Dokažme to!

1) Je-li u_σ uzel $\tilde{S}_2$, $u_\sigma \neq u_d, u_{d-1}$, pak zřejmě $d + 1 \leqq \sigma \leqq s$ a z rovnosti (26) plyne $\sum_{i=n+r+1}^{n+r+q} a_{i,\sigma} I_i = 0$, tj. podmínka P2 je pro u_σ splněna.

Ježto dále platí $\sum_{i=1}^{n+r+q} a_{i,d-1} I_1 = 0$, $\sum_{i=1}^{n+r+q} a_{i,d} I_i = 0$ (z rovn. (26)), máme $\sum_{i=n+r+1}^{n+r+q} a_{i,d} I_i = -\sum_{i=1}^{n+r} a_{i,d} I_i = I^*$, což je podmínka P2 pro uzel u_d v $\tilde{S}_2$.

Dále máme

$$\sum_{i=n+r+1}^{n+r+q} a_{i,d-1} I_i = -\sum_{i=1}^{n+r} a_{i,d-1} I_i = \sum_{i=1}^{n+r} a_{i,d} I_i = -I^* \tag{30}$$

pomocí (28), což je P2 pro u_{d-1} v $\tilde{S}_2$.

2) Je-li nyní C nějaký cykl $\tilde{S}_2$, neobsahující v_0, pak je též cyklem $\tilde{S}_1$ a čísla $I_{n+r+1}, \ldots, I_{n+r+q}$ splňují podmínku P1 v $\tilde{S}_2$. Tím je oprávněnost substituce $I'_{n+r+k} = I_{n+r+k}$ dokázána.

Dále platí: je-li $v_0 + \sum_{i=n+r+1}^{n+r+q} \alpha_i v_i$ cykl $\tilde{S}_2$, pak je

$$-wI^* = \sum_{i=n+r+1}^{n+r+q} \alpha_i \sum_{k=n+r+1}^{n+r+q} Z_{ik} I_k \tag{31}$$

(důsledek existence impedance). Poznamenejme, že takový cykl existuje. Vskutku, kdyby takový cykl neexistoval, bylo by u_d non $\sim u_{d-1}$ na grafu S_2. Pak by ovšem admitance dvojpólu D_N byla $\equiv 0$ podle věty 12, a tedy neexistovala by impedance w, což by byl spor.

Všimněme si zároveň, že $(-\sum_{i=n+r+1}^{n+r+q} \alpha_i v_i)^{\cdot} = u_d - u_{d-1}$.

Nyní můžeme tvrdit: $\{[E_1, \ldots, E_n, 0, \ldots, 0]; [I_1, \ldots, I_n, I_{n+1} \ldots I_{n+r}, I^*]\}$ je přípustným párem pro $\tilde{S}_3$, při čemž k soustavě $E_1, \ldots, E_n$ je soustava $I_1, \ldots$ $\ldots, I_n$ určena jednoznačně. (Tvrzení A.) Dokažme to!

1) Buď tedy $\{v_1, \ldots, v_{n+r}, v'_{n+r+1}\}$ množina větví grafu $\tilde{S}_3$, $\dot{v}'_{n+r+1} = u_d - u_{d-1}$, $K = \sum_{i=1}^{n+r} \alpha_i v_i + \alpha_{n+r+1} v'_{n+r+1}$ cykl grafu $\tilde{S}_3$. Je-li $\alpha_{n+r+1} = 0$, je K též cyklem $\tilde{S}_1$ a podmínka P1 pro $\tilde{S}_3$ je splněna. Buď tedy $\alpha_{n+r+1} \neq 0$. Zvolme nějaký cykl $K = v_0 + \sum_{i=n+r+1}^{n+r+q} \beta_i v_i$ sítě $\tilde{S}_2$, tj. $(-\sum_{i=n+r+1}^{n+r+q} \beta_i v_i)^{\cdot} = u_d - u_{d-1}$. Ježto je $K^{\cdot} = (\sum_{i=1}^{n+r} \alpha_i v_i)^{\cdot} + \alpha_{n+r+1}(u_d - u_{d-1}) = 0$, je $(\sum_{i=1}^{n+r} \alpha_i v_i) + \alpha_{n+r+1} (-\sum_{i=n+r+1}^{n+r+q} \beta_i v_i)^{\cdot} = 0$, tj. komplex $\sum_{i=1}^{n+r} \alpha_i v_i - \alpha_{n+r+1} \sum_{i=n+r+1}^{n+r+q} \beta_i v_i$ je cyklem grafu $\tilde{S}_1$ a tedy platí

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i = \sum_{i=1}^{n+r} \alpha_i \sum_{k=1}^{n+r+q} Z_{ik} I_k - \alpha_{n+r+1} \sum_{i=n+r+1}^{n+r+q} \beta_i \sum_{k=1}^{n+r+q} Z_{ik} I_k \,. \tag{32}$$

