Aplikace matematiky

Milan Práger

Schwarzův algoritmus pro polyharmonické funkce

Aplikace matematiky, Vol. 3 (1958), No. 2, 106–114

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102608

SCHWARZŮV ALGORITMUS PRO POLYHARMONICKÉ FUNKCE

MILAN PRÁGER

(Došlo dne 3. června 1957.) DT:517.946.9

V článku se dokazuje konvergence Schwarzova algoritmu pro sjednocení a průnik dvou oblastí pro základní okrajovou úlohu pro polyharmonickou rovnici.

1. V theorii parciálních diferenciálních rovnic je dobře znám Schwarzův algoritmus, dovolující řešit Dirichletovu úlohu na sjednocení dvou oblastí tím, že řešíme tuto úlohu pro každou z oblastí zvlášť. Existuje analogický algoritmus pro řešení Dirichletovy úlohy na průniku dvou oblastí. (Viz [1].) Při důkazech konvergence těchto algoritmů pro harmonické funkce se obvykle podstatnou měrou užívá věty o maximu. Variační metody užil po prvé S. L. Sobolev k důkazu konvergence těchto algoritmů pro rovnice theorie pružnosti [5]. Variační metody užívá též S. G. Michlin, který se zabývá obecnější eliptickou rovnicí [2].

Cílem tohoto článku je ukázat konvergenci těchto dvou algoritmů pro základní okrajovou úlohu pro p-harmonické funkce, t. j. funkce, splňující rovnici $\Delta^p u = 0$ v n-dimensionálním prostoru. Při tom budeme aplikovat obecnou větu z theorie Hilbertových prostorů, vystihující abstraktní jádro alternujícího procesu (viz [6] a též [7], [8]). Z variačních metod užíváme výsledků S. L. Soboleva [4].

2. Než přistoupíme k formulaci a důkazu konvergence obou algoritmů, zavedeme předpoklady o uvažovaných oblastech, některá označení a dokážeme dvě lemmata.

Mějme dvě omezené n-rozměrné oblasti G_1 a G_2, jež mají neprázdný průnik G_0. Označme dále $G = G_1 \cup G_2$, $G_1' = G_1 - \bar{G}_2$. $G_2' = G_2 - \bar{G}_1$. Budeme předpokládat, že všechny tyto množiny jsou součtem hvězdovitých oblastí (viz [4], str. 74), že jejich hranice je jednoduchá[1]) ([4], str. 81) a že se skládá jen

[1]) Jednoduchou hranicí rozumí Sobolev, přibližně řečeno, hranici po částech dostatečně hladkou.

z $(n-1)$-rozměrných variet. Budiž B_i hranice G_i $(i = 0, 1, 2)$, B hranice G. Budiž dále C_1 ta část B_1, jež leží v G_2, tedy $C_1 = B_1 \cap G_2$ a podobně budiž $C_2 = B_2 \cap G_1$.

Mějme na nějaké $(n-1)$-rozměrné varietě, ležící uvnitř nebo na hranici G dány funkce $\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$, kde $0 \leqq \Sigma\alpha_i \leqq p - 1$. Budeme říkat, že funkce $u \in W_2^{(p)}(G)$[2]) nabývá hodnot $\{\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_n}\}$ ve smyslu S, jestliže funkce u a všechny její derivace $\dfrac{\partial^m u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ až do řádu $p - 1$ včetně nabývají hodnot $\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ ve smyslu spojitosti v $L_{2,n-1}$ ([4], str. 94).[3])

Analogický smysl bude mít rčení, že funkce u splývá s funkcí v ve smyslu S nebo že funkce u je spojitá ve smyslu S.

Lemma 1. *Mějme funkci u, definovanou na G, která*

1. *je z $W_2^{(p)}(G_1)$ a z $W_2^{(p)}(G_2')$,*
2. *je spojitá ve smyslu S na C_1.*

Pak je $u \in W_2^{(p)}(G)$.

Poznámka. V dalším budeme užívat i větu, kterou dostaneme z tohoto lemmatu záměnou role oblastí G_1 a G_2. To je zřejmě též správná věta.

