

# Aplikace matematiky

---

Bedřich Goldschmied  
K teorii telegrafního přenosu

*Aplikace matematiky*, Vol. 3 (1958), No. 3, 170–189

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102616>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1958

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## K TEORII TELEGRAFNÍHO PŘENOSU

† BEDŘICH GOLDSCHMIED<sup>1)</sup>

(Došlo dne 8. ledna 1957.)

DT: 621.394.1/.2

V článku se odvozuje, že telegrafní filtry s charakteristikou dle Gaussovy křivky dovolují nejlepší využití přenosového pásma. Vyčís-  
lují se pro ně teoretické hodnoty zkreslení a přeslechu a zkoumá se mož-  
nost úspory kmitočtů.

Přes velký rozmach telefonní techniky zachoval si telegraf svůj význam a zavedení strojů arytmičkových mu otevřelo nové možnosti. Velkou jeho výho-  
dou je podstatně lepší využití přenosových cest. Výkonnost přenosové cesty  
hodnotíme zpravidla podle součinu středního trvání jednoho znaku a šíře  
frekvenčního pásma, připadajícího na jednu cestu. Tento součin má u telefonie  
řádově hodnotu 130, u tónové telegrafie 17 a u nejlepších systémů podmořské  
telegrafie 3,2. Je tedy zřejmě telegraf ve výhodě.

Příčina úspory tkví ovšem v ochuzení informačního obsahu zprávy (odpadají  
charakteristické znaky řeči a pod.) jakož i na využití určité apriorní znalosti  
vlastností signálu, vyjádřených voleným způsobem kodování [1].

To, že telegrafní rychlost, t. j. obecně množství zpráv, jež můžeme jednotce  
časové přenést, je úměrná kmitočtové šířce cesty, stanovil jako první KÜPF-  
MÜLLER [2], a v jiné formě NYQUIST [3], oba pro telegrafní přenosy. Obecná,  
ovšem ještě neúplná formulace pochází od HARTLEYE; Hartley ještě neuvažuje  
vliv šumu a odlišných způsobů kodování. Nynější znění pochází od SHANNONA  
[1] a má tvar

$$I = W \log_a \left( 1 + \frac{P}{N} \right), \quad (1)$$

kde  $I$  je přenosová kapacita cesty,  $W$  účinná šíře pásma,  $a$  základ logaritmu  
podle použitého kodu,  $\frac{P}{N}$  pak střední poměr energií signálu k šumu. Shannon

<sup>1)</sup> Tato práce pochází z pozůstalosti Ing. dr. Bedřicha Goldschmieda. Byla napsána  
roku 1950 patrně jako základ pro větší práci a nebyla určena k bezprostřední publikaci.  
Je uveřejněna bez jakýchkoliv větších úprav tak, jak ji autor napsal.

současně dokázal, že zvýšení přenosové rychlosti kodováním (sem patří též komprese řeči a pod.) má svoje meze. Do této části teorie však zabořit nechceme a omezíme se jen na problém přenosový.

Obecně se udává v telegrafní praxi, že k dosažení dostatečně malého zkreslení nejmenší nutná šíře základního pásma je  $1,6 f_z$ , kde  $f_z$  je základní kmitočet. Činitel 1,6 byl odvozen různými autory pro tak zv. ideální dolnopásmovou propust, t. j. filtr, jehož útlum pod hraniční frekvencí je nulový, nad ní nekonečný, za současného předpokladu lineárního průběhu fáze v pásmu propustném. Ukázalo se však brzy, že filtr obdélníkového tvaru je i teoreticky nevhodný. Úpravy, ke kterým došlo, byly však většinou empirické a nebyly teoreticky odůvodněny.

V dalším bude odvozen nejvhodnější tvar charakteristiky filtru pro telegrafní účely. Mohli bychom tak učinit ihned, neboť matematicky je cesta propracovaná a dávno známá. Bude však účelnější, objasnit nejdříve myšlenky, které k tomu řešení vedly a které jsou podstatnou částí moderní teorie informací.

Podnět a část představ má svůj původ v kvantové fyzice. Jsou to dvě úzce spjaté zásady, které určují ráz této otázky. Je to pojem kvantisace zprávy a principu nepřesnosti, v atomistice známý jako Heisenbergův princip. Kvantisaci informace lze zcela názorně vyložit. Každá zpráva se skládá z písmen, značek, číslic a nemá význam přenést třeba jen půl písmena. Obecně se tedy zpráva skládá z jistých elementárních jednotek. Není však nutné přenést přes spojovací prostředek všechny „atomy“ zprávy. Část je nám známá a priori, už bez přenosu. Je to v první řadě znalost použitého způsobu kodování („kodování“ se zde užívá v nejširším smyslu tohoto pojmu podle teorie informací), dále statistické znalosti o složení zprávy a pod. Pro jednotku této znalosti a priori byl zvolen výraz „metron“ [4]. Dále je tu znalost a posteriori, t. j. to, co nám teprve přenos zprostředkuje. Pro jednotku přenosovou byl ražen název „logon“ [5]. Počet logonů za vteřinu, t. j. přenosová rychlost je dána vlastnostmi kanálu. Celková přenosová kapacita, t. j. součet metronů a logonů za vteřinu, je dána citovaným Shannonovým vzorcem (1).

Přicházíme nyní k druhé, shora uvedené zásadě, t. j. k principu nepřesnosti. Zajímá nás nejvyšší přenosová rychlost při dané cestě. Pro periodickou zprávu platí podle teorie Fourierových řad, že průběh signálové funkce je jednoznačně určen  $2n + 1$  ekvidistantními body, je-li  $n$  nejvyšší harmonická, kterou kanál je schopen přenést. Považujeme-li první člen za referenční, získáváme takto nejvýše  $2n$  vzájemně nezávislých dat, čili logonů. Jak je tomu však u neperiodických signálů? Poměry nejlépe objasníme na příkladě: měříme na př. frekvenční složení periodického signálu pomocí analyzátoru s krystalovým filtrem. Při šířce pásma 1 c/sec má tento filtr zakmitávací dobu řádu jedné vteřiny. To znamená, že teprve po uplynutí této doby nám přístroj dovoluje spolehlivě

čtení. Při změně signálu musíme opět čekat stejnou dobu, než se indikátor ustálí. Obecně při šířce pásma  $n$  c/sec můžeme provést čtení řádu  $n$  za vteřinu. Zde už nemáme signál přísně periodický ve smyslu Fourierově, a tudíž jednotlivé údaje nejsou absolutně nezávislé, nýbrž jen „prakticky nezávislé“. Míra přípustného vzájemného ovlivnění určuje počet možných čtení. Čím přesněji chceme znáti frekvenci, tím delší dobu potřebujeme k měření.

Povšimněme si nyní pojmu proměnné frekvence. Naším smyslem a představám je tento pojem sice běžný, je však v úplném rozporu s pojetím Fourierovým. Toto předpokládá intervaly nekonečně dlouhé a tudíž frekvenci neměnnou, nezávislou na čase. Jako příklad uvádíme známý rozklad frekvenčně modulované vlny. Rozbor přes konečné intervaly, který prakticky můžeme provést, je generalisací Fourierova rozvoje. Spektrum signálu je zde proměnné a je třeba vyjádřit jej jako funkci času. Podle toho, co bylo řečeno výše, můžeme však dobu, kdy se určitá spektrální amplituda projevuje, určití tím méně přesně, čím přesněji chceme znát frekvenci. Podobných příkladů mohli bychom uvést ještě mnoho. Dospěli jsme k závislosti obecně platné, kterou lze vyjádřit vzorcem:

$$\Delta t \cdot \Delta f \simeq 1, \quad (2)$$

t. j. slovy: Při současném měření je součin neurčitostí měření frekvence ( $\Delta f$ ) a času ( $\Delta t$ ) konstantní a řádu jednotky.