Avšak

$$\sum_{k=1}^{n+r+q} Z_{ik} I_k = \sum_{k=1}^{n+r} Z_{ik} I_k \quad \text{pro} \quad i \leqq n + r \,, \tag{33}$$

$$\sum_{k=1}^{n+r+q} Z_{ik} I_k = \sum_{k=n+r+1}^{n+r+q} Z_{ik} I_k \quad \text{pro} \quad n + r + 1 \leqq i \leqq n + r + q \,. \tag{34}$$

Dále však platí $-wI^* = \sum_{i=n+r+1}^{n+r+q} \beta_i \sum_{k=n+r+1}^{n+r+q} Z_{ik} I_k$, takže dosazením do (32) obdržíme pomocí (34):

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i = \sum_{i=1}^{n+r} \alpha_i \sum_{k=1}^{n+r} Z_{ik} I_k + \alpha_{n+r+1} w I^* \,,$$

čili že podmínka P1 je pro cykl K splněna.

2) Je-li u_σ uzel $\tilde{S}_3$, $u_\sigma \neq u_d, u_{d-1}$ plyne platnost podmínky P2 pro $\tilde{S}_3$ bezprostředně z platnosti P2 pro $\tilde{S}_1$. Ježto platí (29), je splněna podmínka P2 pro $\tilde{S}_3$ pro uzel u_d. Rovnost (30) pak ukazuje, že P2 je splněna též pro u_{d-1}.

Tím je tvrzení A až na jednoznačnost dokázáno.

Přistupme tedy k důkazu jednoznačnosti! Předpokládejme, že k daným $E_1, \ldots, E_n$ existuje ještě jiná soustava $I'_1, \ldots, I'_n, I'_{n+1} \ldots I'_{n+r}, \tilde{I}^*$ tak, že

$\{[E_1, \ldots, E_n, 0, \ldots, 0]; \ [I'_1, \ldots, I'_{n+r}, \tilde{I}^*]\}$ bude přípustným párem pro $\tilde{S}_3$. Potom pro $\tilde{I}^*$ existují čísla $I'_{n+r+1}, \ldots, I'_{n+r+q}$ tak, že $\{[-w\tilde{I}^*, 0, \ldots, 0]; [-\tilde{I}^*, I'_{n+r+1}, \ldots, I'_{n+r+q}]\}$ bude přípustným párem pro $\tilde{S}_2$.

Ukažme, že pak $\{[E_1, \ldots, E_n, 0, \ldots, 0]; [I'_1, \ldots, I'_{n+r+q}]\}$ bude přípustným párem $\tilde{S}_1$!

1) Zvolme nějaký cykl $K = \sum_{i=1}^{n+r+q} \alpha_i v_i$ sítě $\tilde{S}_1$. Je-li $\alpha_i = 0$ pro $i > n + r$, je splnění podmínky P1 pro $\tilde{S}_1$ zřejmé. Jestliže některá $\alpha_i \neq 0$ pro $i > n + r$, pak mohou nastat následující dva případy:

a) komplex $C = \sum_{i=n+r+1}^{n+r+q} \alpha_i v_i$ je cyklem,

b) C není cyklem.

Nastane-li případ a), pak též $K - C$ je cyklem. Potom v důsledku splnění podmínky P1 pro $K - C$ v $\tilde{S}_3$ a splnění P1 pro C v $\tilde{S}_2$ je splněna P1 pro K v $\tilde{S}_1$. Nastane-li případ b), snadno nahlédneme, že pak C je cestou mezi uzly u_d, u_{d-1} na grafu D_N. Vskutku, utvoříme-li $C^\cdot$, pak v tomto komplexu mohou se vyskytnout pouze uzly z U_2. Stejně v komplexu $(K - C)^\cdot$ mohou být uzly pouze z U_1. Ježto ale platí $(K - C)^\cdot + C^\cdot = 0$, mohou se v $C^\cdot$ vyskytnout pouze uzly společné U_1 a U_2, tj. právě u_d, u_{d-1}. Podle lemma 3 pak je $C^\cdot = \beta(u_d - u_{d-1})$, $\beta \neq 0$. Odtud vyplývá, že $v_0 - \frac{1}{\beta} C = v_0 - \frac{1}{\beta} \sum_{i=n+r+1}^{n+r+q} \alpha_i v_i$ je cyklem grafu $\tilde{S}_2$. Platí tedy

$$- w\tilde{I}^* = - \frac{1}{\beta} \sum_{i=n+r+1}^{n+r+q} \alpha_i \sum_{k=n+r+1}^{n+r+q} Z_{ik} I'_k \,. \tag{35}$$

Dále si všimněme, $K - C = \sum_{i=1}^{n+r} \alpha_i v_i$ je cestou mezi uzly u_d, u_{d-1}, neboť $(K - C)^\cdot = K^\cdot - C^\cdot = -\beta(u_d - u_{d-1})$. Z toho plyne, že $\sum_{i=1}^{n+r} \alpha_i v_i + \beta v'_{n+r+1}$ je cyklem grafu $\tilde{S}_3$.

