Aplikace matematiky

Ivo Marek

Užití maticové methody v mnohoskupinové theorii difuse neutronů

Aplikace matematiky, Vol. 3 (1958), No. 2, 141–149

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102611`

UŽITÍ MATICOVÉ METHODY V MNOHOSKUPINOVÉ THEORII DIFUSE NEUTRONŮ

IVO MAREK

(Došlo dne 23. dubna 1957.)

DT: 539.185.5:512.831
621.039.4.01

V práci je podáno řešení úlohy kritického poloměru kulově souměrného n-pásmového jaderného reaktoru. Při mnohoskupinové formulaci úlohy je použito maticové methody, která je pro praktický výpočet výhodná v případě, že počet skupin neutronů l není příliš velký ($l \leq 4$). Počet pásem, který se v praxi obvykle vyskytuje, obtížnost výpočtu podstatně nestupňuje.

1. Úvod

V mnohoskupinové theorii difuse neutronů lze převést některé úlohy na řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Z theorie soustav lineárních rovnic jsou známy různé methody k určení obecného řešení každé takové soustavy. Jestliže však jsou řešení těchto soustav vázána okrajovými podmínkami, jimž musí vyhovovati, je důležitá volba nejvhodnější methody k určení řešení. V tomto článku ukážeme na řešení jedné úlohy difusní theorie jaderných reaktorů, jak lze výhodně použít maticového počtu. Na možnost použití maticového počtu při řešení podobných úloh bylo poukázáno v práci [1].

2. Formulace úlohy

Hledáme hodnotu R_N a řešení n soustav diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty

$$\psi'_{jk}(r) = \sum_{h=1}^{m} c_h^{(k)} \psi_{hk}^{(r)} , \quad j = 1, \ldots, m, \; k = 1, \ldots, n , \tag{1}$$

v maticovém tvaru řešení rovnice

$$\mathbf{V}'_k(r) = \mathbf{M}_k \mathbf{V}_k(r) , \quad r \in \langle R_{k-1}, R_k \rangle , \quad R_0 \geq 0 , \tag{2}$$

takové, aby

$$1)\qquad R_{N-1} < R_N < R_{N+1}\,,\quad 1 \leqq N \leqq n\,, \tag{3}$$

$$2)\qquad \mathbf{V}_1(R_0) = \mathbf{V}_0 = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_l \\ \Psi_{l+1} \\ \vdots \\ \Psi_m \end{bmatrix},\quad 1 \leqq l < n\,, \tag{4}$$

$$3)\qquad \mathbf{V}_{k+1}(R_k) = \mathbf{U}_k \mathbf{V}_k(R_k)\,,\quad k = 1, 2, \ldots, n-1\,, \tag{5}$$

$$4)\qquad \mathbf{V}_n(R_n) = \mathbf{N}_n \mathbf{V}_n(R_n)\,, \tag{6}$$

kde $R_1, \ldots, R_n$ jsou s výjimkou R_N předem zvolená kladná čísla, vyhovující nerovnostem

$$R_0 \leqq R_1 < \ldots < R_n\,. \tag{7}$$

$\mathbf{M}_k$, $\mathbf{U}_k$, $\mathbf{N}_n$ jsou čtvercové matice stupně m, $\mathbf{M}_k$ a $\mathbf{U}_k$ pro $k \neq N$ jsou matice konstantní, $\mathbf{N}_n$ a $\mathbf{U}_n$ pro $k = N$ závisejí na R_N, při čemž prvky těchto matic jsou obecně komplexní čísla. Hledané funkce ψ_{jk} jsou komplexními funkcemi reálné proměnné r v $(0, +\infty)$. Funkce ψ_{jk} jsou prvky matic

$$\mathbf{V}_k(r) = \begin{pmatrix} \psi_{1k}(r) \\ \vdots \\ \psi_{mk}(r) \end{pmatrix} \tag{8}$$

