

# Aplikace matematiky

---

Cyril Höschl

Tenká kruhová deska na pružném podkladu

*Aplikace matematiky*, Vol. 3 (1958), No. 2, 115–123

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102609>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1958

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## TENKÁ KRUHOVÁ DESKA NA PRUŽNÉM PODKLADU

CYRIL HÖSCHL

(Došlo dne 3. června 1957.)

DT:534.121.1

Článek obsahuje řešení jedné úlohy o tenké homogenní desce, rotačně souměrné, uložené na pružném podkladu. Řešení se značně zjednoduší, vyjádříme-li si Besselovy funkce s komplexním argumentem v polárním tvaru. V druhé části článku uvádíme příklad technické aplikace této úlohy.

### Řešení tenké rotačně souměrné mezikruhové desky na pružném podkladu

Předpokládáme, že deska je homogenní a isotropická a že je relativně tenká. Uvažujeme-li jen malé deformace, je průhyb desky  $w$  dán známou diferenciální rovnicí

$$D \cdot \nabla^4 w = q - kw, \tag{1}$$

$$\text{kde } \nabla^4 w = \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right),$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \text{ značí ohybovou tuhost desky,}$$

$q$  — přetlak,

$k$  — tuhost podkladu,

$h$  — tloušťku desky,

$\mu$  — Poissonův číselný součinitel příčné kontrakce,

$E$  — Youngův modul pružnosti.

Vzhledem k předpokládané rotační souměrnosti jsou  $q$  a  $w$  funkcí jen poloměru  $r$ . Vnitřní momenty a smykové síly jsou pak

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left[ \frac{d^2 w}{dr^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right], \\ M_\theta &= -D \left[ \mu \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right], \\ M_{r\theta} &= M_{\theta r} = 0, \\ Q_r &= -D \left[ \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right], \\ Q_\theta &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

Zavedením označení

$$\lambda^4 = \frac{k}{D} \quad (3)$$

lze rovnici (1) upravit na tvar

$$\nabla_{\varrho}^4 w + w = \frac{q}{\lambda^4 D}, \quad (4)$$

kde  $\varrho = \lambda r$ ,  $\nabla_{\varrho}^2 = \frac{d^2}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho}$ .

Řešení rovnice (4) se skládá z partikulárního integrálu rovnice úplné a z obecného integrálu rovnice zkrácené (pro  $q = 0$ ). S použitím Kelvinova označení pro reálnou a imaginární část Besselových funkcí s komplexními argumenty lze toto řešení psát takto:

$$w = A \operatorname{ber} \varrho + B \operatorname{bei} \varrho + A_1 \operatorname{ker} \varrho + B_1 \operatorname{kei} \varrho + w_1, \quad (5)$$

kde  $A$ ,  $B$ ,  $A_1$  resp.  $B_1$  jsou integrační konstanty, které je nutné volit tak, aby řešení vyhovělo daným okrajovým podmínkám;  $w_1$  je partikulární integrál rovnice (4), závislý na tvaru funkce  $q = q(r)$ . Je-li na př.  $q = q_0 = \text{konst.}$ , je partikulární integrál

$$w_1 = \frac{q_0}{k}. \quad (6)$$

Jako příklad uvedeme řešení plně kruhové desky s vnějším poloměrem  $r_1$ , která volně spočívá na pružném podkladu a na vnějším okraji je zatížena rovnoměrně rozdělenou smykovou silou  $H$  a rovnoměrně rozděleným radiálním momentem  $M$ . Je tedy  $q = 0$ , takže v rov. (5) je  $w_1 = 0$ . Okrajové podmínky jsou dány takto:

$$\varrho = 0 \dots \dots \dots \frac{dw}{dr} = 0, \quad Q_r = 0, \quad (7)$$

$$\varrho = \lambda r_1 = R \dots \dots Q_r = H, \quad M_r = M. \quad (8)$$

Z podmínek (7) plyne, že  $A_1 = B_1 = 0$ . Zbývající konstanty je nutno určit z podmínek (8). Derivováním rovnice

$$w = A \operatorname{ber} \varrho + B \operatorname{bei} \varrho \quad (5a)$$

po úpravě vychází

$$\frac{dw}{dr} = \lambda A \operatorname{ber}' \varrho + \lambda B \operatorname{bei}' \varrho, \quad (9)$$