Podle předpokladu tedy platí

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i = \sum_{i=1}^{n+r} \alpha_i \sum_{k=1}^{n+r} Z_{ik} I'_k + \beta w\tilde{I}^* \,. \tag{36}$$

Podle (35) však je

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i = \sum_{i=1}^{n+r} \alpha_i \sum_{k=1}^{n+r} Z_{ik} I'_k + \sum_{i=n+r+1}^{n+r+q} \alpha_i \sum_{k=n+r+1}^{n+r+q} Z_{ik} I'_k \,, \tag{37}$$

což v důsledku platnosti (33) a (34) možno psát ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i = \sum_{i=1}^{n+r+q} \alpha_i \sum_{k=1}^{n+r+q} Z_{ik} I'_k \,.$$

Splňuje tedy soustava $I'_1, \ldots, I'_{n+r+q}$ podmínku P1 pro $\tilde{S}_1$.

2) Dokažme nyní ještě splnění podmínky P2!

Je-li u_σ některý uzel $\tilde{S}_1$, $u_\sigma \neq u_d, u_{d-1}$, pak splnění P2 je zřejmé. Pro uzel u_d platí (podm. P2 pro $\tilde{S}_2$):

$$-\tilde{I}^* + \sum_{i=n+r+1}^{n+r+q} a_{i,d} I'_i = 0 .$$

Pro $\tilde{S}_3$ pak je $\tilde{I}^* + \sum_{i=1}^{n+r} a_{i,d} I'_i = 0$. Sečtením máme $\sum_{i=1}^{n+r+q} a_{i,d} I'_i = 0$, takže P2 pro $\tilde{S}_1$ vskutku platí. Analogicky je pro u_{d-1}:

$$\tilde{I}^* + \sum_{i=n+r+1}^{n+r+q} a_{i,d-1} I'_i = 0 \quad (\text{P2 pro } \tilde{S}_2)$$

$$-\tilde{I}^* + \sum_{i=1}^{n+r} a_{i,d-1} I'_i = 0 \quad (\text{P2 pro } \tilde{S}_3),$$

z čehož plyne $\sum_{i=1}^{n+r+q} a_{i,d-1} I'_i = 0$, takže P2 pro $\tilde{S}_1$ platí.

Tím jsme dokázali, že $\{[E_1, \ldots, E_n, 0, \ldots, 0]; [I'_1, \ldots, I'_{n+r+q}]\}$ je přípustným párem pro $\tilde{S}_1$. V důsledku předpokladu regularity N musí však být $I'_1 = I_1, \ldots$ $\ldots, I'_n = I_n$. Existuje tedy ke zvoleným $E_1, \ldots, E_n$ jediná soustava $I_1, \ldots, I_n$ a čísla $I'_{n+1}, \ldots, I'_{n+r}, \tilde{I}^*$ tak, že $\{[E_1, \ldots, E_n, 0, \ldots, 0]; [I_1, \ldots, I_n, I'_{n+1}, \ldots, I'_{n+r}, \tilde{I}^*]\}$ je přípustným párem pro $\tilde{S}_3$, čili že N^* je regulární. Důkaz tvrzení a) věty 14 je zakončen.

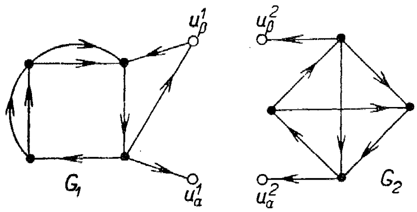
Dokažme nyní tvrzení b) věty 14!

Předpokládejme, že N^* je A-regulární. Zvolme opět $p \in \Gamma$ a čísla $E_1, \ldots, E_n$. Pak existuje jediná soustava čísel $I_1, \ldots, I_n$ a čísla $I_{n+1}, \ldots, I_{n+r}, I^*$ tak, že $\{[E_1, \ldots, E_n, 0, \ldots, 0]; [I_1, \ldots, I_n, I_{n+1}, \ldots, I_{n+r}, \tilde{I}^*]\}$ je přípustným párem pro $\tilde{S}_3$. K číslu I^* existují pak příslušná čísla $I_{n+r+1}, \ldots, I_{n+r+q}$ pro $\tilde{S}_2$. Opakujeme-li nyní krok za krokem druhou část předešlého důkazu tvrzení a) věty 14, dokážeme, že $\{[E_1, \ldots, E_n, 0, \ldots, 0]; [I_1, \ldots, I_{n+r+q}]\}$ je přípustným párem pro $\tilde{S}_1$. Předpokládáme-li dále, že existuje ještě jiná soustava $I'_1, \ldots, I'_{n+r+q}$ tak, že $\{[E_1, \ldots, E_n, 0, \ldots, 0]; [I'_1, \ldots, I'_{n+r+q}]\}$ je přípustným párem pro $\tilde{S}_1$ a opakujeme-li prvou část důkazu tvrzení a) věty 14, zjistíme, že $\{[E_1, \ldots, E_n, 0, \ldots, 0];$ $[I'_1, \ldots, I'_{n+r}, \tilde{I}^*]\}$ je přípustným párem pro $\tilde{S}_3$. To je však spor s předpokladem regularity N^*, není-li $I'_k = I_k$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Tím je dokázáno, že N^* je A-regulární a tedy i tvrzení b).