a $\mathbf{V}_k'(r)$ je derivací matice (8) jejímiž prvky jsou derivace příslušných veličin matice $\mathbf{V}_k(r)$. Pro hodnoty $\Psi_1, \ldots, \Psi_l, \Psi_{l+1}, \ldots, \Psi_m$ ve výrazu (4) platí vztah:

$$\hat{\mathbf{\Psi}} = \mathbf{H}\mathbf{\Psi}\,, \tag{9}$$

kde

$$\hat{\mathbf{\Psi}} = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_l \end{pmatrix},\quad \mathbf{\Psi} = \begin{pmatrix} \Psi_{l+1} \\ \vdots \\ \Psi_m \end{pmatrix},\quad |\Psi_j| < +\infty \tag{10}$$

a matice $\mathbf{H}$ je konstantní obdélníková matice typu l, $m - l$.

Poznámka. Jak je patrno z formulace, není tato úloha ani obvyklým okrajovým problémem ani úlohou Cauchyova typu. Bude proto řešení této úlohy zajímavé nejen po stránce praktické, ale i po stránce matematické.

3. Řešení úlohy

Nazveme k-tým pásmem množinu bodů r, pro které platí nerovnosti

$$R_{k-1} \leqq r \leqq R_k$$

Podle známých vět z theorie soustav lineárních rovnic (viz [2], hlava 2, str. 77) existuje právě jedno řešení rovnice (2) v prvním pásmu, které vyhovuje podmínce (4). Předpokládáme zatím, že $\Psi_{l+1}, \ldots, \Psi_m$ jsou jisté konstanty a určíme v následujícím podmínky, jimž musí vyhovovati. Toto řešení je dáno výrazem

$$\mathbf{V}_1(r) = \exp\{\mathbf{M}_1(r - R_0)\}\, \mathbf{V}_0 \,. \tag{11}$$

Definice a vlastnosti funkcí, jejímiž argumenty jsou matice, nalezne čtenář v knize [3] v hlavě 5.

Podle již zmíněného tvrzení existuje právě jedno řešení rovnice (2) s $k = 2$ jež vyhovuje pro $r = R_1$ počáteční podmínce

$$\mathbf{V}_2(R_1) = \mathbf{U}_1 \mathbf{V}_1(R_1)$$

Toto řešení je podobně jako (11) dáno výrazem

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_2(r) &= \exp\{\mathbf{M}_2(r - R_1)\}\, \mathbf{V}_2(R_1) = \\ &= \exp\{\mathbf{M}_2(r - R_1)\}\, \mathbf{U}_1 \exp\{\, \mathbf{M}_1(R_1 - R_0)\}\, \mathbf{V}_0 \,. \end{aligned} \tag{12}$$

Výrazy (11) a (12) jsou řešeními rovnic (2) při $k = 1$ a $k = 2$, které vyhovují podmínkám (4) a (5) s $k = 1$.

Při stejném postupu v dalších pásmech lze dokázati, že pro všechna k, $k = 1, 2, \ldots, n$ je řešení v k-tém pásmu dáno výrazem

$$\mathbf{V}_k(r) = \exp\{\mathbf{M}_k(r - R_{k-1})\{\, \mathbf{U}_{k-1} \ldots \mathbf{U}_1 \exp\{\mathbf{M}_1(R_1 - R_0)\}\, \mathbf{V}_0 \,. \tag{13}$$

Obecně však nebude splněna podmínka (6). Tuto podmínku lze pomocí (13) s $k = n$ zapsati takto:

$$\mathbf{T}_n(R_N)\, \mathbf{V}_0 = \mathbf{N}_n \mathbf{T}_n(R_N)\, \mathbf{V}_0 \,, \tag{14}$$

kde $\mathbf{T}_n(R_N)$ je funkcí hledaného R_N:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_n(R_N) = \exp\{\mathbf{M}_n(R_n - R_{n-1})\}\, \mathbf{U}_{n-1} \ldots \mathbf{U}_N \exp\{\mathbf{M}_N(R_N - R_{N-1})\} \ldots \mathbf{U}_1 \exp\,. \\ .\{\mathbf{M}_1(R_1 - R_0)\}\, \mathbf{V}_0 \,. \end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že konstanty $\Psi_{l+1}, \ldots, \Psi_m$ musí býti řešením soustavy lineárních rovnic (14). Položíme-li