Důkaz se snadno provede pomocí lemmatu, dokázaného Michlinem ([3], str. 162).

Lemma 2. *Budiž $u_k^{(p)}$ posloupnost p-harmonických funkcí, definovaných v otevřené množině A, takových, že $u_k^{(p)} \in W_2^{(p)}(A)$ pro každé k. Nechť posloupnost $u_k^{(p)}$ konverguje ve smyslu konvergence ve $W_2^{(p)}(A)$ k nějaké funkci $u^{(p)}$. Potom*

1. *funkce $u^{(p)}$ je p-harmonická,*
2. *posloupnost $u_k^{(p)}$ konverguje k funkci $u^{(p)}$ lokálně stejnoměrně,*
3. *posloupnost $\dfrac{\partial^\alpha u_k^{(p)}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ konverguje pro $k \to \infty$ k funkci $\dfrac{\partial^\alpha u^{(p)}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$*

lokálně stejnoměrně při libovolných $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ $(\alpha = \sum_1^n \alpha_i)$.

---

[2]) $W_2^{(p)}(G)$ je prostor funkcí, jejichž všechny zobecněné derivace p-tého řádu jsou v oblasti G integrovatelné s druhou mocninou. Normu v tomto prostoru budeme bráti takto:

$$\|u\|^2_{W_2^{(p)}(G)} = \int_G \sum_{\Sigma\alpha_i = p} \frac{p!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \left(\frac{\partial^p u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}\right)^2 \mathrm{d}G +$$

$$+ \sum_{0 \leqq q < p} \left(\int_B \frac{\partial^q u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \mathrm{d}B\right)^2, \quad (q = \Sigma\alpha_i).$$

[3]) Funkce u nabývá hodnoty f na $(n-1)$-rozměrné varietě E ve smyslu $L_{2,n-1}$, jestliže integrál $\int_E (u(P + \Delta P) - f)^2 \mathrm{d}P$ je malý pro dostatečně malé posunutí ΔP.

Důkaz. Jelikož z konvergence posloupnosti $u_k^{(p)}$ ve $W_2^{(p)}(A)$ plyne podle vět o vnoření ([4]) konvergence v průměru v celé množině i na každé $(n-1)$-rozměrné varietě, stačí dokázat, že tvrzení 1)—3) zůstanou v platnosti, předpokládáme-li, že posloupnost $u_k^{(p)}$ konverguje v průměru k $u^{(p)}$ v celé množině i na každé $(n-1)$-rozměrné varietě obsažené v oblasti. Toto tvrzení dokažme indukcí.

Pro $p = 1$ se jedná o harmonické funkce a věta je známa.

Dále zvolíme v množině A libovolný bod P a nějaké jeho kulové okolí K poloměru R. Funkce $u_k^{(p)}$ vyjádříme ve tvaru

$$u_k^{(p)} = h_k + (R^2 - r^2)\, u_k^{(p-1)}$$

kde r je vzdálenost proměnného bodu od bodu P, h_k jsou funkce harmonické v celé množině, funkce $u_k^{(p-1)}$ jsou $(p-1)$-harmonické v celé množině. Takové vyjádření je možné, viz na př. [2] str. 14.

Na hranici K tedy platí $u_k^{(p)} = h_k$. Konverguje tedy posloupnost h_k na hranici K v průměru a protože se jedná o harmonické funkce, zjistí se snadno, že konverguje v kouli K lokálně stejnoměrně k nějaké harmonické funkci h.

Odtud plyne, že posloupnost $u_k^{(p-1)}$ konverguje v průměru na nějaké kouli K', soustředné s K a ležící i s hranicí uvnitř K, i na každé $(n-1)$-rozměrné varietě obsažené v K' k funkci $\dfrac{u^{(p)} - h}{R^2 - r^2} = u^{(p-1)}$. Podle indukčního předpokladu je $u^{(p-1)}$ $(p-1)$-harmonická funkce a posloupnost $u_k^{(p-1)}$ konverguje k $u^{(p-1)}$ lokálně stejnoměrně v K' i se všemi derivacemi. Odtud je vidět, že $u^{(p)} = h + (R^2 - r^2)\, u^{(p-1)}$ je p-harmonická funkce v K' a že $u_k^{(p)}$ konvergují k $u^{(p)}$ lokálně stejnoměrně v K'.