V období s kvantovou mechanikou můžeme tento součin považovat za elementární přenosové kvantum. Vyhodnocujeme-li i fázi, zprostředkuje nám dva atomy informace, t. j. 2 logony. Pro další postup je třeba znát minimální velikost tohoto součinu. Přímo tento problém řešen není. Víme však, jak jsme už uvedli, že periodická funkce je jednoznačně určena  $2n + 1$  Fourierovými koeficienty. To platí i tehdy, roste-li perioda signálu k nekonečnu. Počet logonů za vteřinu je vždy roven  $\frac{2n}{T} = 2f_0$ , kde  $T$  jest trvání jedné periody a  $f_0$  je hraniční frekvence spojovací cesty. Tento počet můžeme považovat za nejvyšší možný a dle toho dospějeme k minimální ploše 1 logonu:

$$\Delta t \cdot \Delta f \geq \frac{1}{2}. \quad (2a)$$

Tento vzorec můžeme nyní vyjádřit takto: součin středního trvání a středního frekvenčního rozložení jednoho logonu není menší než  $\frac{1}{2}$ .

Názorný obraz těchto vztahů dává Gáborův „sdělovací diagram“ nebo  $f \div t$  diagram [5].

Nyní jsme již schopni úlohu přesně formulovat. Hledáme takový průběh značky, aby součin  $\Delta f \cdot \Delta t$  byl minimální. Než přistoupíme k vlastnímu výpočtu, bude vhodné provést několik pomocných úvah. Tak jako při počítání v rovině frekvenční je výhodné použít exponenciální funkce  $e^{i\omega t}$  místo funkcí

goniometrických, zavádíme si komplexní tvary i v rovině časové. Vynikne tím symetrie vzorců a vyhneme se mnohým obtížím při početních operacích.

Stanovíme funkci  $\Psi(t)$  tak, aby skutečný signál  $s(t)$ , který ovšem je reálný byl reálnou částí  $\Psi(t)$ , t. j.

$$s(t) = \operatorname{Re} \Psi(t) \quad (3)$$

nebo

$$s(t) = \frac{1}{2}[\Psi(t) + \Psi^*(t)], \quad (4)$$

kde  $\Psi^*(t)$  je konjugovaná funkce k  $\Psi(t)$ .

Na příklad pro  $s(t) = \cos \omega t$  možno klást  $\Psi(t) = e^{i\omega t}$ . Píšeme-li

$$\Psi(t) = s(t) + i\sigma(t), \quad (5)$$

platí mezi  $s(t)$  a  $\sigma(t)$  vztah, který uvádíme jen pro úplnost (viz [5]):

$$\sigma(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{\tau - t} d\tau. \quad (6)$$

Komplexní signál  $\Psi(t)$  má obecně též komplexní spektrum  $\Phi(\omega)$ . Je-li

$$\Phi(\omega) = a(\omega) + ib(\omega),$$

pak platí

$$s(t) = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} [a(\omega) \cos \omega t - b(\omega) \sin \omega t] d\omega, \quad (7)$$

$$\sigma(t) = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} [a(\omega) \sin \omega t + b(\omega) \cos \omega t] d\omega. \quad (8)$$

Z těchto vzorců můžeme získat názornou představu o fyzikálním smyslu  $\sigma(t)$ . Tato funkce má stejné spektrální složení jako  $s(t)$  a vzniká z ní konstantním fázovým posuvem všech složek o  $90^\circ$ . Nazývá se proto signál v kvadratuře. Obalová křivka se tím úplně mění, ale na př. v mezích platnosti Ohmova zákona slyšení ucho by nepostředlo rozdíl. Kombinujeme-li vektory  $s(t)$  a  $\sigma(t)$ , jež jsou časově kolmé, teč kolmo v prostoru, t. j. tvořením komplexního signálu  $\Psi(t)$ , přejde u periodických funkcí oscilující vektor v otáčivý.

Nebudeme se podrobně zabývat vlastnostmi funkcí  $\Psi(t)$  a  $\Phi(\omega)$ , jen jednu okolnost zdůrazníme:  $\Phi(\omega)$  je nulové pro frekvence záporné, takže tato vlastnost často velmi usnadňuje použití Laplaceových transformací. Využívá jí též několik novějších systémů modulace s potlačením jednoho postranního pásma. (Viz [6] a [7].)

Nyní můžeme přikročit k vlastnímu řešení. Při odvozování budeme užívat stále komplexních funkcí  $\Psi(t)$  a  $\Phi(\omega)$ , ačkoliv u momentů sudého řádu lze  $\Psi(t)$  ihned nahradit reálným signálem  $s(t)$ .

Pro jednoduchost vynecháme v dalším u integrálů s mezemi  $-\infty, \infty$  označení hranic.

Celková „energie“ signálu je podle [13] rovna

$$\int \Psi(t) \Psi^*(t) dt = \int \Phi(\omega) \Phi^*(\omega) d\omega. \quad (9)$$

Definujme střední dobu signálu momentem prvního řádu. Je to jakási doba „těžiště“ signálu a obdobně definujme též střední frekvenci vztahy

$$t_1 = \frac{\int t \Psi(t) \Psi^*(t) dt}{\int \Psi(t) \Psi^*(t) dt}. \quad (10)$$

$$f_1 = \frac{\int f \Theta(\omega) \Theta^*(\omega) d\omega}{\int \Theta(\omega) \Theta^*(\omega) d\omega}, \quad (11)$$

Přesuneme nyní pro zjednodušení výrazů počátek souřadnic do bodu  $t_1$  resp.  $f_1$ , tím, že zavádíme nové proměnné  $t' = t - t_1$  a  $f' = f - f_1$ , pro jednoduchost čárky pak vynecháme. Pokud meze integrálu jsou minus a plus nekonečno, výrazy se tím nemění. V této soustavě zavedeme ramena momentů druhého řádu vztahy

$$t_2^2 = \frac{\int \Psi(t) t^2 \Psi^*(t) dt}{\int \Psi(t) \Psi^*(t) dt}. \quad (12)$$

$$f_2^2 = \frac{\int \Theta(\omega) f^2 \Theta^*(\omega) d\omega}{\int \Theta(\omega) \Theta^*(\omega) d\omega}, \quad (13)$$

Považujeme-li čas  $t = t_1$  jako nejpravděpodobnější při měření epochy signálu, udává  $t_2 \sqrt{2}$  střední odchylku od této hodnoty. Veličinu  $t_2$  označíme v dalším jako efektivní trvání signálu. Jako definici pro  $\Delta t$  zvolíme, z důvodů později objasněných, střední odchylku násobenou měřítkovým činitelem  $\sqrt{\pi}$ . Obdobně definujme  $\Delta f_2 = f_2 \sqrt{2\pi}$ . Pro zjednodušení matematických výrazů budeme však zpravidla počítat s hodnotou  $2t_2 = \bar{t}$ , resp.  $2f_2 = \bar{f}$  místo s  $\Delta t$  a  $\Delta f$ , a označíme je krátce jako šířku značky resp. cesty.