$$\mathbf{T}_n(R_N) = (\mathbf{T}_{1n}(R_N)\; \mathbf{T}_{2n}(R_N)) \,,$$

$$\mathbf{N}_n \mathbf{T}_n(R_N) = (\mathbf{S}_{1n}(R_N)\; \mathbf{S}_{2n}(R_N)) \,,$$

kde $\mathbf{T}_{1n}(R_N)$ a $\mathbf{S}_{1n}(R_N)$ jsou obdélníkové matice typu m, l, $\mathbf{T}_{2n}(R_N)$ a $\mathbf{S}_{2n}(R_N)$ obdélníkové matice typu $m, m - l$, vidíme, že soustava (14) je vzhledem k (9) ekvivalentní se soustavou následující:

$$\{[\mathbf{T}_{1n}(R_N) - \mathbf{S}_{1n}(R_N)]\, \mathbf{H} + [\mathbf{T}_{2n}(R_N) - \mathbf{S}_{2n}(R_N)]\}\, \mathbf{\Psi} = \mathbf{O} \,, \tag{15}$$

z čehož činíme tyto závěry: Úloha bude míti nenulové řešení pouze tehdy, bude-li existovati nenulové řešení $\mathbf{\Psi}$ rovnice (15). K existenci takové matice $\mathbf{\Psi}$ je nutné a stačí, aby matice soustavy (15) měla hodnost menší než $m - l$,

t. j. aby všechny $(m - l)$-řadové determinanty této matice byly rovny nule. Tím jsme obdrželi podmínku pro R_N, neboť uvedenou podmínku lze realisovati při vhodném R_N. Shrneme tedy docílený výsledek:

Nenulové řešení úlohy vytčené v § 2. existuje právě když existuje takové R_N, pro něž platí (3), které anuluje všechny determinanty stupně $m - l$ matice soustavy (15). Toto řešení je dáno v k-tém pásmu výrazem (13), při čemž konstanty $\Psi_{l+1}, \ldots, \Psi_m$ musí být řešením soustavy (15) a lze tedy alespoň jednu z nich voliti libovolně.

4. Kritický rozměr jaderného reaktoru

V mnohoskupinové difusní theorii jaderných reaktorů se vyšetřují soustavy diferenciálních rovnic s reálnými konstantními koeficienty (viz [4] a [6])

$$\Delta\Phi_{jk}(x, y, z) + \sum_{h=1}^{l} a_{jh}^{(k)}\Phi_{hk}(x, y, z) = 0\,, \tag{16}$$

kdež $\Phi_{jk} = \Phi_{jk}(x, y, z)$ značí neutronový tok j-té energetické skupiny v k-tém pásmu reaktoru a konstanty $a_{jh}^{(k)}$ popisují difusní vlastnosti v k-tém pásmu reaktoru pro skupiny neutronů (j, h). Pro kulově souměrný jaderný reaktor lze tyto soustavy převésti obvyklými formálními úpravami na tvar soustav (1) resp. (2) s okrajovými podmínkami (4), (5), (6). V tomto případě je

$$m = 2l\,,$$

kde l znamená počet energetických skupin neutronů.