Zbývá ještě dokázat lokálně stejnoměrnou konvergenci derivací $u_k^{(p)}$ k příslušné derivaci $u^{(p)}$. Vezměme nejdříve první derivace. Máme

$$\frac{\partial u_k^{(p)}}{\partial x_i} = \frac{\partial h_k}{\partial x_i} + (R^2 - r^2) \cdot \frac{\partial u_k^{(p-1)}}{\partial x_i} + (-2x_i) \cdot u_k^{(p-1)} .$$

Vzhledem k omezenosti výrazu r^2 a jeho derivací, plyne odtud, že pravá strana této rovnice konverguje v K' lokálně stejnoměrně k funkci $\dfrac{\partial h}{\partial x_i} + (R^2 - r^2) \cdot \dfrac{\partial u^{(p-1)}}{\partial x_i} + (-2x_i)\, u^{(p-1)}$, což je ovšem rovno $\dfrac{\partial u^{(p)}}{\partial x_i}$. Lokálně stejnoměrná konvergence vyšších derivací se pak snadno dokáže indukcí, všimneme-li si, že $\dfrac{\partial u^{(p)}}{\partial x_i}$ je opět p-harmonická funkce.

3. Symbolem H označíme množinu funkcí $u \in W_2^{(p)}(G)$, které mají tyto vlastnosti

1. na B nabývají nulových hodnot ve smyslu S,
2. jsou p-harmonické v množinách G_1', G_2', G_0.

V této množině je možno zavést (kromě normy prostoru $W_2^{(p)}(G)$) skalární součin

$$(u, v) = \int_G \sum_{\sum \alpha_i = p} \frac{p!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \frac{\partial^p u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \cdot \frac{\partial^p v}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \, dG .$$

Pak bude H, jak se snadno zjistí, Hilbertův prostor, jehož norma je norma prostoru $W_2^{(p)}(G)$. Úplnost prostoru H plyne z toho, že H je podle lemmatu 2. uzavřená množina ve $W_2^{(p)}(G)$.

Budiž dále H_i ($i = 1, 2$) podmnožina prostoru H, skládající se z těch funkcí, které jsou p-harmonické v množinách G_i a $G - G_i$. Zřejmě H_i je podprostor prostoru H.

Nyní platí

Věta 1. *Budiž $u \in H$. Pak funkcionál $\|u - v\|^2$ nabývá minima, probíhá-li v prostor H_i ($i = 1, 2$) a tohoto minima je dosaženo pro takovou funkci $v_0 \in H_i$ ($i = 1, 2$), která na varietě C_i nabývá týchž hodnot ve smyslu S jako funkce u.*

Označíme-li P_i projektor na prostor H_i, je zřejmě $v_0 = \mathsf{P}_i u$.

Důkaz. Budiž w libovolný prvek z H_i a budiž $v_0 \in H_i$ taková funkce, která na C_i splývá ve smyslu S s funkcí u. Taková funkce v_0 existuje, neboť okrajové podmínky jsou přípustné (t. j. takové, že existuje funkce z $W_2^{(p)}(G)$, která jich nabývá ve smyslu S) a podle lemmatu 1. je skutečně $v_0 \in H_i$. Pak je

$$\|u - w\|^2 = \|u - v_0 - w + v_0\|^2 = \|u - v_0\|^2 + \|w\|^2 + \|v_0\|^2 - 2(u - v_0, w) + \\ + 2(u - v_0, v_0) - 2(w, v_0) .$$

Jelikož ale funkce $u - v_0$ nabývá na hranicích oblasti G_i a $G - G_i$ nulových hodnot ve smyslu S a funkce w a v_0 jsou v těchto oblastech p-harmonické, neboť jsou z H_i, je

$$(u - v_0, w) = (u - v_0, v_0) = 0$$

([4], str. 118) a tudíž

$$\|u - w\|^2 = \|u - v_0\|^2 + \|w - v_0\|^2 ,$$

což je zřejmě minimální pro $w = v_0$.