Je nutné vyjádřit  $t_2$  též v rovině frekvenční. Dle teorie Laplaceovy transformace platí (viz [8])

$$\int_0^{\infty} t^n \Psi(t) e^{-pt} dt = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} [\Phi(p)]. \quad (14)$$

Dosadíme-li v [14] za komplexní proměnnou  $p = 2\pi fi$ , (t. j. omezíme-li se na osu reálných frekvencí) dostaneme:

$$\int_0^{\infty} t^n \Psi(t) e^{-i2\pi ft} dt = (-1)^n \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^n \frac{d^n}{df^n} \Phi(i\omega). \quad (15)$$

Ze způsobu odvození je zřejmé, že vzorec (15) platí i pro transformaci Fouriero-

vu, zmizí-li signál a jeho derivace v nekonečnu, což pro fyzikálně možný signál je vždy splněno. Platí tedy

$$f_2^2 = \frac{\int \Psi(t) t^2 \Psi^*(t) dt}{\int \Psi(t) \Psi^*(t) dt} = - \frac{1}{4\pi^2} \frac{\int \Phi(\omega) \frac{d^2}{df^2} \Phi^*(\omega) df}{\int \Phi(\omega) \Phi^*(\omega) df}. \quad (16)$$

Zavedli jsme tím úplně přirozenou cestou diferenciální operátor  $\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{df}$ , obdobný operátorům kvantové mechaniky.

Úlohu lze nyní matematicky vyjádřit takto: stanovit tvar signálu, aby jeho efektivní trvání bylo co nejkratší a současně byly splněny podmínky, vyjádřené rovnicemi (17) a (18), t. j. aby

$$\int \Psi(\omega) \Phi^*(\omega) df = \int \Psi(t) \Psi^*(t) dt = K, \quad (17)$$

$$\int \Phi(\omega) V(\omega) \Phi^*(\omega) df = C. \quad (18)$$

Rovnice (17) říká, že celková „energie“ signálu je pevná. Konstantu  $K$  zvolíme s výhodou rovnou jedničce a řekneme, že signál je normalisovaný.

Konstanta  $C$  v rovnici (18) nazývá se zvážená střední frekvenční šířka signálu dle váhové funkce (weighting function)  $V(\omega)$ . Funkce  $V(\omega)$  je určena požadavky na rozložení kmitočtů v přenosové cestě. V obdobné rovnici kvantové mechaniky značí  $V(x)$  potenciální energii.

Pro nás jsou důležité jen dva případy, z nichž podrobně rozebereme jen první.

1) Jako kritérium pro šířku kanálu považujeme „efektivní frekvenční šířku“  $f_2$  definovanou vztahem

$$f_2^2 = \frac{\int \Phi(\omega) f^2 \Phi^*(\omega) df}{\int \Phi(\omega) \Phi^*(\omega) df}, \quad V(\omega) = f^2 \quad (19)$$

v souřadnicovém systému, kde  $f_1$  je počátkem.

2) Ideální filtr s obdélníkovou charakteristikou a lineární fází, t. j.  $V(\omega) = \infty$  mimo pásmo, a  $V(\omega) = 0$  uvnitř. Úloha se tak redukovala na stanovení minima integrálu

$$\left( \frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int \Phi^*(\omega) \frac{d^2}{df^2} \Phi(\omega) df$$

při splnění hořejších vedlejších podmínek, což provedeme pomocí metod variačního počtu.

Nejprve symetrisujeme hořejší integrál. Parciální integrací dostaneme

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int \Phi(\omega) \frac{d^2}{df^2} \Phi^*(\omega) df &= \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^2 \left\{ \left[ \Phi^*(\omega) \frac{d\Phi(\omega)}{df} \right]_{-\infty}^{\infty} - \right. \\ &\quad \left. - \int \frac{d\Phi^*(\omega)}{df} \cdot \frac{d\Phi(\omega)}{df} df \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Víme, že prakticky použitelné řešení musí být v nekonečnu nulové i se všemi derivacemi. Výraz v první závorce musí tudíž být roven nule. Dospějeme tak k variaci

$$\delta \left[ \frac{1}{4\pi^2} \int \left\{ \frac{d\Phi(\omega)}{df} \cdot \frac{d\Phi^*(\omega)}{df} + \lambda_1 \Phi(\omega) V(\omega) \Phi^*(\omega) + \lambda_2 \Phi(\omega) \Phi^*(\omega) \right\} df \right] = 0.$$

Eulerova rovnice pro tuto variaci zní

$$\frac{dI}{d\Phi^*} - \frac{d}{df} \frac{\partial I}{\partial \Phi^{*'}} = 0, \quad \Phi^{*'} = \frac{d\Phi^*(\omega)}{df},$$

kde  $I$  značí integrál z rovnice (20).

Obdobná rovnice platí též pro funkci  $\Phi(\omega)$ . Dosazením pro  $I$  obdržíme

$$\lambda_1 \Phi(\omega) V(\omega) + \lambda_2 \Phi(\omega) - \frac{d}{df} \frac{d\Phi(\omega)}{df} \cdot \frac{1}{4\pi^2} = 0,$$

t. j.

$$\frac{d^2\Phi(\omega)}{df^2} - 4\pi^2\Phi(\omega) [\lambda_1 V(\omega) + \lambda_2] = 0. \quad (21)$$

Formálně se tato rovnice shoduje s vlnovou rovnicí Schroedingerovou pro stacionární stav v jednorozměrném případě. Uvádíme ji pro srovnání

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2} [W - V(x)] \Psi = 0.$$

Dosazením za  $V(\omega) = f^2$  dostaneme

$$\frac{d^2\Phi(\omega)}{df^2} - 4\pi^2\Phi(\omega) [\lambda_1 f^2 + \lambda_2] = 0. \quad (22)$$

To je rovnice jednorozměrného harmonického oscilátoru kvantové mechaniky.

Řešení této rovnice je podrobně propracováno v četných knihách o vlnové mechanice. Patří mezi tak zv. problémy vlastních hodnot. Naznačíme zde pouze postup pomocí metody mnohočlenů.

Hledáme nejprve řešení asymptotické, t. j. pro velmi velká  $f$ . Pak můžeme lineární člen v závorce vůči členu s  $f^2$  zanedbat a obdržíme asymptotický tvar

$$\Phi''(\omega) - \alpha^2 f^2 \Phi(\omega) = 0, \quad \text{kde } \alpha^2 = 4\pi^2 \lambda_1.$$

Asymptotickým řešením této rovnice je  $\Phi_a = c \cdot e^{-i\alpha f^2}$ . Znaménko minus bylo nutné zvolit s ohledem na podmínku, že funkce  $\Phi$  musí všude, tedy i v nekonečnu, zůstat konečnou. Tato podmínka je charakteristická pro všechny problémy toho druhu a je to právě ona, která vede ke kvantovým číslům. Pro stanovení úplného řešení položíme  $\Phi = \Phi_a \cdot \xi(f)$ , kde  $\xi(f)$  je obecně mocninná řada v  $f$ . Koefficienty členů řady získáme dosazením do původní rovnice a dospějeme takto k nové diferenciální rovnici

$$\xi'' - 2\alpha f \xi' + (A - \alpha) \xi = 0, \quad A = -4\pi^2 \lambda_2.$$



Zavedeme novou proměnnou  $\varrho = f\sqrt{\alpha}$  a substitucí  $\xi(f) = H(\varrho)$  nabude naše rovnice tvaru

$$H''(\varrho) - 2\varrho H'(\varrho) + \left(\frac{\Lambda}{\alpha} - 1\right) H(\varrho) = 0.$$

Předpokládejme  $H(\varrho)$  ve tvaru mocninné řady  $H(\varrho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \varrho^{\nu}$ . Dosazením do diferenciální rovnice pro  $H(\varrho)$  dospějeme k rekursnímu vzorci pro koeficienty řady

$$a_{\nu+2} = \frac{\frac{\Lambda}{\alpha} - 2\nu - 1}{(\nu+1)(\nu+2)} a_{\nu}.$$

Porovnáním této řady a řady pro  $e^{-\varrho^2}$  je patrné, že součin obou diverguje a nedává tudíž správné řešení. Stanovíme-li podmínky  $\frac{\Lambda}{\alpha} = 2n + 1$  a  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0$ , přejde řada v mnohočlen a divergence je odstraněna, jelikož členy vyššího řádu než  $n$  jsou nulové. Mnohočleny takto vzniklé slují Hermite-ovy polynomy.