Matice

$$\mathbf{M}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{A}_k & \mathbf{O} \end{pmatrix}$$

při čemž $\mathbf{O}$ je nulová, $\mathbf{E}$ jednotková matice, obě jsou stupně l a

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & \ldots\ldots & a_{1l}^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{l1}^{(k)} & \ldots\ldots & a_{ll}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Dále pak

$$\mathbf{U}_k = \begin{bmatrix} \alpha_{1k} \ldots\ldots\ldots & 0 & 0 \ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 \ldots\ldots\ldots & \alpha_{lk} \ldots\ldots & 0 \ldots\ldots 0 \\ \dfrac{1}{R_k}(\alpha_{1k} - \beta_{1k}) \ldots\ldots & 0 \ldots\ldots\ldots & \beta_{1k} \ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 \ldots\ldots\ldots & \dfrac{1}{R_k}(\alpha_{lk} - \beta_{lk}) & 0 \ldots\ldots \beta_{lk} \end{bmatrix}$$

a

$$\boldsymbol{N}_n = \begin{bmatrix} 0 \ldots\ldots 0 & \mu_{1n} \ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots\ldots 0 & 0 \ldots\ldots \mu_{ln} \\ 0 \ldots\ldots 0 & 1 \ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots\ldots 0 & 0 \ldots\ldots 1 \end{bmatrix}$$

kde α_{jk}, β_{jk} jsou určité kladné jaderné konstanty, výrazy μ_{jn} jsou reálné a závisí na R_N.

Jestliže $R_0 = 0$, je

$$\boldsymbol{V}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_l \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Psi} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_l \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{O}, \tag{17}$$

při čemž $\Phi_1 = \Phi_{11}(0), \ldots, \Phi_l = \Phi_{l1}(0)$ jsou konečné a značí hodnoty neutronového toku j-té skupiny ve středu reaktoru. Podobně jako v paragrafu 3 je zatím blíže neurčujeme.

Množina bodů kulově souměrného reaktoru, pro jejichž průvodiče r platí nerovnosti $R_{k-1} \leq r \leq R_k$, kde $R_1, \ldots, R_n$ vyhovují nerovnostem (3) a (7), se nazývá k-tým pásmem kulově souměrného reaktoru. Jak jsme naznačili v paragrafech 2 a 3 je při řešení rovnic typu (16) s hlediska výpočtu jaderného reaktoru třeba najít tvar funkcí Φ_{jk} a jednu z hodnot, R_h jež opět označíme R_N. Podle přijaté terminologie v theorii reaktorů můžeme tuto hodnotu nazvati kritickým rozměrem aktivního pásma. Protože aktivních pásem může míti daný reaktor několik, je zřejmé, že ani pevně zvolené hodnoty $R_1, \ldots, R_{N-1}$, $R_{N+1}, \ldots, R_n$ nemohou být zcela libovolné. O tom se ostatně ještě zmíníme na příslušném místě.

Z výsledků paragrafu 3 plyne, že řešení je v k-tém pásmu reaktoru dáno výrazem (13) a matice $\boldsymbol{\Psi}$ vyhovuje podle (17) a (15) rovnici

$$\{\boldsymbol{T}_{2n}(R_N) - \boldsymbol{S}_{2n}(R_N)\}\, \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{O}\,. \tag{18}$$

Soustava (18) je ekvivalentní se soustavou

$$\{\boldsymbol{T}_{3n}(R_N) - \boldsymbol{N}_{1n}\boldsymbol{T}_{4n}(R_N)\}\, \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{O}\,, \tag{19}$$

položíme-li

$$\boldsymbol{T}_{2n}(R_N) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{T}_{3n}(R_N) \\ \boldsymbol{T}_{4n}(R_N) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{N}_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{N}_{1n} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix},$$

kde $\boldsymbol{T}_{3n}(R_N)$, $\boldsymbol{T}_{4n}(R_N)$, $\boldsymbol{N}_{1n}$ jsou v tomto případě čtvercové matice stupně l.

Aby existovalo nenulové řešení soustavy (19) je nutné a stačí, aby determinant této soustavy byl roven nule, tedy

$$|\mathbf{T}_{3n}(R_N) - \mathbf{N}_{1n}\mathbf{T}_{4n}(R_N)| = 0 , \tag{20}$$

což je podmínkou pro kritický rozměr.

V případě, že má rovnice (20) více kořenů, pro které platí (3), pak nejmenší z nich se nazývá kritickým poloměrem jaderného reaktoru.