Odtud plyne ihned další

Věta 2. $H = H_1 + H_2$.

Důkaz. Je zřejmé, že $H_1 + H_2 \subset H$. Kdyby tvrzení věty nebylo správné, bylo by $H = (H_1 + H_2) + M$, kde M je prostor ortogonální k $H_1 + H_2$ a obsahující aspoň jeden nenulový prvek u_0. Vzhledem k ortogonalitě je $\mathsf{P}_1 u_0 = \mathsf{P}_2 u_0 = \Theta$, kde Θ je nulový prvek prostoru H. Jelikož u_0 a $\mathsf{P}_i u_0$ nabývají na C_i podle věty 1 týchž okrajových hodnot ve smyslu S, nabývá funkce u_0 nulových okrajových hodnot ve smyslu S na C_i. Jelikož je $u_0 \in H$, nabývá u_0 nulových okrajových hodnot ve smyslu S též na B a proto podle věty o jednoznačnosti řešení základní okrajové úlohy pro p-harmonickou rovnici je identicky $u_0 = 0$. To však zřejmě není možné.

4. Algoritmus pro průnik. Mějme na hranici oblasti G_0, t. j. na B_0 dány přípustné okrajové podmínky $\{\varphi\} = \{\varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}\}$, $0 \leqq \Sigma\alpha_i \leqq p - 1$ a naší úlohou budiž najít p-harmonickou funkci v G_0, která na B_0 nabývá daných hodnot $\{\varphi\}$ ve smyslu S.

Zvolme na $B - B_0$ okrajové podmínky $\{\psi\} = \{\psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}\}$, $0 \leqq \Sigma\alpha_j \leqq p - 1$, libovolně jen s tím omezením, aby tyto podmínky spolu s podmínkami $\{\varphi\}$ byly přípustné pro množiny G'_1 a G'_2. Předpokládáme, že taková volba je možná.

Nyní víme, že existuje funkce $u_0 \in W_2^{(p)}(G)$, která je p-harmonická v G_0, G'_1 a G'_2 a která nabývá na příslušných hraničních varietách okrajových hodnot $\{\varphi\}$ a $\{\psi\}$ ve smyslu S. Tato funkce splývá na G_0 s hledaným řešením naší úlohy.

Definujme nyní posloupnost funkcí $\{u_n\}$, $u_n \in W_2^{(p)}(G)$ takto:

u_1 je p-harmonická v G_1 a G'_2, na C_1 nabývá hodnot $\{\varphi\}$ ve smyslu S, na B nabývá předepsaných hodnot $\{\varphi\}$ a $\{\psi\}$ ve smyslu S;

u_{2n+1} je p-harmonická v G_1 a G'_2, na C_1 nabývá hodnot $\{\varphi\} - \sum_{i=1}^{2n} u_i$ ve smyslu S $(n = 1, 2, \ldots)$;

u_{2n} je p-harmonická v G_2 a G'_1, na C_2 nabývá hodnot $\{\varphi\} - \sum_{i=1}^{2n-1} u_i$ ve smyslu S $(n = 1, 2, \ldots)$.

Všechny funkce u_n pro $n > 1$ nabývají na B nulových okrajových hodnot ve smyslu S, takže $u_n \in H$ pro $n > 1$.

Všechny funkce u_n existují, neboť jim předepsané okrajové hodnoty jsou přípustné. Skutečně, u_1 má přípustné okrajové hodnoty $\{\varphi\}$ a $\{\psi\}$, $u_n (n > 1)$ splývá na B a C_1 (resp. C_2) ve smyslu S s funkcí $(u_0 - \sum_{i=1}^{n-1} u_i) \in W_2^{(p)}(G)$.

Věta 3. *Posloupnost* $\sum_{i=1}^{n} u_i$ *konverguje k funkci* u_0 *v normě prostoru* $W_2^{(p)}(G)$.