Úplné řešení tedy zní

$$\Phi = ce^{-\frac{\varrho^2}{2}} H_n(\varrho), \quad (23)$$

kde je ovšem ještě třeba určit konstanty  $C$ ,  $\alpha$ ,  $\Lambda$ . Nás zajímá jen polynom nul-tého řádu,  $H_0 = 1$ ,  $\frac{\Lambda}{\alpha} = 1$ , takže naše partikulární řešení je

$$\Phi = Ce^{-\frac{\varrho^2}{2}} = Ce^{-\frac{\alpha}{2} f^2}. \quad (24)$$

$C$  určíme z podmínky, že funkce má být normalisována, tj. že

$$\int \Phi \Phi^* df = 1 = C^2 \int e^{-\alpha f^2} df = C^2 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$$

odkud plyne  $C^2 = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$ , takže

$$\Phi(\omega) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\frac{\alpha}{2} f^2}. \quad (25)$$

Pro efektivní šířku frekvenční nalezneme:

$$f_2^2 = \int f^2 \Phi \Phi^* df = C^2 \int f^2 e^{-\alpha f^2} df = \frac{\sqrt{\pi}}{2} C^2 \alpha^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\alpha},$$

tj.

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \quad \text{a} \quad \Phi(\omega) = Ke^{-\frac{f^2}{4f_2^2}}. \quad (26)$$

Spektrální průběh signálu je tím určen. Převědeme-li zpět do roviny časové (podle (10)), dostaneme

$$\Psi(t) = \int e^{-\frac{\alpha}{2}f^2 + i2\pi ft} df = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} e^{-\frac{2\pi^2}{\alpha}t^2},$$

tj.

$$\Psi(t) = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2\pi^2}{\alpha}t^2}, \quad (27)$$

a odtud efektivní trvání  $t_2$ :

$$t_2^2 = \int \Psi t^2 \Psi^* dt = C^2 \frac{2\pi}{\alpha} \int e^{-\frac{4\pi^2}{\alpha}t^2} t^2 dt = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2\pi}\right)^2.$$

Je tedy  $t_2 f_2 = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \cdot \frac{\sqrt{\alpha}}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4\pi}$  a pro  $\Psi(t)$  platí  $\Psi(t) = K' e^{-\frac{t^2}{4t_2^2}}$ . (28)

Bez odvozování uvádíme zde ještě výsledek pro případ druhý, kdy žádáme, aby značka neobsahovala frekvence vyšší než hraniční frekvence  $f_0$ . Řešení je jednodušší než v hořejším případě; odpovídající úloha kvantové mechaniky je problém částičky, volně se pohybující bez působení vnějších sil mezi pevnými stěnami. Řešení má tvar

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= C \cos \frac{\omega}{4f_0} \quad \text{uvnitř intervalu } \langle 0, f_0 \rangle, \\ &= 0 \quad \text{vně } \langle 0, f_0 \rangle, \end{aligned} \quad (29)$$

kde  $C$  je zase normalizační faktor  $\sqrt{\frac{1}{f_0}}$ .

Pro časový průběh máme  $\left(\frac{1}{4f_0} = \frac{T_0}{4}\right)$ :

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{-f_0}^{f_0} \cos \frac{\omega}{4f_0} \cos \omega t df = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \sin \omega \left(t + \frac{T_0}{4}\right) \cdot \frac{1}{t + \frac{T_0}{4}} - \sin \omega \left(t - \frac{T_0}{4}\right) \cdot \frac{1}{t - \frac{T_0}{4}} \right]_0^{f_0}, \end{aligned}$$

odkud dosazením hranic a jednoduchou trigonometrickou transformací dostaneme

$$s(t) = \frac{-T_0 C}{4\pi \left(t^2 - \frac{T_0^2}{16}\right)} \cos \omega_0 t. \quad (30)$$

Uvažovali jsme dosud jen tvar základní, jak se ho užívá v telegrafii stejnosměrné. Obecný případ nosné vlny modulované značkou dostaneme násobením komplexní nosnou  $e^{i(\Omega t - \epsilon)}$ .

Obdobou v kvantové mechanice je řešení vlnové rovnice úplné, na rozdíl od amplitudové rovnice, se kterou jsme se zabývali dosud. Zdánlivá nesrovnalost s některými dříve stanovenými vlastnostmi komplexního signálu vzniká tím, že jsme libovolně stanovili  $t_1 = f_1 = 0$  a v transformačních rovnicích jsme tento posuv zanedbali. Jelikož nás zajímá jen reálný signál, je tento postup ospravedlněn.

Výsledky, kterých jsme dosáhli, je třeba komentovat: Tím, že jsme opustili představu přísně nezávislých informačních prvků, závisí potřebná šířka přenosové cesty na vzájemném ovlivnění, které ještě připouštíme. Toto však jest též závislé na trvání signálu. Pro signály velmi dlouhé je mez přenosové rychlosti  $2f$  logonů za vteřinu (viz výše). Veličiny  $t_2$  a  $f_2$  jsme sice zvolili za míru rozptylu signálu, to však neznamená, že sousední značky a cesty se k sobě dají řadit v tomto odstupu. Jednoduchý výpočet ukazuje, že vzájemné ovlivnění je v takovém případě tak silné, že řádný provoz není možný. Z předchozích úvah víme, že minimální plocha jednoho logonu je  $\frac{1}{2}$ , a můžeme tedy podle Gábora zavést měřítkový činitel  $\sqrt{2\pi}$  a přejít tak k definici

$$\Delta t = \sqrt{2\pi} t_2, \quad (31)$$

$$\Delta f = \sqrt{2\pi} f_2. \quad (32)$$

To jsou pak nejmenší teoreticky možné odstupy, které prakticky ovšem nemůžeme dosáhnout. Volbu ramen momentů druhého řádu jako míru rozptylu signálu exaktně nelze zdůvodnit. Je to obdobné, jako na př. u zákona nejmenších čtverců v počtu vyrovnávacím. Shannonův vzorec (1) je rovněž odvozen za předpokladu periodických signálů. Pro naše účely bylo by tudíž nutné zavést opravu respektující přípustné zakmitávací skreslení. Význam minimisující vlastnosti Gaussovy křivky tkví v tom, že u ní součin  $t_2 f_2$  a tím též  $\Delta f \cdot \Delta t$  dosahuje nejmenší hodnoty a že tudíž dovoluje i nejlepší využití přenosového prostředku. Přístroje s charakteristikou dle této křivky budou mít nejlepší rozlišovací schopnost pro přechodové zjevy.