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = -\lambda^2 A \left[ \operatorname{bei} \varrho + \frac{1}{\varrho} \operatorname{ber}' \varrho \right] + \lambda^2 B \left[ \operatorname{ber} \varrho + \frac{1}{\varrho} \operatorname{bei}' \varrho \right], \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 w}{dr^3} = \lambda^3 A \left[ -\operatorname{bei}' \varrho + \frac{1}{\varrho} \operatorname{bei} \varrho + \frac{2}{\varrho^2} \operatorname{ber}' \varrho \right] + \\ + \lambda^3 B \left[ \operatorname{ber}' \varrho - \frac{1}{\varrho} \operatorname{ber} \varrho + \frac{2}{\varrho^2} \operatorname{bei}' \varrho \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Dosazením z rov. (9), (10) a (11) do rov. (2) plyne, že

$$\begin{aligned} \frac{M_r \lambda^2}{k} &= A \left[ \text{bei } \varrho + (1 - \mu) \frac{1}{\varrho} \text{ber}' \varrho \right] + \\ &- B \left[ \text{ber } \varrho - (1 - \mu) \frac{1}{\varrho} \text{bei}' \varrho \right], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{M_\varrho \lambda^2}{k} &= A \left[ \mu \text{bei } \varrho - (1 - \mu) \frac{1}{\varrho} \text{ber}' \varrho \right] + \\ &- B \left[ \mu \text{ber } \varrho + (1 - \mu) \frac{1}{\varrho} \text{bei}' \varrho \right], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{Q_r \lambda}{k} = A \text{bei}' \varrho - B \text{ber}' \varrho. \quad (14)$$

Integrační konstanty plynou z rovnic (12), (14) a (8):

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\lambda}{k} \frac{H[R \text{ber } R - (1 - \mu) \text{bei}' R] - M \lambda R \text{ber}' R}{R[\text{bei}' R \text{ber } R - \text{ber}' R \text{bei } R] - (1 - \mu)[(\text{ber}' R)^2 + (\text{bei}' R)^2]}, \\ B &= \frac{\lambda}{k} \frac{H[R \text{bei } R + (1 - \mu) \text{ber}' R] - M \lambda R \text{bei}' R}{R[\text{bei}' R \text{ber } R - \text{ber}' R \text{bei } R] - (1 - \mu)[(\text{ber}' R)^2 + (\text{bei}' R)^2]} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Rovnice (15) a také dále uvedené vztahy lze zjednodušit zavedením polárního vyjádření funkcí ( $n$ -tého řádu)

$\text{ber}_n z$ ,  $\text{bei}_n z$  podle definice

$$\begin{aligned} M_n(z) \cdot e^{i\Theta_n(z)} &= \sqrt{\text{ber}_n^2 z + \text{bei}_n^2 z} \cdot \{\cos \Theta_n(z) \pm i \sin \Theta_n(z)\} = \\ &= \text{ber}_n z \pm i \text{bei}_n z. \end{aligned} \quad (16)$$

Lze totiž dokázat, že platí

$$\left. \begin{aligned} \text{ber}^2 z + \text{bei}^2 z &= M_0^2(z), \\ (\text{ber}' z)^2 + (\text{bei}' z)^2 &= M_1^2(z), \\ \text{ber } z \text{bei}' z - \text{bei } z \text{ber}' z &= M_0(z) M_1(z) \sin \left( \Theta_1 - \Theta_0 - \frac{\pi}{4} \right), \\ \text{ber } z \text{ber}' z + \text{bei } z \text{bei}' z &= M_0(z) M_1(z) \cos \left( \Theta_1 - \Theta_0 - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Integrační konstanty pak jsou

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{r_1^2 k} [f_1(R) \cdot H r_1 - f_2(R) \cdot M], \\ B &= \frac{1}{r_1^2 k} [f_3(R) \cdot H r_1 - f_4(R) \cdot M], \end{aligned} \quad (18)$$

kde

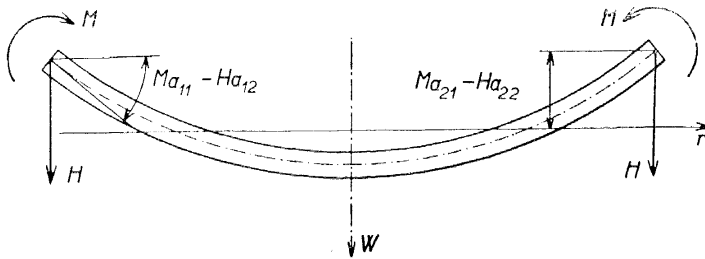
$$f_1(R) = \frac{R^2 \text{ber } R - R(1 - \mu) \text{bei}' R}{R M_0(R) M_1(R) \sin \left( \Theta_1 - \Theta_0 - \frac{\pi}{4} \right) - (1 - \mu) M_1^2(R)}$$