Důkaz. Budiž $r_k = u_0 - \sum_{i=1}^{k} u_i$ a budiž v funkce, která je p-harmonická v G a která na B nabývá okrajových hodnot $\{\varphi\}$ a $\{\psi\}$ ve smyslu S. Taková funkce existuje podle [4]. Pak $u_0 - v \in H$ a $u_1 - v \in H_1$. Tedy

$$r_k = u_0 - \sum_{i=1}^{k} u_i = (u_0 - v) - (u_1 - v) - \sum_{i=2}^{k} u_i$$

Zavedeme-li projektor $\mathsf{P}'_i = \mathsf{I} - \mathsf{P}_i$, kde I je identický operátor, bude

$$r_{2k+1} = \mathsf{P}'_1 (\mathsf{P}'_2 \mathsf{P}'_1)^k (u_0 - v) , \quad k \geqq 0 ,$$
$$r_{2k} = (\mathsf{P}'_2 \mathsf{P}'_1)^k (u_0 - v) , \quad k \geqq 1 .$$

Skutečně, máme

$$r_1 = (u_0 - v) - (u_1 - v) .$$

Ale $u_1 - v$ splývá s funkcí $u_0 - v$ na C_1 a protože $(u_0 - v) \in H$ a $(u_1 - v) \in H_1$ máme podle věty 1

$$u_1 - v = \mathsf{P}_1(u_0 - v) ,$$

z čehož dále dostáváme

$$r_1 = (u_0 - v) - \mathsf{P}_1(u_0 - v) = (\mathsf{I} - \mathsf{P}_1)(u_0 - v) = \mathsf{P}_1'(u_0 - v) .$$

Podobně se dále dokáže

$$r_{2k+1} = r_{2k} - u_{2k+1} = r_{2k} - \mathsf{P}_1 r_{2k} = \mathsf{P}_1' r_{2k}$$

a

$$r_{2k} = \mathsf{P}_2' r_{2k-1} .$$

Protože podle [6] posloupnost $(\mathsf{P}_2'\mathsf{P}_1')^n(u_0 - v)$ konverguje pro $n \to \infty$ k $\mathsf{P}'(u_0 - v)$, kde P' je projektor na podprostor $H' = H_1' \cap H_2'$ (H_i' je ortogonální doplněk k H_i), stačí ukázat, že H' je nulový podprostor. To však plyne z toho, že $H = H_1 + H_2$.

5. Zformulujeme ještě Schwarzův algoritmus pro sjednocení oblastí $G_1 \cup G_2 = G$ a dokážeme jeho konvergenci.

Buďtež na B dány přípustné okrajové podmínky $\{\varphi\}$ a hledejme v G řešení základní okrajové úlohy p-harmonické rovnice s těmito okrajovými podmínkami. Na C_1 zvolme okrajové podmínky $\{\psi\}$ tak, aby spolu s podmínkami $\{\varphi\}$ tvořily přípustný systém pro oblasti G_1 a G_2', jinak libovolně. Taková volba je vždy možná, neboť za $\{\psi\}$ lze vzít hodnoty, kterých ve smyslu S nabývá funkce $v \in W_2^{(p)}(G)$ zaručující přípustnost okrajové podmínky $\{\varphi\}$.

Posloupnost funkcí, která konverguje k hledanému řešení, dostaneme takto:

u_1 je p-harmonická v G_1 a G_2', na C_1 nabývá hodnot $\{\psi\}$ ve smyslu S;

u_{2k+1} je p-harmonická v G_1 a G_2', na C_1 nabývá hodnot u_{2k} ve smyslu S;

u_{2k} je p-harmonická v G_2 a G_1', na C_2 nabývá hodnot u_{2k-1} ve smyslu S.

Všechny funkce splňují na B předepsané okrajové podmínky $\{\varphi\}$.