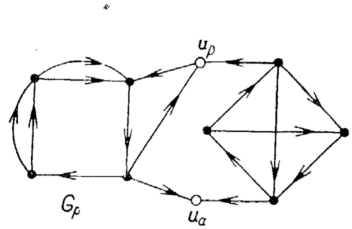
Dokázali jsme tak větu 14 pro případ, kdy N resp. N^* je A-regulární. V případě, kdy N, resp. N^* je W-regulární, je důkaz skoro stejný a proto jej nebudeme opakovat.

Právě dokázaná věta 14 umožňuje nám snadné odvození věty o tzv. paralelním spojení dvou nebo více dvojpólů. Zaveďme proto tento pro elektrotechniku důležitý pojem!

Buď tedy dán dvojpól D_1 a buď $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ množina větví jeho grafu. Nechť $\dot{v}_i = u_2^i - u_1^i$; u_α^1, u_β^1 buďte jeho svorky, Z_{ik}^1 funkce, přiřazené dvojici v_i, v_k.



Obr. 3a.

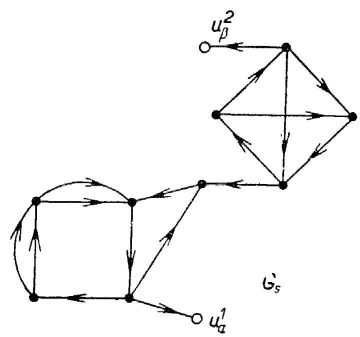


Obr. 3b.

Dále buď D_2 dvojpól, $\{v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_{r+q}\}$ množina větví jeho grafu, $\dot{v}_i = u_2^i - u_1^i$; u_α^2, u_β^2 jeho svorky, Z_{ik}^2 funkce, přiřazená dvojici v_i, v_k.

Definujme dvojpól D_p tímto předpisem: Nechť množina větví jeho grafu je $\{v_1, v_2, \ldots, v_{r+q}\}$, při čemž buď $\dot{v}_i = u_2^i - u_1^i$ pro $i = 1, 2, \ldots, r + q$. Přitom klaďme $u_\alpha^1 = u_\alpha^2 = u_\alpha$, $u_\beta^1 = u_\beta^2 = u_\beta$ a nechť u_α, u_β jsou jeho svorky. Dvojici větví v_i, v_k přiřaďme funkci

$$
\begin{aligned}
Z_{ik} &= Z_{ik}^1, \text{ je-li } 1 \leqq i, k \leqq r \\
Z_{ik} &= Z_{ik}^2, \text{ je-li } r + 1 \leqq i, k \leqq r + q \quad (38) \\
Z_{ik} &= 0 \quad \text{pro ostatní dvojice } i, k.
\end{aligned}
$$



Obr. 3c.

Takto sestrojený dvojpól D_p nazveme „paralelní spojení dvojpólů D_1 a D_2“.

Zároveň definujeme ještě dvojpól D_s takto: nechť množina větví jeho grafu je $\{v_1, v_2, \ldots, v_{r+q}\}$ a buď opět $\dot{v}_i = u_2^i - u_1^i$ pro $i = 1, 2, \ldots, r + q$. Zde klaďme $u_\beta^1 = u_\alpha^2$ a buďte u_α^1, u_β^2 jeho svorky. Přiřazení funkcí Z_{ik} dvojicím větví buď dáno předpisem (38). Takto sestrojený dvojpól D_s nazveme „seriové spojení dvojpólů D_1 a D_2.“

Je beze všeho zřejmé, že podle principu úplné indukce lze pojem paralelního a seriového spojení rozšířit na libovolný konečný počet dvojpólů.

Aby čtenáři věc byla jasnější, je na obr. 3 uveden příklad grafů G_1, G_2 dvou dvojpólů (a), grafu paralelního (b) a seriového spojení (c).