$$f_2(R) = \frac{R^3 \operatorname{ber}' R}{RM_0(R) M_1(R) \sin\left(\Theta_1 - \Theta_0 - \frac{\pi}{4}\right) - (1 - \mu) M_1^2(R)},$$

$$f_3(R) = \frac{R^2 \operatorname{bei} R + R(1 - \mu) \operatorname{ber}' R}{RM_0(R) M_1(R) \sin\left(\Theta_1 - \Theta_0 - \frac{\pi}{4}\right) - (1 - \mu) M_1^2(R)},$$

$$f_4(R) = \frac{R^3 \operatorname{bei}' R}{RM_0(R) M_1(R) \sin\left(\Theta_1 - \Theta_0 - \frac{\pi}{4}\right) - (1 - \mu) M_1^2(R)}.$$

S ohledem na dále uvedenou aplikaci této úlohy ještě určíme deformace desky na jejím okraji. Podle PASTERNAKA označíme  $E$ -násobek těchto deformací, působených jednotkovým zatížením, společným znakem  $a$ , k němuž



Obr. 1. Schema zatížení a deformace na okraji kruhové desky. Na obr. jsou zakotovány  $E$ -násobky skutečných deformací.

připojíme dvojitý index. Číslice na prvním místě značí, zda jde o úhel (1) či o posuv (2), číslice na druhém místě, zda je deformace působena jednotkovým momentem  $M$  (1) či jednotkovou smykovou silou  $H$  (2). Velikost a smysl skutečných deformací, násobených modulem pružnosti  $E$ , jsou patrné z obr. 1. Pasternakovy činitele tedy definujeme takto:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= -\frac{E}{M} \left[ \frac{dw}{dr} \right]_{H \ r_0}^r, & a_{12} &= -\frac{E}{M} [w]_{H \ r_0}^r, \\ a_{21} &= \frac{E}{H} \left[ \frac{dw}{dr} \right]_{M \ r_0}^r, & a_{22} &= \frac{E}{H} [w]_{M \ r_0}^r. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Z Bettiho theoremu reciprocity vyplývá, že

$$a_{12} = a_{21}.$$

Výhodou tohoto označení je nejen přehlednost (souladnost v indexech), ale také to, že při číselném výpočtu počítáme s  $E$ -násobky deformací, což je

výhodnější, neboť deformace jsou velmi malé. Dosazením z rov. (3), (5a), (9), (17) a (18) do rov. (19) vycházejí hodnoty těchto deformací v jednoduchém tvaru

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{E}{r_1^3 k} \psi_{11}(R), \\ a_{12} &= a_{21} = \frac{E}{r_1^2 k} \psi_{12}(R), \\ a_{22} &= \frac{E}{r_1 k} \psi_{22}(R), \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

kde

$$\begin{aligned} \psi_{11} &= \frac{R^3 M_1(R)}{R M_0(R) \sin\left(\Theta_1 - \Theta_0 - \frac{\pi}{4}\right) - (1 - \mu) M_1(R)}, \\ \psi_{12} &= \frac{R^3 M_0(R) \cos\left(\Theta_1 - \Theta_0 - \frac{\pi}{4}\right)}{R M_0(R) \sin\left(\Theta_1 - \Theta_0 - \frac{\pi}{4}\right) - (1 - \mu) M_1(R)}, \\ \psi_{22} &= \frac{R M_0(R) - (1 - \mu) M_1(R) \sin\left(\Theta_1 - \Theta_0 - \frac{\pi}{4}\right)}{R M_0(R) \sin\left(\Theta_1 - \Theta_0 - \frac{\pi}{4}\right) - (1 - \mu) M_1(R)} \cdot \frac{R M_0(R)}{M_1(R)}. \end{aligned}$$

Tabulky funkcí, jež se vyskytují v těchto vztazích, obsahuje [6] a [12].