Rozbor z hlediska fyzikálního najdeme v každé knize o vlnové mechanice. Ve zkratce možno říci, že na místo přesně definovaných okamžiků a kmitočtů Fourierovy analýzy nastupují intervaly středních chyb. Minimálního součinu chyb při současném měření kmitočtu a času se dosahuje přístrojem s charakteristikou dle zvonové křivky. Na místo rozkladu do funkcí trigonometrických nastupují zde Hermite-ovy polynomy, které můžeme v tomto smyslu považovat za generalisaci elementárních funkcí  $\sin$  a  $\cos$ . Očekáváme, že zavedením hořejších pojmů se usnadní též studium čtyřpólů ve stavu přechodovém.

A nyní k praktickým důsledkům: Impulsy tvaru Gaussovy křivky se ovšem přesně vyrábět nedají. Přibližně se dají získat dle [14] pomocí elektronky s exponenciální charakteristikou. Jinak zavrhneme-li elektromechanické

a elektronické prostředky, zbývá vhodné tváření pomocí filtrů jako nejdůležitější praktické řešení.

V dalším označíme filtr s lineární charakteristikou fázovou a s útlumem dle zvonové křivky (v logaritmickém měřítku parabola) jako filtr Gaussovský. Jak se takový průběh dá přibližně dosáhnout, uvedeme později. Pouštíme-li do takového filtru jednotkový impuls (funkce Diracova), získáme signál žádaného průběhu. Prakticky se ovšem skoro vždy pracuje s impulsy o jmenovité délce značky nebo o něco kratší (curbing). Tvar se tím pozmění, zásadní úvahy zůstávají však v platnosti.

Uvažujme tedy zařízení, kde se na vysílací straně pomocí gaussovského filtru vyrábí značka tvaru zvonové křivky. Na přijímací straně se žádaný kanál od ostatních odděluje propustí o vhodné šířce. Vyjdeme z předpokladu gaussovských filtrů na obou stranách. Kombinací dvou takových filtrů v kaskádě vzniká zase gaussovský filtr, jehož ostrost je součtem ostrostí obou. Není lhostejné, jak jsou ostrosti rozděleny. Je-li vysílací filtr široký, rozprostírá se energie příliš daleko a vzniká přeslech do sousedního kanálu. Je-li obráceně přijímací filtr široký, sbírá přijímač příliš mnoho energie ze sousedních cest a též více poruch. Je jasné, že je možné nalézt nejvýhodnější rozdělení a z dlouholetých zkušeností s harmonickou telegrafií víme, že to budou stejné filtry na obou stranách. První systémy pracovaly úplně bez vysílacích filtrů, postupně se zesílila filtrace ve vysílači a u nových zařízení jsou filtry na obou stranách shodné.

Dokažme to matematicky! Buď  $e^{-\frac{f^2}{f'^2}k}$  křivka vysílacího filtru,  $e^{-\frac{f^2}{f'^2}s}$  křivka přijímacího filtru, kde je  $k + s = 1$ . Kmitočtová vzdálenost obou cest nechť je  $f'$ .

Jako míru přeslechu uvažujeme zatím celkovou energii, kterou přijímá jeden kanál ze sousedního, a žádejme, aby tato byla minimální. Vliv vzdálenějších kanálů zanedbáme. Tak obdržíme pro energii

$$\int e^{-\frac{f^2}{f'^2}2k} \cdot e^{-\frac{(f-f')^2}{f'^2}2s} df = e^{-\frac{2f'^2s}{f'^2}} \int e^{-\frac{2f^2}{f'^2} + \frac{4ff's}{f'^2}} df = \sqrt{\frac{\pi}{2}} f' e^{-\frac{2f'^2}{f'^2}(s-s^2)}.$$

Poměr energie vlastního kanálu a přeslechové je tedy roven hodnotě

$$e^{-\frac{2f'^2}{f'^2}(1-s)s}, \quad (33)$$

v logaritmickém měřítku hodnotě

$$-\frac{2f'^2}{f'^2}(1-s)s. \quad (34)$$

Derivováním podle  $s$  zjistíme, že nastane minimum pro

$$s = k = \frac{1}{2}. \quad (35)$$

Dle hořejšího vzorce můžeme též určit odstup pásem pro předepsaný přeslech. Efektivní hodnota přeslechového napětí je

$$E_{p\bar{r}} = -\frac{f'^2}{4\bar{f}^2} + 0,35 \text{ Neper.} \quad (36)$$

(Jelikož přeslech je způsoben dvěma symetricky položenými cestami, přistupuje v hořejší rovnici člen 0,35). Pro předepsaný přeslech na př.  $-5$  N vychází tudíž  $f' \doteq 4,6\bar{f}$ . Je třeba upozornit, že veškeré hodnoty přeslechu a zkreslení jsou stanoveny pro stejné filtry přijímací a vysílací, každý o šířce  $\bar{f}\sqrt{2}$ . V případě běžné telegrafie a impulsových systémů s mžikovým snímáním je důležitější špičková hodnota přeslechového napětí. Zde sousední kanál přijímá spektrum

$$e^{-\frac{f^2}{2\bar{f}^2}} e^{-\frac{1}{2\bar{f}^2}(f-f')^2} = e^{-\frac{f^2}{\bar{f}^2} + \frac{ff'}{\bar{f}^2} - \frac{f'^2}{2\bar{f}^2}}.$$

V časové rovině platí

$$\begin{aligned} e^{-\frac{f^2}{2\bar{f}^2}} \int e^{-\frac{f^2}{\bar{f}^2}} e^{2\pi if \left(t + \frac{f'}{2\pi i \bar{f}^2}\right)} df = \\ = e^{-\frac{f'^2}{2\bar{f}^2}} \sqrt{\pi \bar{f}^2} e^{-\frac{\left(t + \frac{f'}{2\pi i \bar{f}^2}\right)^2}{i^2}}. \end{aligned}$$

Úpravou a použitím vztahu (28) a  $\pi \bar{f} \bar{t} = 1$  dostaneme konečně pro přeslechový signál  $\Psi_{p\bar{r}}$  v sousedním kanálu:

$$\Psi_{p\bar{r}} = e^{-\frac{f'^2}{4\bar{f}^2}} \sqrt{\pi \bar{f}^2} e^{-\frac{t^2}{i^2}} e^{-\frac{1}{2} i \omega' t}. \quad (37)$$

Obalová křivka přeslechového signálu je tedy shodná s původní značkou, její špičková amplituda je  $\frac{f'^2}{4\bar{f}^2}$  N pod úrovní největší amplitudy signálu.

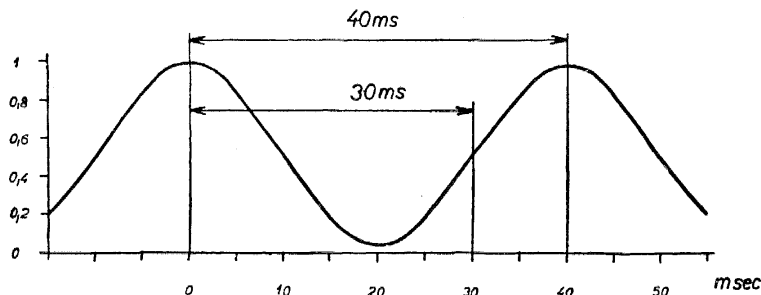
(Činitel  $\sqrt{\pi \bar{f}^2}$  vyskytuje se i u transformace značky samostatné a tudíž neovlivňuje poměr značka—přeslech.) Bereme-li v úvahu ještě působení druhé, symetricky sousedící cesty a nosnou vlnu v rušeném kanálu, poměry se stávají složitějšími. Skutečná velikost rušícího napětí záleží na vzájemné fázi nosných vln a značek. V nejnepříznivějším případě se přeslechy aritmeticky sečtou. Bude to však případ vzácný, s malou pravděpodobností. Považujeme proto hodnotu 0,35 N špičkového přeslechu jednoho kanálu za dostatečně přísnou. Srovnáním s přeslechovým napětím efektivním vidíme, že výrazy jsou shodné. Skutečný vliv přeslechů na jakost přenosu by se dal zjistit pomocí metod počtu pravděpodobnosti a vedl by jistě k méně přísným požadavkům. Bude tedy

$$E_{p\bar{r}, \max} = -\frac{f'^2}{4\bar{f}^2} + 0,35 \text{ Neper.} \quad (38)$$

Nyní je třeba stanovit  $\bar{t}$  jako funkci telegrafní rychlosti. Směrodatný je

způsob vyhodnocení. Provedeme to pro celkový provoz normální telegrafie, ačkoliv zrovna tam se značek zde uvažovaného průběhu sotva užívá.

