Josef Hecht

Poznámka k řešení soustav algebraických lineárních rovnic

Aplikace matematiky, Vol. 3 (1958), No. 3, 233–237

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102619`

POZNÁMKA K ŘEŠENÍ SOUSTAV ALGEBRAICKÝCH LINEÁRNÍCH ROVNIC

JOSEF HECHT

(Došlo dne 2. října 1957.) DT: 512.25

V článku je navržen způsob, jak doplniti rozšířenou matici koeficientů a pravých stran soustavy lineárních algebraických rovnic, aby bylo možno vypočísti Milneovou metodou nejen rozklad dané matice koeficientů na součin dvou trojúhelníkových matic a změněnou pravou stranu, ale i samotné hodnoty neznámých, takže celé řešení soustavy bude zcela jednotné. Je také uvedena varianta navrženého postupu.

V čísle 3 (1957) časopisu Aplikace matematiky, v příloze nazvané Numerická praxe, uvedla O. Pokorná Milneovo schema pro rozklad čtvercové matice nesymetrické na součin dvou trojúhelníkových matic. Pravá má jedničky v diagonále a nuly pod ní. Schema je doplněno výpočtem součinu inversní matice k levé trojúhelníkové a vektoru pravé strany. Celé schema je určeno pro řešení soustav lineárních algebraických rovnic.

Milneova metoda fakticky končí výpočtem pravé trojúhelníkové matice a součinu inversní matice k levé s vektorem pravé strany rovnic. Pak nastupuje obvyklý zpětný pochod za účelem výpočtu neznámých.

Budiž $\mathbf{A}$ matice koeficientů u neznámých v dané soustavě, $\mathbf{r}$ vektor pravé strany. Matici $\mathbf{A}$ možno rozložit na součin trojúhelníkových matic $\mathbf{L}$ a $\mathbf{T}$ (při čemž $\mathbf{T}$ má jedničky v diagonále). Pak z rovnice $\mathbf{Ax} = \mathbf{r}$ obdržíme $\mathbf{Tx} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{r}$.

Zde nastupuje doplněk, na který chci upozorniti. Zlepšením tzv. metody „pod čarou“ [1] můžeme Milneovým postupem vypočísti nejen matici $\mathbf{T}$, ale i samotné neznámé.

Za tím účelem doplníme matici $\mathbf{A}$ typu (n, n) na matici typu $(2n, 2n)$ takto:

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & -\mathbf{E} \end{Vmatrix}, \text{ a vektor } \mathbf{r} \text{ na } \begin{Vmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{o} \end{Vmatrix}.$$

Zde značí $\mathbf{0}$ nulovou matici a $\mathbf{o}$ nulový vektor. Místo dané maticové rovnice řešíme

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & -\mathbf{E} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\xi} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{o} \end{Vmatrix}.$$

Tvrdíme, že převodem složené matice na trojúhelníkovou s nulami pod diagonálou a jedničkami v ní, a tomu odpovídající úpravou pravé strany obdržíme na místo vektoru $\mathbf{o}$ na pravé straně vektor numerických hodnot neznámých.

Matici $\begin{Vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & -\mathbf{E} \end{Vmatrix}$ rozložíme na součin matic $\begin{Vmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S} & \mathbf{L}_2 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 \end{Vmatrix}$.

Násobení provedeme a srovnáme součin s danou maticí:

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & -\mathbf{E} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{L}_1\mathbf{T}_1 & \mathbf{L}_1\mathbf{T} \\ \mathbf{S}\mathbf{T}_1 & \mathbf{S}\mathbf{T} + \mathbf{L}_2\mathbf{T}_2 \end{Vmatrix} .$$

Z toho plyne

$\mathbf{A} = \mathbf{L}_1\mathbf{T}_1$, což je známý rozklad matice $\mathbf{A}$;
$\mathbf{0} = \mathbf{L}_1\mathbf{T}$, takže $\mathbf{T} = \mathbf{0}$;
$\mathbf{E} = \mathbf{S}\mathbf{T}_1$, je tedy $\mathbf{S} = \mathbf{T}_1^{-1}$;
$-\mathbf{E} = \mathbf{S}\mathbf{T} + \mathbf{L}_2\mathbf{T}_2$, $-\mathbf{E} = \mathbf{L}_2\mathbf{T}_2$. Poněvadž pro tyto matice není jiných podmínek než to, že $\mathbf{L}_2$ má nuly nad diagonálou a $\mathbf{T}_2$ nuly pod ní s jedničkami v diagonále, zvolme $\mathbf{L}_2 = -\mathbf{E}$, $\mathbf{T}_2 = \mathbf{E}$. Budeme nyní míti