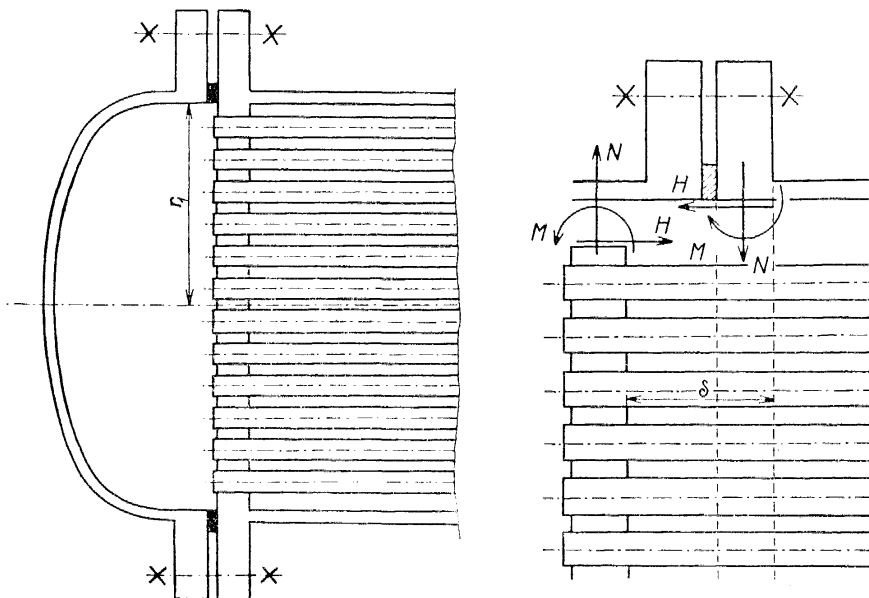
### Příklad technické aplikace

Řešení předešlé úlohy lze aplikovat v technické praxi k pevnostnímu výpočtu trubkového čela výměníku tepla, znázorněného schematicky na obr. 2. Tento výpočet se zakládá na analogii, která přibližně existuje při výpočtu deformací mezi kruhovou deskou s pravidelným polem otvorů a mezi homogenní plnou kruhovou deskou s ohybovou tuhostí

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)} \cdot q, \quad (21)$$

kde  $q$  je činitel zeslabení desky polem otvorů, význam ostatních veličin je týž jako v rovnici (1). Konstanta  $q$  a také činitel  $\mu$  závisí obecně nejen na elastických vlastnostech materiálu, ale také na rozměrech a vzdálenosti otvorů. MALKIN [7] a HORVAY [8] ukázali, že rovnice (21) platí jen pro trojúhelníkové uspořádání otvorů, jinak by byla (u čtvercového pole otvorů) náhradní deska anisotropní.

Této analogie po prvé použil k výpočtu trubkových čel GARDNER [1], u nás později NĚMEC, RIPPL [2] a HOUŽVIC [11]. Nevýhodou těchto prací je, že autoři použili k svému řešení příliš idealisované okrajové podmínky (deska je na okraji buď úplně vetknutá nebo prostě podepřená, což nevystihuje správně skutečnost). Poněkud obecnější řešení uvádí YI-YUAN YU [3], který uvažuje



Obr. 2. Schema trubkového výměníku tepla a zavedení staticky neurčitých momentů a sil při myšleném uvolnění trubkového čela.

desku na okraji pružně podepřenou, na jejímž obvodě působí staticky neurčitý radiální moment. Na rozdíl od těchto citovaných prací lze s použitím řešení, uvedeného v prvé části článku, zavedením staticky neurčitých sil  $H$ ,  $N$  a momentu  $M$  podle obr. 2, jež se pak vypočtou z lineárních deformačních podmínek, řešit úlohy značně obecnější [12].

Ohýbanou desku s pravidelným trojúhelníkovým polem otvorů, je-li rozteč těchto otvorů relativně malá, lze tedy přibližně nahradit plnou isotropickou deskou, která má jiný modul pružnosti a jiný činitel příčné kontrakce, než přísluší materiálu, z něhož je deska vyrobena. Obě tyto hodnoty by bylo možno zjistit experimentálně. Teprve znalost obou těchto hodnot umožňuje, aby nahrazení děrované desky deskou plnou bylo universální; vlastnosti náhradní desky pak nezávisí na způsobu jejího uložení a zatížení. Vzorce pro činitel zeslabení, jak je definován v rovnici (21), které až dosud uvádějí různí autoři [2], [7], [8], [9], [10], nemají takovou všeobecnou platnost a dávají

u téže desky navzájem různé hodnoty. Podrobněji se autor zabýval touto otázkou na jiném místě [13].