Platí následující

Věta 15. *Buďte D_1 a D_2 dvojpóly o impedancích w_1 resp. w_2, $w_1 \neq 0$. Pak paralelní spojení D_1 a D_2 má impedanci*

$$\frac{w_1 w_2}{w_1 + w_2} .$$

Důkaz: Klaďme pro jednoduchost $u_\alpha^1 = u_\alpha^2 = u_1$, $u_\beta^1 = u_\beta^2 = u_2$. Podle definice je zřejmě paralelní spojení D_1 a D_2 redukovatelný dvojpól. Označíme-li v_1^*, v_2^* větve příslušného redukovaného dvojpólu, můžeme jej popsat rovnostmi: $\dot{v}_1^* = u_2 - u_1$, $\dot{v}_2^* = u_2 - u_1$; $Z_{11} = w_1$, $Z_{22} = w_2$, $Z_{12} = 0$. Větve grafu přidružené sítě $\tilde{S}$ tedy budou v_0, v_1^*, v_2^*, $\dot{v}_0 = u_2 - u_1$. Vyšetřme, zda tento redukovaný dvojpól je regulární. Existuje-li pro některé $p \in \Gamma$ k danému číslu I_0 číslo E_0 a čísla I_1, I_2 tak, že

$$\{[E_0, 0, 0]; [I_0, I_1, I_2]\} \tag{39}$$

je přípustný pár sítě $\tilde{S}$, musí platit:

$$I_0 + I_1 + I_2 = 0 ,$$
$$-I_0 - I_1 - I_2 = 0 \qquad \text{(podmínka P2 pro uzly } u_1, u_2) .$$

Graf sítě $\tilde{S}$ obsahuje cykly $v_0 - v_1^*$, $v_0 - v_2^*$, takže platí

$$E_0 = -\, w_1 I_1 , \quad E_0 = -\, w_2 I_2 . \tag{40}$$

Odtud plyne $E_0 - w_2(I_0 + I_1) = 0$ a ježto $w_1 \neq 0$ (poněvadž $w_1 \neq 0$, je $w_1 \in \mathfrak{P}_1$, tj. Re $w_1 > 0$ pro každé $p \in \Gamma$), je

$$E_0 - w_2 I_0 + E_0 \frac{w_2}{w_1} = 0 ,$$

tj.

$$E_0 = \frac{w_1 w_2}{w_1 + w_2} I_0 . \tag{41}$$

Vskutku tedy pro každé I_0 existuje jediné číslo E_0, dané rovnicí (41), a čísla I_1, I_2, daná rovnostmi (40) tak, že (39) je přípustným párem $\tilde{S}$. Je tedy redukovaný dvojpól regulární a má impedanci $\dfrac{w_1 w_2}{w_1 + w_2}$. Podle věty 14 platí totéž pro paralelní spojení D_p.

Pro seriové spojení platí

Věta 16. *Buďte D_1 a D_2 dvojpóly o impedancích w_1 resp. w_2. Pak jejich seriové spojení má impedanci $w_1 + w_2$.*

Tuto větu lze dokázat analogickým způsobem, jako větu 14. Důkaz sestrojí si čtenář snadno sám.

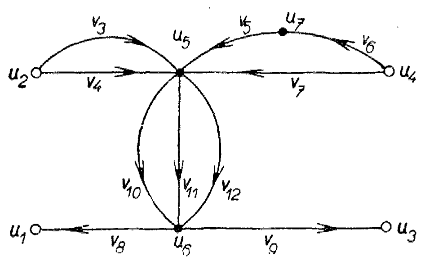
Poznamenejme na tomto místě ještě toto: tak, jak jsme definovali paralelní a seriové spojení dvojpólů, můžeme definovat i paralelní a seriové spojení

$2n$-pólů pro $n > 1$. Lze však snadno ukázat, že pak obecně nebudou platit věty, obdobné větám 15, 16.

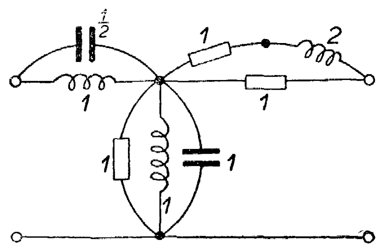
Závěrem uveďme jeden příklad, na kterém ukážeme použití shora uvedených vět.

Je dán čtyřpól N následujícími údaji:

$\{u_1, \ldots, u_7\}$ buď množina uzlů jeho grafu G, (u_1, u_2) a (u_3, u_4) prvý resp. druhý pár svorek, $\{v_3, \ldots, v_{12}\}$ buď množina větví, při čemž $\dot{v}_3 = \dot{v}_4 = u_5 - u_2$, $\dot{v}_{10} = \dot{v}_{11} = \dot{v}_{12} = u_6 - u_5$, $\dot{v}_7 = u_5 - u_4$, $\dot{v}_5 = u_5 - u_7$, $\dot{v}_6 = u_7 - u_4$, $\dot{v}_8 = u_1 - u_6$, $\dot{v}_9 = u_3 - u_6$.



Obr. 4a.



Obr. 4b.

Funkce Z_{ik}, přiřazené dvojici v_i, v_k buďtež dány předpisem

$$Z_{33} = 2/p;\ Z_{44} = p;\ Z_{55} = 1;\ Z_{66} = 2p;\ Z_{77} = 1;\ Z_{88} = Z_{99} = 0\,;$$

$$Z_{10,10} = 1;\ Z_{11,11} = p;\ Z_{12,12} = 1/p;\ Z_{i,k} = 0 \text{ pro } i \neq k.$$

Snadno se lze přesvědčit, že $[Z_{ik}] \in \mathfrak{S}_{10}$.