Telegrafní relé je nastaveno tak, aby přeložilo kotvu při určité amplitudě, obvykle rovné polovině amplitudy špičkové. Pro dobrý chod zařízení musí zkreslení zůstat v značně úzkých mezích. To znamená, že body o poloviční amplitudě musí zachovat stálou vzdálenost, bez ohledu na předešlé značky. (Uvažujeme zde jen „zakmitávající zkreslení“.)



Obr. 1. Gaussický průběh. Dvě po sobě jdoucí značky při  $\bar{t} = 12$  msec.

Pracovní rychlost dálkopisných strojů je normalisována na 50b, t. j. délka značky je 20 msec. Čas, kdy zvonová křivka dosahuje bodu o poloviční amplitudě, plyne z rovnice  $e^{-\frac{t^2}{\bar{t}^2}} = \frac{1}{2}$ , t. j. pro  $t = 10^{-2}$  plyne  $\bar{t} = 1,2 \cdot 10^{-2}$  sec. Zkoumejme, zda-li je vliv vzdálenějších značek zanedbatelný. Přesně vzato, je třeba dokázat, že řada, sestávající z časově posunutých impulsů, konverguje. Omezujme se však na pouhou kontrolu. Vliv impulsu vzdáleného 30 msec (viz obr. 1) je  $\left(\frac{3 \cdot 10^{-2}}{1,2 \cdot 10^{-2}}\right)^2$ , takže amplituda tohoto pulsu v kritickém okamžiku klesla na  $-7,5$  N, a je tedy zanedbatelná.

Vzdálenost pásem pro přeslech  $-5$  N je  $\bar{f} = \frac{1}{\pi \bar{t}} = \frac{1}{3,77 \cdot 10^{-2}} = 26,5$  c/sec a  $f' = 4,6 \cdot 26,5 = 120$  c/sec. Strmost značky v bodě poloviční amplitudy je

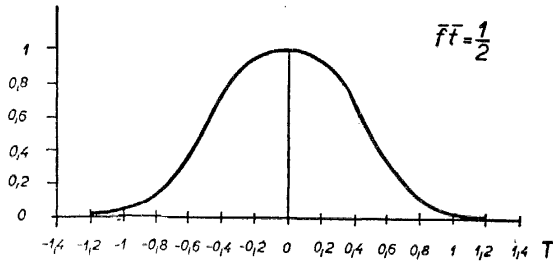
$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{2t}{\bar{t}^2} e^{-\frac{t^2}{\bar{t}^2}}. \quad (39)$$

Dosazením za  $t = 10^{-2}$ ,  $e^{-\frac{t^2}{\bar{t}^2}} = \frac{1}{2}$  dostaneme hodnotu  $7\%/msec$ .

Nastavujeme-li relé na jiný než poloviční amplitudu, a připouštíme-li větší zakmitávací zkreslení, lze poněkud ušetřit na šířce pásma. Na př. pro nastavení na 67% amplitudy a 3% zakmitávacího zkreslení lze pásma položit 90 c/sec od sebe. Nároky na provozní bezpečnost činí však tuto cestu neschůdnou.

Dosud jsme se zabývali idealisovaným případem, který se v telegrafní praxi sotva vyskytuje. Běžně se užívá ke klíčování vysílače obdélníkových impulsů o jmenovité délce značky. Jen v podmorské telegrafii se často užívá zkrácených impulsů. Otázkou nyní je, jak zde působí gaussovský filtr a jak dalece platí idealisované výsledky předešlého odstavce.

Obdélníkovou značku můžeme známým způsobem vyjádřit jako rozdíl dvou schodovitých funkcí. Jelikož Diracův impuls je derivací schodovité funkce, platí dle známého vzorce z počtu operátorového, že



Obr. 2. Značka za gaussovským filtrem.

$$s(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-\left(\frac{t-\tau}{t}\right)^2} d\tau.$$

Položíme-li  $A = \frac{t - \frac{T}{2}}{t}$ ,  $B = \frac{t + \frac{T}{2}}{t}$ , platí

$$s(t) = t \frac{\sqrt{\pi}}{2} [\Phi(B) - \Phi(A)],$$

kde  $\Phi(x)$  znamená dle obvyklého značení Laplace-ův integrál  $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-e^2} d\rho$ .

Je třeba si všimnout, že pro  $x < 0$  nabývá zde  $\Phi$  záporného znaménka. Průběh značky za filtrem je tedy (při amplitudě 1) (viz obr. 2)

$$s(t) = \frac{1}{2} \left[ \Phi\left(\frac{t + \frac{T}{2}}{t}\right) - \Phi\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{t}\right) \right]. \quad (40)$$

Výraz se podobá známému vzorci pro značku za ideální dolnofrekvenční propustí, jenže Laplace-ův integrál nastoupil zde na místo integrálního sinu. Společně oběma je též závada, že předpokládají vlastně znalost budoucna.

Vyplývá to ovšem z požadavku lineárního průběhu fázového, což dle teorie 4-pólů je nevyhnutelně spojené s nekonečným zpožděním.

Pro určení parametru  $\bar{t}$  si vytkneme požadavek, aby v intervalu značky funkce  $\Phi$  dosáhla na př. 95% své asymptotické hodnoty. Tím je určeno zakmitávací zkreslení, jelikož je současně určena strmost. Tomu odpovídá dle tabulek hodnota  $x = 1,39$ ,  $\bar{t} = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{1,39} = 1,44 \cdot 10^{-2}$  sec a příslušné  $\bar{f} = \frac{1}{\pi \bar{t}} = 22,2$  c/sec. Tím je tvar filtru určen. Strmost v bodě poloviční amplitudy je  $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\bar{t}} \cdot \frac{ds}{dx} = \frac{1}{\bar{t}\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ . Pro  $x = 0$  je

$$s'(t) = \frac{1}{t\sqrt{\pi}} = \sqrt{\pi} \bar{f}. \quad (41)$$

Pro hořejší příklad to činí 4%/msec. Zakmitávací zkreslení bude tedy asi 6%. Poměrně malá strmost ovšem činí nastavení relé choulostivým a může způsobit přidavná zkreslení, takže většinou při volbě  $\bar{f}$  rozhodne nutná strmost.

Pro srovnání uvádíme vzorec pro strmost za obdélníkovým n. f. filtrem s hraniční frekvencí  $f_0$ :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t \rightarrow 0} = \frac{1}{\pi} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \text{Sin}(\omega_0 t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \omega_0 t}{\pi t} = 2f_0. \quad (42)$$

Odpovídá to známé poučce, že strmost schodovité funkce za filtrem s lineární fází v bodě  $t = 0$  je úměrná ploše pod útlumovou křivkou. (V lineárním, nikoliv logaritmickém měřítku.)