Trubkové čelo souvisí na okraji obvykle s válcovou stěnou pláště výměníku, po př. s přírubovým spojem, s víkem a pod. Mimo to jsou v něm zaválcovány nebo zavařeny trubky, které se vyznačují zpravidla malou ohybovou tuhostí a v obvyklých případech konstrukčního uspořádání výměníku vyztužují čelo prostřednictvím tahových sil, které mohou přenášet (tlačené trubky čelo vyztužují jen tehdy, je-li napětí v nich malé ve srovnání s mezí vzpěrné pevnosti). Pak je možno — vzhledem k jejich velkému počtu a vzhledem k pravidelnosti trubkového pole — uvažovat jejich vliv s určitou přibližností jako souvislý pružný podklad o tuhosti  $k$ , na kterém deska spočívá.

Trubkové čelo je zatíženo přetlakem, mimo to může být zatíženo staticky neurčitou částí momentu, který vzniká utažením příruby, a mohou v něm po př. vzniknout i napětí působená rozdílnou teplotou trubek a pláště. Myslíme-li si čelo na obvodě uvolněno, vznikne mezi čelem a pláštěm (přírubami, víkem) posuv  $\delta$  ve směru osy výměníku (obr. 2). Tento posuv vzniká jednak tím, že v trubkách a v plášti vzniknou při zatížení přetlakem rozdílná osová prodloužení, a jednak rozdílnou tepelnou dilatací trubek. Poněvadž rozdělení tlaku a reakce pružného podkladu jsou po celé ploše desky rovnoměrné a jiné zatížení na desku nepůsobí, je uvolněná deska rovná a bez ohybových napětí. Má-li být obnovena souvislost desky a pláště (příruby, víka), je třeba na obvodě desky připojit rovnoměrně rozdělenou smykovou sílu  $H$ , radiální sílu  $N$  a radiální moment  $M$  (obr. 2). Jejich velikost se vypočítá z lineárních deformačních podmínek, které vyjadřují, že výsledný osový a radiální posuv a výsledný úhel otočení všech členů, jež se stýkají na obvodě desky, je týž. K tomu je zapotřebí znát tuhost jednotlivých členů při zatížení silami  $H$  či  $N$  a momentem  $M$ .

Tuhost pláště, po př. víka lze určit z teorie rotačně souměrných skořepin [4], tuhost příruby je možno — s použitím Saint-Venantova principu — počítat z teorie kruhového prstence, zkrucovaného momentem rovnoměrně rozděleným podél jeho střednice [5]; tuhost čela při zatížení silou  $N$  lze převést rovněž na analogickou úlohu o plně desce s redukovanou tuhostí a řešiti elementárními methodami. Deformace čela při zatížení silou  $H$  a momentem  $M$  lze pak určit z rovnic (20), jež platí pro náhradní plnou desku s ohybovou tuhostí danou rovnicí (21).

Jestliže nepřihlížíme k místnímu zvýšení napětí v místě spojení jednotlivých členů a tvarových přechodů, po př. k nepravidelnostem v průběhu napětí v takových místech, můžeme z vypočtených sil  $H$ ,  $N$  a momentu  $M$  určit napětí ve všech částech výměníku.

Výše zmíněná analogie neumožňuje přímý výpočet napětí v trubkovém čele. Poměr skutečného největšího napětí, jež vzniká na okraji otvorů, k napětí  $\sigma$



vypočtenému z největšího radiálního momentu  $M_{r1}$ , který by působil v plné náhradní desce, definuje t. zv. tvarový činitel  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{\sigma_1 \cdot h^2}{6M_{r1}}, \quad (22)$$

kde  $\sigma_1$  je největší napětí v trubkovém čele.

Podle Gardnera [1] lze u trubkového čela určit tento činitel přibližně ze vztahu (pro trojúhelníkové uspořádání otvorů)

$$\alpha = \left[ 1 - \frac{3}{\pi} \arcsin \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{d}{t} \right) \right]^{-1}. \quad (23)$$

Rovnice (22) pak slouží k výpočtu  $\sigma_1$ . Vztah (23) byl odvozen empiricky.

Toto naznačené řešení lze zevšeobecnit i na výpočet deformací a namáhání trubkového čela, jež by vzniklo při nerovnoměrném rozdělení teploty v tloušťce trubkového čela. Podrobný výpočet a definice pevnostních podmínek však neuvádíme, neboť přesahují rozsah tohoto článku.