Je-li pro určitá s a t, $1 \leqq s, t \leqq l$

$$\begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1t-1} & p_{1t+1} & \cdots & p_{1l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{s-11} & \cdots & p_{s-1t-1} & p_{s-1t+1} & \cdots & p_{s-1l} \\ p_{s+11} & \cdots & p_{s+1t-1} & p_{s+1t+1} & \cdots & p_{s+1l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{l1} & \cdots & p_{lt-1} & p_{lt+1} & \cdots & p_{ll} \end{vmatrix} \neq 0 , \tag{21}$$

při čemž p_{jh} jsou prvky determinantu $|\mathbf{T}_{3n}(R_N) - \mathbf{N}_{1n}\mathbf{T}_{4n}(R_N)|$ pro kritickou hodnotu R_N, existuje právě jedno řešení soustavy (19) při pevně zvolené hodnotě Φ_s. Obdrželi jsme tedy následující výsledek:

Kritický poloměr kulově souměrného jaderného reaktoru R_N je nejmenším kořenem rovnice (20), pro který platí vztah (3). Neutronový tok Φ_{jk}, který obdržíme snadnými úpravami ze vzorců (13) s hodnotami $\Phi_1, \ldots, \Phi_l$ ve středu reaktoru, závisí za předpokladu (21) na jediné, t. zv. normovací konstantě Φ_s.

Poznámka. Protože neutronový tok nemůže být záporný, je zřejmě nutné omeziti se při volbě veličiny Φ_s pouze na hodnoty kladné. Z téhož důvodu musí být kladné i ostatní veličiny Φ_j a vůbec funkce $\Phi_{jk}(r)$, které mají význam neutronového toku v příslušných intervalech. Tyto požadované vlastnosti funkcí neutronového toku odpovídají speciálním hodnotám konstant $a_{jh}^{(k)}$, $\varkappa_{jk}$, β_{jk} a pod. jaderných konstant a jsou při tom zajištěny reálností fysikálních procesů, které v reaktoru probíhají.

5. Rozbor řešení a postup při numerickém výpočtu

Jak již bylo poznamenáno v paragrafu 4 nelze v případě jaderného reaktoru voliti poloměry R_k zcela libovolně. Žádáme, aby pro poloměr prvního pásma platila nerovnost

$$R_1 < \widehat{R}_1$$

kde $\widehat{R}_1$ je nejmenším kořenem rovnice (20) pro $n = N = 1$, pro který platí $R_1 > R_0$, jestliže takový kořen vůbec existuje. V případě, že rovnice (20) nemá žádný reálný kořen, neklademe na R_1 žádný jiný požadavek, než aby $R_1 > R_0$. Pro poloměr druhého pásma žádáme splnění nerovnosti

$$R_2 < \widehat{R}_2$$

kde $\hat{R}_2$ je nejmenším kořenem rovnice (20) při $n = N = 2$, jestliže existuje jinak opět neklademe na R_2 žádné jiné omezení, než aby $R_2 > R_1$. Splnění obdobných podmínek požadujeme ve všech n pásmech. Tato omezení rozměrů jednotlivých pásem reaktoru odpovídají fysikálním požadavkům, aby jednak všechna aktivní pásma s výjimkou pásma N-tého byla podkritická a reaktor se stal kritickým až při vhodném rozměru N-tého pásma, jednak tomu, že rozměry neaktivních pásem reaktoru mohou být libovolné. Poloměry R_k $(1 \leq k \leq n)$, které vyhovují výše uvedeným podmínkám se nazývají fysikálně přípustnými poloměry. Má tedy hledání kritického rozměru R_N smysl pouze tehdy, když všechny ostatní poloměry jsou fysikálně přípustné, čímž je třeba doplniti formulaci úlohy pro případ jaderného reaktoru.