Nyní platí

Věta 4. *Posloupnost u_n konverguje k hledanému řešení v normě prostoru $W_2^{(p)}(G)$.*

Důkaz. Hledané řešení, o němž podle Sobolevovy theorie víme, že existuje, označme u_0. A označme dále $r_n = u_0 - u_n$. Zřejmě platí

$$r_{2k} = \mathsf{P}_2 r_{2k-1} , \quad r_{2k+1} = \mathsf{P}_1 r_{2k}$$

neboť $r_{2k} \in H_2$ a $r_{2k+1} \in H_1$ a na C_2 resp. C_1 nabývají ve smyslu S hodnot r_{2k-1} resp. r_{2k}.

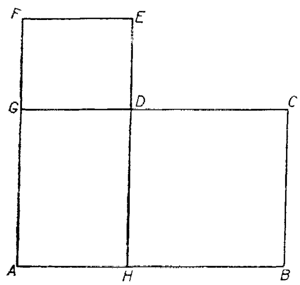
Je tedy

$$r_{2k} = \mathsf{P}_2(\mathsf{P}_1\mathsf{P}_2)^{k-1} r_1 \quad \text{a} \quad r_{2k+1} = (\mathsf{P}_1\mathsf{P}_2)^k r_1 .$$

A opět podle [6] dostáváme, že posloupnost $(\mathsf{P}_1\mathsf{P}_2)^k r_1$ konverguje pro $k \to \infty$ k $\mathsf{P}_0 r_1$, kde P_0 je projektor na $H_0 = H_1 \cap H_2$. H_0 je však nulový podprostor, neboť se skládá z těch funkcí, které jsou p-harmonické zároveň na G_1 i na G_2, tedy na celém sjednocení G, a které splňují nulové okrajové podmínky ve smyslu S.

6. Nakonec uvedeme příklad, který ilustruje algoritmus pro sjednocení dvou oblastí.

Řešme biharmonickou rovnici $\Delta^2 u = 0$ v rovinné oblasti G (viz obr. 1), při okrajových podmínkách



Obr. 1.

$$u = f\,, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{na} \quad B\,,$$

$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right.$ je derivace podle vnější normály$\left.\right)$. Tyto podmínky jsou ekvivalentní tomu, předepíšeme-li na hranici hodnoty $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$. Musíme je ovšem volit tak, aby byly přípustné.

G_1 budiž obdélník $ABCG$, G_2 obdélník $AHEF$. C_1 bude pak úsečka DG, C_2 úsečka HD.

Na C_1 zvolíme libovolné okrajové podmínky

$$u_1 = f'\,, \quad \frac{\partial u}{\partial n_1} = g'$$

(n_1 je vnější normála k hranici G_1) a najdeme biharmonickou funkci u_1, splňující okrajové podmínky:

$$u_1 = f\,, \quad \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = g \quad \text{na} \quad GABCD\,,$$

$$u_1 = f'\,, \quad \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = g' \quad \text{na} \quad DG\,.$$

Hodnoty funkce u_1 a její derivace podle vnější normály n_2 k oblasti G_2 na $C_2 = DH$, budou nám představovat okrajové podmínky pro funkci u_2, která má řešit rovnici $\Delta^2 u = 0$ v G_2 a splňovat

$$u_2 = f\,, \quad \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = g \quad \text{na} \quad DEFAH\,,$$

$$u_2 = u_1, \quad \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = \frac{\partial u_1}{\partial n_2} \quad \text{na} \quad HD\,.$$

Funkce u_3 bude řešením rovnice $\Delta^2 u = 0$ v G_1 s okrajovými podmínkami

$$u_3 = f\,, \quad \frac{\partial u_3}{\partial n_1} = g \quad \text{na} \quad GABCD$$

$$u_3 = u_2\,, \quad \frac{\partial u_3}{\partial n_1} = \frac{\partial u_2}{\partial n_1} \quad \text{na} \quad DG\,.$$

Podobným postupem sestrojíme dále funkce $u_4, u_5, \ldots$

Tak dostáváme posloupnost, konvergující k řešení našeho problému lokálně stejnoměrně. Pohlížíme-li na naši rovnici jako na rovnici pro Airyho funkci při řešení problému rovinné pružnosti, dostáváme podle lemmatu 2 též lokálně stejnoměrnou konvergenci druhých derivací t. j. napětí.