I když řešení zde naznačené je jen přibližné, má značný praktický význam, neboť poskytuje určitou představu o napjatosti, jež vzniká nejen přetlakem, ale i utažením přírubových šroubů a nerovnoměrným rozdělením teploty. Tento vliv někdy za provozu převládá nad vlivem přetlaku. Skutečná napětí se pak značně liší od těch, jež se předpokládají v konvenčních jednoduchých výpočtech, jakých používají výrobci; velikost skutečných provozních napětí nelze přitom kontrolovat jinak než výpočtem dříve uvedeným, neboť jejich experimentální zjištění je značně znesnadněno, ne-li prakticky znemožněno nerovnoměrným rozdělením teploty a nepřístupností většiny potřebných měřicích míst. Slabinou výpočtu je praktické určení činitelů  $\eta$  resp.  $\mu$  u náhradní desky. K ověření jejich velikosti lze užít buď přesné měření průhybů nebo srovnání vypočtených průběhů napětí s tensometrickým měřením při přetlakových zkouškách za studena. K tomu použijeme především měření na přírubě a plášti, protože tensometricky určená napětí v trubkovnici nejsou k tomuto účelu — vzhledem k nepravidelnému průběhu skutečných napětí — zpravidla dost přesná a směrodatná.

#### LITERATURA

- [1] Gardner: Heat-Exchanger Tube-Sheet Design, Journal of Appl. Mech., Trans. ASME, 1948, str. 377 až 385.
- [2] Němec, Rippl: Dimenzování trubkových čel, Strojnický sborník, sv. 6, 1954, Praha.
- [3] Yi-Yuan Yu: Rational Analysis of Heat-Exchanger Tube-Sheet Stresses, Journal of Appl. Mech., Trans. ASME, 1956, str. 468 až 473.
- [4] Timoshenko: Theory of Plates and Shells, Mac Graw-Hill Book Co., 1940, str. 399.
- [5] Timošenko: Pružnost a pevnost II., 1951, Praha, str. 156.
- [6] McLachlan: Bessel Functions for Engineers, Oxford University Press, London, 1955.
- [7] Malkin: Notes on a Theoretical Basis for Design of Tube Sheets of Triangular Layout, Trans. ASME, sv. 74, 1952, str. 387 až 396.

- [8] *Horvay*: Bending of Honeycombs and of Perforated Plates. Journal of Appl. Mech., Trans. ASME, sv. 74, 1952, str. 122 až 123 a 406 až 407.
- [9] *Miller*: The Design of Tube Plates in Heat Exchangers. Proc. of the Inst. of Mech. Eng., London, Series B, sv. 1, 1952, str. 215 až 231.
- [10] *Duncan*: The Structural Efficiency of Tube-plates for Heat Exchangers. Proc. Inst. Mech. Eng., sv. 169, 1955, str. 789 až 802.
- [11] *Houžvič*: Pevnostní výpočet výměníků tepla, Strojírnoství, sv. 7, 1957, čís. 4 a 5.
- [12] *Höschl, Heřt*: Pevnostní výpočet kotlového kondensátoru, Strojírnoství, 1957, čís. 11.
- [13] *Höschl*: Ohyb desky s pravidelným polem otvorů, Sborník vědecké konference VŠS v Liberci, v tisku.

## Резюме

### ТОНКАЯ КРУГОВАЯ ПЛАСТИНКА НА УПРУГОМ СПЛОШНОМ ОСНОВАНИИ

ЦЫРИЛ ГЕШЛ (Cyril Höschl)

(Поступило в редакцию 3/VI 1957 г.)

В статье проводится расчет тонкой однородной пластинки формы кругового кольца, находящейся под симметричным относительно оси нагружением и уложенной на упругом основании. В качестве примера рассматривается полная пластинка, свободно уложенная на упругом сплошном основании и нагруженная по контуру равномерно распределенным моментом и поперечной силой. Результаты расчетов упрощаются вследствие того, что бесселевы функции от комплексных переменных выражаются в полярной форме. В качестве примера технических приложений этой задачи проводится расчет деформаций и напряженности трубных листов теплообменников.

## Summary

### A THIN CIRCULAR PLATE ON AN ELASTIC FOUNDATION

CYRIL HÖSCHL

(Received June 3, 1957.)

This article treats the behaviour of a thin homogenous plate with a concentric hole, resting on an elastic foundation and with a rotationally symmetric load. As an example, a disc whose edge is subjected to a uniformly distributed radial bending moment and shear.

The results are simplified by expressing the occurring Bessel functions of a complex variable in the polar form. A practical application is the computation of deformations and stresses in the tube-sheet of a heat exchanger.