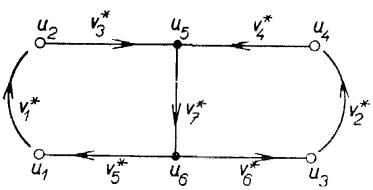
Naším úkolem je stanovit impedanční a admitanční matici čtyřpólu N (existuje-li). Pro větší názornost je graf čtyřpólu N vyobrazen na obr. 4a, a pro srovnání je dále na obr. 4b uvedeno schema čtyřpólu N způsobem obvyklým v elektrotechnice. Jak už bylo ze začátku poznamenáno, je-li $Z_{ii} = Lp$ (L konstanta), značí to fysikálně, že ve větvi v_i je zapojena samoindukčnost L, což se ve schematu znázorní nakreslením několika závitů. Je-li $Z_{ii} = \dfrac{1}{Cp}$, je ve větvi zapojena kapacita C, ve schematu značená kondensátorem, je-li pak $Z_{ii} = R$, je tam zapojen odpor R, vyznačovaný obdélníkem. Je-li konečně $Z_{ii} = 0$, kreslí se ve schematu „hladká" úsečka. Čísla u jednotlivých symbolů označují hodnoty R, L, C.

Přistupme nyní k řešení vytyčeného úkolu! Kdybychom chtěli postupovat přímo, znamenalo by to vyšetřovat systém lineárních rovnic o dvanácti proměnných $I_1, \ldots, I_{12}$. Z okolnosti $Z_{ik} = 0$ pro $i \neq k$ a ze struktury grafu N je však beze všeho patrno, že N je redukovatelný čtyřpól. Vskutku, všimněme si nejprve dvojpólu, tvořeného větvemi v_3, v_4 a svorkami u_2, u_5. Tento dvojpól lze pokládat za paralelní spojení dvou dvojpólů, z nichž každý je tvořen jedinou větví. Jak jsme dříve stanovili, je impedance takových elementárních dvojpólů rovna funkci Z_{ii}, která je přiřazena příslušné větvi v_i. V našem případě je tedy podle věty 15 impedance paralelního spojení

$$Z_a = \frac{p\,\dfrac{2}{p}}{p + \dfrac{2}{p}} = \frac{2p}{p^2 + 2}\,.$$

Analogická situace je u větví v_{10}, v_{11}, v_{12}. Pro příslušnou impedanci Z_c dostaneme snadno

$$Z_c = \frac{p}{p^2 + p + 1}\,.$$



Obr. 4c.

Dále dvojpól „mezi uzly“ u_5, u_4 lze považovat za paralelní spojení dvojpólu o větvi v_7 a dvojpólu, který je seriovým spojením dvojpólů o větvích v_5 a v_6. Podle vět 15 a 16 dostaneme snadno pro impedanci

$$Z_b = \frac{2p + 1}{2p + 2}\,.$$

Možno tedy příslušný redukovaný čtyřpól N^* popsat rovnostmi

$$\dot{v}_3^* = u_5 - u_2. \quad \dot{v}_4^* = u_5 - u_4\,; \quad \dot{v}_5^* = u_1 - u_6\,, \quad \dot{v}_6^* = u_3 - u_6\,;$$
$$\dot{v}_7^* = u_6 - u_5\,; \quad Z_{33}^* = Z_a\,; \quad Z_{44}^* = Z_b\,; \quad Z_{77}^* = Z_c\,;$$
$$Z_{55}^* = Z_{66}^* = Z_{ik}^* = 0 \ \text{ pro } \ i \neq k.$$

Jeho graf je znázorněn na obr. 4c. Vyšetřme, zda N^* je W-regulární. Existují-li pro nějaké $p \in \Gamma$ ke zvoleným číslům I_1^*, I_2^* čísla E_1, E_2 a čísla $I_3^*, \ldots, I_7^*$ tak, že $\{[E_1, E_2, 0, \ldots, 0];\ [I_1^*, \ldots, I_7^*]\}$ je přípustným párem příslušné přidružené sítě, musí platit:

$$\begin{aligned} -I_1^* + I_5^* &= 0\,, \\ I_1^* - I_3^* &= 0\,, \\ -I_2^* + I_6^* &= 0\,, \\ I_2^* - I_4^* &= 0\,, \quad \text{(Podmínky P2 pro uzly } u_1, \ldots, u_6.) \\ I_3^* + I_4^* - I_7^* &= 0\,, \\ -I_5^* - I_6^* + I_7^* &= 0\,, \end{aligned}$$

a $E_1 = Z_a I_3^* + Z_c J_7^*$, $E_2 = Z_b I_4^* + Z_c I_7^*$, ježto komplexy $v_1^* + v_3^* + v_5^* + v_7^*$; $v_2^* + v_4^* + v_6^* + v_7^*$ jsou cykly grafu přidružené sítě. Řešením této soustavy nalezneme snadno:

$$E_1 = (Z_a + Z_c)\, I_1^* + Z_c I_2^* ,$$
$$E_2 = Z_c I_1^* + (Z_b + Z_c)\, I_2^* ,$$
$$I_3^* = I_5^* = I_1^* , \quad I_4^* = I_6^* = I_2^* ,$$
$$I_7^* = I_1^* + I_2^* .$$