Kontrola přeslechu špičkového: spektrum značky před filtrem dle známého rozkladu schodovité funkce je  $\frac{1}{\omega} \left( e^{-i\omega \frac{T}{2}} - e^{i\omega \frac{T}{2}} \right) = -2i \frac{\sin \omega \frac{T}{2}}{\omega}$ . Sousední kanál přijme

$$\frac{2\pi i \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega} e^{-\frac{f^2}{2f'^2} - \frac{f^2}{2f'^2} (f-f')^2}$$

Transformací do roviny časové dostaneme

$$e^{-\frac{f'^2}{2f'^2}} \int \left[ \frac{2\pi i \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega} e^{-\frac{f^2}{f'^2} + \frac{ff'}{f'^2} + 2\pi ift} \right] df =$$

$$= e^{-\frac{f'^2}{2f'^2}} \int \left[ \frac{2\pi i \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega} e^{-\frac{f^2}{f'^2} + 2\pi if \left( t + \frac{f'}{2\pi if'^2} \right)} \right] df.$$



Člen  $\frac{f'}{2\pi i f^2}$  dává jen posuv v komplexní rovině rovině časové. Zbývající část integrálu jsme už vypočetli jinou cestou. Dostaneme tedy výraz shodný se vzorcem (37)

$$E_{pt. \max} = -\frac{f'^2}{4f^2} + 0,35 N.$$

Obalová křivka přeslychající značky jest shodná se značkou v původním kanálu. Efektivní hodnota přeslechového napětí, vztažená na efektivní hodnotu signálu je stejná jako špičková.

U tónové telegrafie je vzdálenost pásem předepsána 120 c/sec. Je nutné volit  $\bar{f}$  tak, aby celkové zkreslení bylo co nejmenší. Zvýšením  $\bar{f}$  roste přeslech, snížením zase zakmitávací zkreslení. Pro cca 1,5 % přeslechu vyjde  $\bar{f} = 28$  c/sec a  $t = 1,12 \cdot 10^{-2}$ . Z toho se vypočte zakmitávací zkreslení asi 1,2 %. S ohledem na poznámku při určení přeslechu jeví se výhodné, volit větší přeslech a menší zakmitávací dobu.

Srovnajme tyto výsledky zase s ideálním filtrem obdélníkovým o šířce  $1,6f_z \doteq 40$  c/sec. Průběh značky za takovým filtrem sleduje, jak známo, křivku integrálního sinu  $K \text{Sin}(\omega_0 t)$ . Asymptotická jeho hodnota je  $\frac{\pi}{2}$  a funkce blíží se jí oscilačně. První použitelný bod průchodu asymptotickou hodnotou je pro  $\omega_0 t \doteq 4,9$ ; je-li  $t_1 = \frac{1}{2f_z}$ , je dále  $\omega_0 t = \frac{2\pi f_0}{2f_z} = 4,9$  a  $f_0 = 1,56f_z \doteq 1,6f_z$ . Chceme-li nejmenší zakmitávací zkreslení, je výhodné volit hraniční frekvenci tak, aby se konec značky kryl s průchodem výsledného průběhu za filtrem asymptotickou hodnotou. Odtud plyne známá podmínka pro hraniční frekvenci

$$f_0 = 1,6f_z. \quad (43)$$

Teoreticky je toto minimum značně ostré a už malé odchylky by daly poměrně značné zkreslení. Prakticky je tu stejně možné jen dosti hrubé přiblížení a na přesnosti příliš nezáleží. Přeslech do sousedního kanálu při ideálním filtru je ovšem nulový.

V závěru chceme zkoumat možnosti zúžení přenosových cest, resp. zvýšen. rychlosti. Musíme rozlišit frekvenční šířku signálu a pásmo potřebné pro přenosí. Poslední je vždy širší, jelikož naše filtry jsou jen aproximací ideálních a obzvláště nelinearita fázová působí silné zkreslení. Dále je třeba bráti ohled na dosažitelnou stabilitu jak filtrů, tak oscilátorů. U bezdrátových přenosů je často možné ušetřit na pásmu zvýšením výkonu. Na druhé straně se u některých druhů modulace často obětuje frekvenční prostor pro zlepšení poruchového poměru. Z hlediska využití spektra se jeví jako nejvýhodnější systém binární s pevným synchronismem, odvozeným přímo ze signálu s vyhodno-

cením mžikovým pomocí úzkých bránových pulsů. Jest zde ovšem třeba uvážit, že příliš úzké snímací pulsy přijímají více poruch než širší, kde se vyšší složky šumu aspoň částečně ruší [11]. Tyto myšlenky jsou z velké části uskutečněny v pokusném zařízení kodové modulace firmy Bell [12]. Zda-li určitý systém je skutečně výhodný, záleží ovšem na řadě jiných činitelů a obzvláště u bezdrátových přenosů je třeba velmi pečlivého zvážení výhod a nevýhod. Pro drátové přenosy se však úspora kmitočtového pásma jeví jako zřetel nejdůležitější a jelikož hladina poruch bývá poměrně nízká, zdá se nám, že by se úspora dala pohnat dosti daleko.

Dálnopisný stroj snáší zkreslení řádu 40 %, aniž by došlo k omylům. Zkreslení se však na cestě mohou sčítat nepravidelným způsobem a pro dodržení dostatečné provozní bezpečnosti omezují předpisy zkreslení u tónových telegrafů na 10 %. Systém shora naznačený by současně působil jako odzkreslovač a předával by vždy nezkreslené impulsy. Se zkreslením vlastního zařízení mohlo by se tudíž jít dosti vysoko, tak aby byla ještě zaručeno provozní jistota pro chod koncového relé, elektronkového, neb elektromechanického. Skoro podobné výhody při jednodušší sestavě vykazují systémy regenerativní, bez pevného synchronismu mezi vysílačem a přijímačem. (Na př. kombinace běžné tónové telegrafie s odzkreslovačem elektronkovým, neb mechanickým.)

Jako ilustraci uvádíme číselný příklad: žádáme, aby nejsilnější ovlivnění koncového relé značkami sousedícími v čase neb frekvenci bylo nejméně 1 N pod úrovní vlastní značky. Pro zjednodušení počítáme s gaussovskými impulsy. Zakmitávací zkreslení způsobené přímo předcházející a následující značkou se sčítají. Účinky zakmitání filtrů a přeslechů sečteme v kvadratuře, z důvodů dříve uvedených pro sečtení přeslechů. Budou-li oba efekty řádově stejné velikosti, musí přeslech být menší než  $-1,35 N$  a přeslech z jiného kanálu menší než  $-1,7 N$ . „Přeslech časový“ t. j. poměrná amplituda předešlé značky v okamžiku vyhodnocení další, má být menší než  $-2,05 N$ . Je-li  $T$  interval značek, vychází (číselné výsledky platí pro 50b)

$$\bar{i} = \frac{T}{\sqrt{2,05}} = 1,4 \cdot 10^{-2}, \quad \bar{j} = \frac{1}{\pi t} = 22,8,$$

$$f' = 2f \sqrt{1,7} = 2,4f_z = 60 \text{ c/sec},$$

kde  $f_z$  značí jako vždy základní opakovací frekvenci, t. j. 25 c/sec při 50b. Frekvence 60 c/sec by byla tudíž nejmenší vzdáleností pásem pro přijatelný přenos 50b. Prakticky z dříve uvedených důvodů je třeba volit odstupy větší, zdá se nám však, že by mohly být podstatně menší, než dnes užívaných 120 c/sec. Jelikož bude dosti těžké tuto normalisovanou vzdálenost měnit, je možné volit východisko v tom, že se z dvou cest s odstupem 120 c/sec utvoří jedna cca 200 c/sec široká a nechají se na ní pracovat tři dálnopisy v časové multiplikaci (podobně BAUDOT). Na bezdrátových přenosech se pracuje dnes dle

amerických pramenů [11] při amplitudové modulaci se vzdáleností pásem asi  $4f_z$ .