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_1^{-1} & -\mathbf{E} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\xi} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{o} \end{Vmatrix},$$

z toho dále

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\xi} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_1^{-1} & -\mathbf{E} \end{Vmatrix}^{-1} \begin{Vmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{o} \end{Vmatrix}.$$

Položme

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_1^{-1} & -\mathbf{E} \end{Vmatrix}^{-1} \begin{Vmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{o} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{t} \\ \boldsymbol{\tau} \end{Vmatrix},$$

takže je

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{o} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_1^{-1} & -\mathbf{E} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathbf{t} \\ \boldsymbol{\tau} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{L}_1\mathbf{t} \\ \mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{t} - \boldsymbol{\tau} \end{Vmatrix}.$$

Srovnáním dostaneme:

$$\mathbf{r} = \mathbf{L}_1\mathbf{t} \;\therefore\; \mathbf{t} = \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{r} ,$$
$$\mathbf{o} = \mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{t} - \boldsymbol{\tau} \;\therefore\; \boldsymbol{\tau} = \mathbf{T}_1^{-1} . \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{r} .$$

Poněvadž $\mathbf{L}_1\mathbf{T}_1 = \mathbf{A}$, je $\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{L}_1^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$ a $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}$, a tedy dle původní rovnice $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{r}$ je $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{x}$, což bylo dokázati.

Při této úpravě neběží o úsporu na početních úkonech, ale o jednolitost celého řešení od první eliminace až po výpočet neznámých, což by se uplatnilo zejména při strojové zautomatisované práci.

Tato metoda má ještě variantu s transponovanou maticí. Vyjděme od vroubené matice

$\begin{Vmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{o} \\ \mathbf{r}' & -1 \end{Vmatrix}$, v níž je $\mathbf{o}$ nulový vektor o n prvcích, $\mathbf{r}'$ je transponovaný vektor pravé strany dané soustavy. Místo $\mathbf{Ax} = \mathbf{r}$ řešíme zároveň n soustav

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{o} \\ \mathbf{r}' & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathbf{u} \\ \xi \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{e}_1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} \mathbf{e}_2 \\ 0 \end{Vmatrix}, \ldots, \begin{Vmatrix} \mathbf{e}_n \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Znakem $\mathbf{e}_i$ vyjadřujeme vektor, který má za i-tý prvek jedničku, na ostatních místech nuly. Převedeme-li matici levé strany na trojúhelníkový tvar, budou po odpovídající úpravě pravých stran na místě poslední nuly (prvek $(n + 1)$) ve vektorech hodnoty x_i.

Proveďme:

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{o} \\ \mathbf{r}' & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{L}_3 & \mathbf{o} \\ \mathbf{s}' & \alpha \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathbf{T}_3 & \mathbf{t} \\ \mathbf{o}' & 1 \end{Vmatrix}.$$

Porovnání dá tyto rovnice:

$\mathbf{L}_3\mathbf{T}_3 = \mathbf{A}'$, opět známý rozklad;
$\mathbf{L}_3\mathbf{t} = \mathbf{o} \therefore \mathbf{t} = \mathbf{o}$;
$\mathbf{s}'\mathbf{T}_3 = \mathbf{r}' \therefore \mathbf{s}' = \mathbf{r}'\mathbf{T}_3^{-1}$;
$\mathbf{s}'\mathbf{t} + \alpha = -1 \therefore \alpha = -1$.

Máme proto :

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{T}_3 & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}' & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathbf{u} \\ \xi \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{L}_3 & \mathbf{o} \\ \mathbf{r}'\mathbf{T}_3^{-1} & -1 \end{Vmatrix}^{-1} \begin{Vmatrix} \mathbf{e}_i \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{z} \\ \tau \end{Vmatrix}.$$

Jako dříve napíšeme

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{e}_i \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{L}_3 & \mathbf{o} \\ \mathbf{r}'\mathbf{T}_3^{-1} & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathbf{z} \\ \tau \end{Vmatrix}$$

a dostaneme:

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{L}_3\mathbf{z} \therefore \mathbf{z} = \mathbf{L}_3^{-1}\mathbf{e}_i$$
$$0 = \mathbf{r}'\mathbf{T}_3^{-1}\mathbf{z} - \tau \therefore \mathbf{r}'\mathbf{T}_3^{-1} . \mathbf{L}_3^{-1}\mathbf{e}_i = \tau$$