Je tedy N^* W-regulární a příslušná impedanční matice W je rovna

$$W = \begin{bmatrix} Z_a + Z_c ; & Z_c \\ Z_c ; & Z_b + Z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{3p^3 + 2p^2 + 4p}{p^4 + p^3 + 3p^2 + 2p + 2} ; & \dfrac{p}{p^2 + p + 1} \\ \dfrac{p}{p^2 + p + 1} ; & \dfrac{2p^3 + 5p^2 + 5p + 1}{2(p^3 + 2p^2 + 2p + 1)} \end{bmatrix} .$$

Podle věty 14 pak víme, že též N je W-regulární a jeho impedanční matice je W.

Všimneme-li si konečně, že det $W \not\equiv 0$, je W^{-1} admitanční maticí N podle věty 7.

LITERATURA

[1] *Cauer:* Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, Ak. Verlag Berlin, 1954.

[2] *Knichal:* O Kirchhoffových zákonech, Matem. fyzikálny sborník Slov. akadémie vied, 1952, č. 2.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМАХ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

ВАЦЛАВ ДОЛЕЖАЛ (Václav Doležal)

(Поступило в редакцию 15/VIII 1957 г.)

В настоящей статье излагается теория $2n$-полюсника, играющего важную роль в теории линейных электрических цепей со сосредоточенными параметрами.

Как известно, в литературе, посвященной этой теме (и носящей в большинстве случаев только технический характер), нет основательного определения $2n$-полюсника, свойства же его выводятся интуитивным способом при различных дальнейших предположениях физического характера (напр., закон о сохранении энергии), которые совсем не нужны.

Целью работы является устранение этих недостатков. В ней положены основы общей теории $2n$-полюсника путем абстрактных рассуждений, а результаты этой теории выведены чисто математическим путем.

В первой, вспомогательной, части работы вводится понятие ,,полуположительной матрицы``, и доказываются некоторые теоремы об этих матрицах. Матрица $[Z_{ik}(p)]$ называется полуположительной, если она удовлетворяет следующим условиям: а) является симметричной, б) элементами ее служат рациональные функции переменного p с действительными коэффициентами, в) для любого p, $\operatorname{Re} p > 0$, и для любой системы действительных чисел x_i $\operatorname{Re} \sum_{i,k} Z_{ik}(p)\, x_i x_k \geqq 0$.

Во второй части работы решаются собственные проблемы. Сначала определяется сеть как граф, каждой паре ветвей v_i, v_k которого поставлена в соответствие функция Z_{ik} таким образом, что $[Z_{ik}]$ является полуположительной матрицей. Затем при помощи понятия ,,допустимой пары`` выражается то физическое обстоятельство, что какая-то система Э. Д. С. и токов в ветвях выполняет законы Кирхгофа. При помощи сети определяется $2n$-полюсник и его A — и W — регулярность; физически это значит, что приложение системы Э. Д. С. к зажимам $2n$-полюсник определяет однозначно систему токов, проходящих зажимами, или же наоборот.

Доказаны следующие утверждения: 1. Если $2n$-полюсник является A-регулярным, то существует матрица A (т. наз. адмитансная матрица) такая, что с ее помощью определяется система токов при данной системе Э. Д. С. Притом A является полуположительной матрицей. Аналогичное утверждение справедливо и для W-регулярного $2n$-полюсника (соответствующая матрица называется импедансной).

2. Если к данному $2n$-полюснику существуют адмитансная и импедансная матрицы, то их произведение есть единичная матрица.

3. Если существует адмитансная матрица A и матрица A^{-1}, то A^{-1} является импедансной матрицей и наоборот.

В следующем отделе статьи рассматриваются вопросы об эквивалентности $2n$-полюсников, т. е. условия, при которых два $2n$-полюсника имеют одинаковые адмитансные или импедансные матрицы. Доказываются теоремы об эквивалентности для того случая, когда графы $2n$-полюсников находятся в определенном соотношении. Особенно последняя из этих теорем является особенно важной для нахождения адмитансной или импедансной матрицы для конкретно заданного $2n$-полюсника.

Затем, используя теоремы об эквивалентности, доказываются теоремы для параллельного и последовательного соединения двухполюсников.

В заключение вычисляется адмитансная матрица заданного четырехполюсника, и таким образом иллюстрируется применение общих теорем изложенной теории.