Výpočtem musíme tedy stanoviti pro každé pásmo fysikálně přípustný poloměr a dále pak udati rozložení neutronového toku. Jak vyplývá z průběhu řešení úlohy v paragrafu 3, stačí udati postup řešení obou těchto úkolů pouze pro jedno pásmo. K určení neutronového toku v k-tém pásmu stačí zjistit matici $\exp\{\boldsymbol{M}_k(r - R_{k-1})\}$. K stanovení této matice potřebujeme znáti kořeny minimálního polynomu matice $\boldsymbol{M}_k$, který označíme $\psi_k(\lambda)$. Protože se v praxi vyskytuje převážně případ, kdy je minimální polynom totožný s polynomem charakteristickým, budeme se podrobněji zabývat pouze tímto případem. K výpočtu charakteristického polynomu matice $\boldsymbol{M}_k$ se v uvedeném případě používá Krylovovy transformace charakteristického determinantu (viz [3], hlava 7, str. 168), jež má tu výhodu, že se proměnná λ vyskytuje pouze v jediném sloupci transformovaného determinantu. Rozložíme-li charakteristický polynom na lineární činitele, bude

$$\psi_k(\lambda) = (\lambda - \lambda_1^{(k)})^{q_1} \dots (\lambda - \lambda_s^{(k)})^{q_s}$$

při čemž $\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_s^{(k)}$ jsou právě všechny od sebe různé kořeny a $q_1, \dots, q_s$ příslušné násobnosti. Hledanou matici $\exp\{\boldsymbol{M}_k(r - R_{k-1})\}$ můžeme potom určiti pomocí t. zv. základní formule pro $f(\boldsymbol{M}_k)$ (viz [3], hlava 5, str. 90):

$$f(\boldsymbol{M}_k t) = \sum_{h=1}^{s} \{f(\lambda_h^{(k)} t)\, \boldsymbol{Z}_{h1}^{(k)} + f'(\lambda_h^{(k)} t)\, \boldsymbol{Z}_{h2}^{(k)} + \dots + f^{(q_h-1)}(\lambda_h^{(k)} t)\, \boldsymbol{Z}_{hq_h}^{(k)}\}\,, \qquad (22)$$

kde f je jakákoliv funkce definovaná alespoň na spektru matice $\boldsymbol{M}_k$. $\boldsymbol{Z}_{hj}^{(k)}$ jsou určité čtvercové matice, jejichž tvar závisí pouze na matici $\boldsymbol{M}_k$, nikoliv na funkci f a nazývají se komponentami matice $\boldsymbol{M}_k$. Jedna z metod ke stanovení komponent matice $\boldsymbol{M}_k$, uvedená v knize [3] na str. 93, vede na určení řešení soustavy lineárních rovnic hodnosti m, jíž komponenty $\boldsymbol{Z}_{hj}^{(k)}$ vyhovují.

Po určení komponent $\boldsymbol{Z}_{hj}^{(k)}$ sestrojíme matici $\exp\{\boldsymbol{M}_k(r - R_{k-1})\}$ tak, že použijeme vzorce (22) s funkcí $f(z) = \exp\{z\}$. Snadnými úpravami obdržíme potom kritickou rovnici (20) pro $n = N = k$. Při řešení této rovnice mohou nastati tyto případy. Za prvé: existuje kořen R této rovnice, pro nějž platí nerovnost $R > R_{k-1}$. Lze potom zvoliti R_k tak, aby $R_{k-1} < R_k < \widehat{R}_k$, kde $\widehat{R}_k$ je nejmenší z kořenů R, pro něž zmíněná nerovnost platí.

Za druhé: Rovnice (20) nemá žádný reálný kořen, takže můžeme voliti R_k libovolně. V obou případech je zvolený poloměr fysikálně přípustný. Posléze je možný ještě případ, že rovnice (20) má pouze kořeny R menší než R_{k-1}. Potom úloha nemá řešení a reaktor s danými údaji nelze realisovati. Při výpočtu reaktoru se vyskytuje velmi často případ, kdy pásma, která jsou vně pásma N-tého, nejsou aktivní (reflektor). Podle již řečeného víme, že potom lze šířky těchto pásem $D_k = R_k - R_{k-1}$ pro voliti zcela libovolně.