LITERATURA

[1] *Л. В. Канторович, В. И. Крылов:* Приближенные методы высшего анализа. ГИТТЛ. Москва-Ленинград, 1952.

[2] *M. Nicolesco:* Les fonctions polyharmoniques. Paris, 1936.

[3] *С. Г. Михлин:* Проблема минимума квадратичного функционала, ГИТТЛ. Москва-Ленинград, 1952.

[4] *С. Л. Соболев:* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Ленинград, 1950.

[5] *С. Л. Соболев:* Алгорифм Шварца в теории упругости. ДАН СССР, т. IV (XIII), 1936, № 6.

[6] *I. Babuška:* O Schwarzově algoritmu v theorii parciálních diferenciálních rovnic matematické fysiky. (V tisku.)

[7] *D. Morgenstern:* Begründung des alternierenden Verfahrens durch Ortogonalprojektion. ZAMM, 1956, H. 7/8.

[8] *N. Wiener:* On the Factorization of Matrices. Comm. Math. Helv., 1955, vol. 29.

Резюме

АЛГОРИФМ ШВАРЦА ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

МИЛАН ПРАГЕР (Milan Práger)

(Поступило в редакцию 3/VI 1957 г.)

Проводимое в статье доказательство о сходимости алгорифма Шварца для полигармонического уравнения $\Delta^p u = 0$ при заданных на границе рассматриваемой области значениях функции и ее производных вплоть до порядка $p - 1$, опирается на идеи, высказанные в работах [6] и [7]. На краевые условия и на границы рассматриваемых областей наложены условия, позволяющие применить теорему существования для решения полигармонического уравнения, доказанную С. Л. Соболевым (см. [4]). Это решение достигает краевых значений в определенном обобщенном смысле [4].

Результат можно сформулировать следующим образом:

Последовательность функций, полученных при помощи алгорифма Шварца как для объединения, так и для пересечения двух областей обыч-

ным способом, напоминающим способ решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа (см., напр., [1]), сходится к точному решению по норме пространства $W_2^{(p)}$ (теорема 3 и 4). Из сходимости в $W_2^{(p)}$ вытекает локально равномерная сходимость последовательности функций и последовательности всех производных любого порядка (лемма 2).

Zusammenfassung

SCHWARZSCHER ALGORITHMUS FÜR POLYHARMONISCHE FUNKTIONEN

MILAN PRÁGER

(Eigegangen am 3. Juni 1957.)

Es handelt sich um den Beweis der Konvergenz des Schwarzschen Algorithmus für die polyharmonische Gleichung $\Delta^p u = 0$, wenn auf dem Rande des betrachteten Gebietes die Werte der Funktion und ihrer Ableitungen bis zur Ordnung $p - 1$ vorgeschrieben sind. Der Beweis beruht auf dem in den Arbeiten [6] und [7] erwähnten Gedanken. Über die Randbedingungen und über die Ränder der betrachteten Gebiete sind solche Voraussetzungen gemacht, die den Existenzsatz von S. L. Sobolev über die Lösung der polyharmonischen Gleichung (sich [4]) zu benutzen ermöglichen. Diese Lösung erfüllt die Randbedingungen in einem gewissen verallgemeinerten Sinne [4].

Das Resultat kann man dann in folgender Weise formulieren:

Die Folge von Funktionen, die man mit Hilfe des Schwarzschen Algorithmus, wie im Falle der Vereinigung so auch im Falle der Durchdringung zweier Gebiete, durch ein analoges Verfahren mit dem bei dem Dirichletschen Problem für die Laplace'sche Gleichung (sieh z. B. [1]) erhält, konvergiert zur genauen Lösung in der Norm des Raumes $W_2^{(p)}$. (Satz 3 und 4.) Aus der Konvergenz im Raum $W_2^{(p)}$ folgt die lokal gleichmässige Konvergenz der Folge von Funktionen sowie auch der Folge der Ableitungen beliebiger Ordnung (Lemma 2).