Zusammenfassung

ÜBER EINIGE GRUNDSÄTZE DER THEORIE DER LINEAREN WECHSELSTROMSCHALTUNGEN

VÁCLAV DOLEŽAL

(Eingegangen am 15. August 1957.)

Dieser Artikel ist der Theorie des $2n$-Pols, der in der Theorie der linearen Wechselstromschaltungen eine wichtige Rolle spielt, gewidmet.

Es ist bekannt, dass in der Literatur, die sich mit diesen Fragen befasst (die aber gewöhnlich mit Rücksicht auf „technische Resultate" geschrieben ist), der $2n$-Polbegriff nicht ganz einwandfrei eingeführt ist und dass seine Eigenschaften nur intuitiv mit Hilfe der weiteren Voraussetzungen physikalischen Charakters (wie z. B. das Energieprinzip), die aber gar nicht notwendig zu sein brauchen, abgeleitet sind.

Diese Behandlung hat die Aufgabe, die eben angeführten Unvollkommenheiten zu beseitigen. Darum sind hier die Grundzüge der allgemeinen $2n$-Poltheorie in abstrakter Weise aufgebaut und die Resultate, die für den $2n$-Pol gültig sind, rein mathematisch abgeleitet.

In dem ersten Abschnitt der Abhandlung, der im Lichte des weiteren Theorieaufbaues als Hilfsabschnitt angesehen werden kann, ist der Begriff der „semipositiven Matrix" eingeführt und einige Sätze über diese Matrizen sind bewiesen. Die Matrix $[Z_{ik}(p)]$ heisst dabei semipositiv, wenn

a) sie symmetrisch ist,

b) ihre Elemente rationale Funktionen der Veränderlichen p mit reellen Koeffizienten sind,

c) für sämtliche Werte von p, $\operatorname{Re} p > 0$ und sämtliche Systeme reeller Zahlen x_i $\operatorname{Re} \sum_{ik} Z_{ik}(p)\, x_i x_k \geqq 0$ ist.

Der zweite Teil beschäftigt sich mit dem eigenen Problem. Zuerst ist das Netzwerk definiert, und zwar als ein Graph, wobei jedem Paare seiner Zweige (v_i, v_k) eine Funktion $Z_{ik}(p)$ in der Weise zugeordnet ist, dass $[Z_{ik}(p)]$ eine semipositive Matrix bildet. Dann wird mit dem Begriffe des „zulässigen Paares" der physikalische Umstand charakterisiert, dass irgendein System der E. M. K. und Ströme in den Zweigen des betreffenden Netzwerkes die Kirchhoffschen Gesetze erfüllt. Auf Grund des Netzwerkbegriffes ist dann der $2n$-Pol und seine A- bzw. W-Regularität definiert, was physikalisch bedeutet, dass (im Falle A) durch ein beliebiges System der E. M. K., die zu den $2n$-Polklemmenpaaren zugeführt werden, ein System der klemmendurchfliessenden Ströme eindeutig bestimmt ist, bzw. (im Falle W) umgekehrt.

Es werden folgende Behauptungen bewiesen:

1) Wenn ein $2n$-Pol A-regulär ist, so existiert eine Matrix A (die sogenannte „Scheinleitwertmatrix"), dass durch A das System der klemmendurchfliessenden Ströme für das gegebene System der zugeführten E. M. K. eindeutig bestimmt ist, wobei A als eine semipositive Matrix erscheint. Eine ähnliche Behauptung gilt auch für den Fall der W-Regularität. (Die betreffende Matrix heisst dann „Scheinwiderstandmatrix".)

2) Wenn für irgendeinen $2n$-Pol die Scheinleitwertmatrix noch die Scheinwiderstandmatrix existiert, so ist das Produkt beider Matrizen der Einheitsmatrix gleich.

3) Wenn die Scheinleitwertmatrix A und ihre Inverse A^{-1} existiert, dann ist A^{-1} die Scheinwiderstandmatrix und umgekehrt.

Im nachfolgenden Teile der Behandlung werden die Fragen der $2n$-Polequivalenz studiert, d. h. die Bedingungen, unter denen zwei $2n$-Pole identische Scheinleitwert- bzw. Scheinwiderstandmatrizen besitzen. Im Zusammenhang mit diesem werden einige Sätze abgeleitet, die die Fälle betrachten, wenn die Graphen der betreffenden $2n$-Pole im gewissen Zusammenhang stehen. Insbesonders der letzte Satz ist für die Bestimmung der Scheinleitwert- oder Scheinwiderstandmatrix des $2n$-Pols in konkreten Fällen von grosser praktischen Bedeutung.

Mit Hilfe der Equivalenzsätze werden zuletzt als Spezialfälle die Behauptungen, die für die Paralell- und Serienschaltungen der Zweipole gelten, bewiesen.

Zum Schluss der Abhandlung ist ein Beispiel der Ermittelung der Vierpolscheinleitwertmatrix angeführt, das die Anwendung der im Artikel abgeleiteten Sätze illustriert.