Pro srovnání propočítejme ještě nejmenší teoreticky možný odstup:

$$T = \sqrt{2\pi} \frac{\bar{t}}{2}; \quad \bar{f} = \frac{1}{\pi \bar{t}} = \frac{2f_z}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{a} \quad f' = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \bar{f} = f_z.$$

Přeslech jednoho kanálu je  $-\frac{f_z^2}{4^2 f_z^2} 2\pi = -\frac{\pi}{8}$  Neper, „přeslech časový“  $\frac{T^2}{\bar{t}^2} + 0,7 = -\frac{\pi}{2} + 0,7$  Neper, takže úhrnem je přeslech  $-\frac{\pi}{8} + 0,35 \doteq 0$  Neper.

Jak se dalo očekávat, jde o mezní případ, kdy pravidelný provoz není už možný. Jsou známa zapojení, kterými se přenosové pásmo dá zúžit až blízko teoretickému minimu. Jsou však značně nákladná, složitá a v praxi se neujala. V zásadě jde o využití a priori znalosti přesné doby a tvaru impulsu. Tím je možné část spektra ve vysílači potlačit a v přijímači opět přidat. Do určité míry podobných způsobů se užívá v podmořské telegrafii.

Mohlo by se zdát, že výhodnější bude, když uspořádáme ve vysílači gaussovský filtr, který by převzal celé tváření značky a přibližně obdélníkový filtr v přijímači a to hlavně pro zmenšení přeslechu. Přijímací filtr ovšem musí mít takovou šíři, aby už neovlivnil podstatně tvar značky. To předpokládá šířku nejméně  $3f_z$ . Kdyby se obdélníkový filtr s průměrnou strmostí dal provést, mohly by se propustné oblasti filtru částečně překrývat aniž by přeslechy byly nesnesitelné a vzdálenost cest blízka minimu by byla uskutečnitelná. Aproximace obdélníkových filtrů, pokud se dají řešit rozumným nákladem, mívají však takový průběh boků v blízkosti hraniční frekvence, že tato výhoda padá. Přeslechové poměry skutečně naměřené jsou asi tytéž jako u gaussovských filtrů na obou stranách, které při tom mají výhodu, že přijímají méně energie poruchové.

Výhoda gaussovských filtrů tkví v tom, že se dají s rozumným nákladem přibližně realizovat a že se pak dají k sobě řadit s odstupem jen málo větším než teoreticky spočteným. U aproximací obdélníků je vždy nutná poměrně značná mezera mezi jmenovitými hraničními frekvencemi. Tak, ačkoli teoretické odstupy jsou jen málo odlišné, gaussovský filtr dovoluje značně větší využití frekvenčního prostoru.

Ještě slovo k možnostem provedení gaussovského filtru. ROBERTS a SIMMONDS [15] uvádějí řešení pomocí přemoštěných  $T$ -článků.

Pro uspokojivé přiblížení je zapotřebí nejméně 8 článků, je to tedy řešení poměrně nákladné. Jiná možnost je provedení s t. zv. maximálně plochým filtrem (t. j. filtr s takovou křivkou útlumu, že všechny její derivace ve středu

pásma vymizí), v serii s rezonančním obvodem, vhodně odděleným. Též řazení většího počtu rezonančních obvodů za sebou, ovšem oddělených isolačními stupni, dává dobrý průběh útlumu i fáze a užívá se často na u. k. v. Na nižších frekvencích často vyhovuje obyčejný můstkový filtr dvoučlankový. Průběh jeho se dá zlepšit vhodně volenými činiteli  $Q$  obvodů.

#### SEZNAM LITERATURY

- [1] *Shannon*: A Mathematical Theory of Communication; BSTJ, 1948, XII. a 1949, I.
- [2] *Küpfmüller*: Übergangsvorgänge in Wellenfiltern; ENT, 1924, I.
- [3] *Nyquist*: Certain Factors, Affecting Telegraph Speed; BSTJ, 1924, III.
- [4] *Mac Kay*: Quantal Aspect of Scientific Information; Philosophical Magazine, 1950, III.
- [5] *D. Gabor*: Theory of Communications; JIBEE, 1946, XI, Part III.
- [6] *R. B. Dome*: Wide-band Phase-shift Networks; Electronics, 1946, XII.
- [7] *R. Cheek*: A Simple Single-sideband Carrier System; Westinghouse-Engineers, 1945, XII.
- [8] *K. W. Wagner*: Operatorenrechnung in Physik und Technik; Verl. Bartl, Leipzig.
- [9] Technický průvodce, sv. I. Matematika.
- [10] Technický průvodce, sv. XIX. Matematické a statistické tabulky, 1. díl.
- [11] *C. B. Feldman, W. R. Bennett*: Bandwidth and Transmission Performance; BSTJ, 1949, III.
- [12] *L. A. Meacham, E. Peterson*: An Experimental Multichannel Pulse Code Modulation System of Toll Quality; BSTJ, 1948, I.
- [13] *George A. Campbell, Ronald M. Foster*: Fourier Integrals for Practical Applications.
- [14] *F. F. Roberts, J. C. Simmonds*: Some Properties of a Special Type of Electrical Pulse; Philosophical Magazine, 1943, XII, str. 822.
- [15] *F. F. Roberts, J. C. Simmonds*: The Physical Realizability of Electrical Networks Having Prescribed Characteristics with Particular Reference to those of the Probability-function Type; Philosophical Magazine, 1944, XI, str. 776.

#### Резюме

#### К ТЕОРИИ ТЕЛЕГРАФНОЙ ПЕРЕДАЧИ

†БЕДРЪИХ ГОЛЬДШМИД († Bedřich Goldschmied)

(Поступило в редакцию 8/I 1957 г.)

Статья посвящается некоторым вопросам телеграфной передачи. В введении даются определения некоторых понятий, например, квантование известий и принцип неопределенности, аналогичных соответствующим понятиям квантовой физики.

Затем решается следующая задача: установить форму сигнала так, чтобы его эффективная длительность была по возможности самой короткой, причем „энергия“ сигнала равнялась бы единице, а взвешенная средняя полоса частот принимала бы наперед заданное значение. Показано, что решением этой проблемы служит сигнал, имеющий форму гауссовой кривой. В связи с этим рассматриваются некоторые вопросы переходного сигнала и дисторзии.

В заключение проводится разбор полученных результатов с точки зрения максимального использования путей передачи.

### Summary

#### ON THE THEORY OF TELEGRAPH TRANSMISSION

† BEDŘICH GOLDSCHMIED

(Received January 8, 1957.)

This article treats some questions in the theory of telegraph transmission. First some notions are formulated, such as quantisation of a signal, and the uncertainty principle — analogous to certain notions of quantum theory.

Then the following problem is solved: To determine the form of a signal such that its effective period be minimum, that the “energy” of the signal be unity, when the weighted mean frequency breadth is given. It is shown that a signal in the form of a Gaussian curve is a solution. Some questions concerning cross-talk and distortion are then examined.

In conclusion the author discusses these results from the view-point of maximal exploitation of transmission lines.