Protože je

$$\mathbf{L}_3\mathbf{T}_3 = \mathbf{A}', \text{ je } \mathbf{T}_3^{-1}\mathbf{L}_3^{-1} = \mathbf{A}'^{-1}, \text{ tedy } \mathbf{r}'\mathbf{T}_3^{-1}\mathbf{L}_3^{-1}\mathbf{e}_i = \mathbf{r}'\mathbf{A}'^{-1}\mathbf{e}_i = \tau .$$

Dále je $\mathbf{Ax} = \mathbf{r}, \mathbf{x}'\mathbf{A}' = \mathbf{r}'$, a proto $\tau = \mathbf{x}'\mathbf{A}'\mathbf{A}'^{-1}\mathbf{e}_i = \mathbf{x}'\mathbf{e}_i$, což dává právě složku X_i.

Přednost dáme ovšem první variantě, které lze přehledněji upotřebit při změně pravých stran rovnic, např. při výpočtu korekčních členů k hodnotám neznámých z prvního přiblížení.

Nakonec uvádíme příklad z článku O. Pokorné, vypočítaný podle navrhované úpravy. Upozorňujeme, že políčka, obsazená v tabulce B nulami, jedničkami kladnými i zápornými, zůstávají takovými vždy, a možno je proto vyplnit bez počítání napřed. Kontrolní sloupec nebyl zatím počítán.

LITERATURA

[1] *Pokorná O.:* Řešení soustav lineárních algebraických rovnic, Stroje na zpracování informací, Sborník III, Praha 1955.

Tabulka A.

6,4375	2,1849	−3,7474	1,8822	0	0	0	0	4,6351
2,1356	5,2101	1,5220	−1,1234	0	0	0	0	5,2131
−3,7362	1,4998	7,6421	1,2324	0	0	0	0	5,8665
1,8666	−1,1104	1,2460	8,3312	0	0	0	0	4,1322
1	0	0	0	−1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	−1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	−1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	−1	0

Tabulka B.

6,4375	0,339402	−0,582120	0,292381	0	0	0	0	0,720016
2,1356	4,485273	0,616501	−0,389677	0	0	0	0	0,819445
−3,7362	2,767874	3,760786	0,904963	0	0	0	0	1,672125
1,8666	−1,743928	3,407719	4,022013	0	0	0	0	−0,368189
1	−0,339402	0,791361	−1,140787	−1	0	0	0	2,185173
0	1	−0,616501	0,947587	0	−1	0	0	−0,560311
0	0	1	−0,904963	0	0	−1	0	2,005321
0	0	0	1	0	0	0	−1	−0,368189

Резюме

ЗАМЕТКА К РЕШЕНИЮ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

ИОСЕФ ГЕХТ (Josef Hecht)

(Поступило в редакцию 2/X 1957 г.)

Если при решении системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{r}$ пользуемся для вычислений известной схемой Мильна (Milne), то мы, наконец, должны провести обратные приемы, чтобы найти значения неизвестных. Как показано в статье, можно вместо этого взять систему вида

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & -\mathbf{E} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\xi} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\| .$$

Если теперь применить схему Мильна, то получим не только обе трехугольные матрицы, как обычно, но в правой части вместо нулевого вектора и значения неизвестных. Решение таким образом становится единым.

Видоизменением этого метода получим одновременно решение n систем уравнений с той же левой частью $\begin{Vmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{r}' & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathbf{u} \\ \xi \end{Vmatrix}$ и правыми частями вида $\begin{Vmatrix} \mathbf{e}_i \\ 0 \end{Vmatrix}$, где только i-ый элемент равен единице, остальные равны нулю.

Описанный метод является усовершенствованием т. наз. метода ,,под чертой''. По мнению автора можно было бы этот метод использовать и при работе с вычислительными машинами.

Summary

A NOTE ON THE SOLUTION OF SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS

JOSEF HECHT

(Received October 2, 1957.)

In Milne's method of solving systems of linear algebraic equations $\mathbf{Ax} = \mathbf{r}$, in order to find the unknowns after taking into triangular form, it is necessary to perform the inverse steps. However, if this method is applied directly to the system

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & -\mathbf{E} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\xi} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{0} \end{Vmatrix},$$

the unknowns appear in the place of the zero-vector.

A variant solves simultaneously a set of n systems of equations

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{r}' & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathbf{u} \\ \xi \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{e}_i \\ 0 \end{Vmatrix},$$

where $\mathbf{e}_i$ has zero coordinates except for a unity i-th coordinate.

In the author's opinion this could be of use with computers.