Numerický výpočet se zjednoduší v případě, kdy determinant matice $\mathbf{A}_k$ je různý od nuly. Potom platí v důsledku speciálního tvaru matice $\mathbf{M}_k$ rovnost

$$\exp\{\mathbf{M}_k(r - R_{k-1})\} = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{\mathbf{A}_k}\,(r - R_{k-1}) & \dfrac{1}{\sqrt{\mathbf{A}_k}}\sin\sqrt{\mathbf{A}_k}(r - R_{k-1}) \\ -\sqrt{\mathbf{A}_k}\sin\sqrt{\mathbf{A}_k}(r - R_{k-1}) & \cos\sqrt{\mathbf{A}_k}\,(r - R_{k-1}) \end{pmatrix}, \quad (23)$$

takže k určení matice stupně $2l$ $\exp\{\mathbf{M}_k(r - R_{k-1})\}$ stačí stanoviti matice stupně l, vyskytující se na pravé straně rovnosti (23). Jejich určení provedeme tak, že použijeme základní formule pro $f(\mathbf{A}_k)$, t. j. obdobné formule jako je (22), kam za f dosazujeme postupně $f_1(z) = \cos\sqrt{z}$, $f_2(z) = \sin\sqrt{z}$, $f_3(z) = \sqrt{z}$, $f_4(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z}}$.

Z poznámek uvedených v paragrafu 5 vyplývá, že užití methody podané v tomto článku je výhodné pouze v případě malých l ($l \leq 4$), aby se daly bez větších obtíží zvládnouti některé početní úkoly, jako je ku příkladu řešení soustavy lineárních rovnic a zejména pak řešení kritické rovnice (20).

SEZNAM LITERATURY

[1] *P. Schmid:* Proc. of Internat. Conf. on the Peaceful Uses of A. E., Sv. VI, Ref. 916, Ženeva 1955.

[2] *G. Sansone:* Обыкновенные дифференциальные уравнения, том I., Moskva 1953.

[3] *Ф. Р. Гантмахер:* Теория матриц, Moskva 1951.

[4] *R. Ehrlich, H. Hurwitz:* Nucleonics 12 (1954), 2.

[5] *V. Kořínek:* Základy algebry, Praha 1953.

[6] *J. H. Tait:* Rep. on Prog. in Phys. XIX (1956), 268.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНОГО МЕТОДА В МНОГОГРУППОВОЙ ТЕОРИИ ДИФФУЗИИ НЕЙТРОНОВ

ИВО МАРЕК (Ivo Marek)

(Поступило в редакцию 23/IV 1957 г.)

В статье проведено решение задачи, с которой встречаемся в многогрупповой теории ядерных реакторов, т. е. дано определение критического радиуса сферически симметрического реактора с n зонами. Математическая формулировка задачи ведет к системам линейных дифференциальных уравнений (1) или же (2) с постоянными коэфициентами и с условиями (3)—(6). Мы воспользовались матричной записью, при помощи которой легко удается доказать существование и однозначность решения. При практическом расчете применение такой записи удобно в случае, когда число энергетических групп не слишком велико ($l \leqq 4$). Ц принципиальной точки зрения число зон может быть неограниченным, однако, на практике число зон не большое, так что оно не очень осложняет численные расчеты.

Summary

MATRIX METHODS IN THE MULTIGROUP THEORY OF NEUTRON DIFFUSION

IVO MAREK

(Received April 23, 1957.)

This article presents the solution of the problem occuring in the multigroup theory of nuclear reactors, i. e. determination of the critical radius of an n-zone spherically symmetric reactor. The mathematical formulation of the problem leads to systems of linear differential equations (1) or (2) with constant coefficients and conditions (3)—(6). The matrix symbolism used here (as well as in the formulation of the problem) is especially suitable for the proof of existence and unicity of the solution; and also for the numerical computation in case the number of energy groups does not exceed 4 ($l \leqq 4$). In the theoretical part the number of zones is arbitrary. The number of zones occuring in practice does not complicate the numerical computation.