

Aplikace matematiky

G. S. Pisarenko

Příčné kmity prutů s uvažováním ztrát v materiálu

Aplikace matematiky, Vol. 2 (1957), No. 6, 424–443

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102593>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1957

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

PŘÍČNÉ KMITY PRUTŮ S UVAŽOVÁNÍM ZTRÁT V MATERIÁLU

G. S. PISARENKO

(Došlo dne 25. června 1957.)

DT: 534.113.014.2

V článku je vyložena teorie výpočtu vynucených i vlastních kmitů v soustavách s rozloženými parametry, při čemž se uvažují ztráty energie v materiálu. Tento problém se řeší jako nelineární. Příslušné diferenciální rovnice, které se mnoho neliší od lineárních, se řeší metodami nelineární mechaniky, zvláště metodou malého parametru.

Úvod

Při kmitání jakékoliv mechanické soustavy se ztrácí energie při nezvratných pochodech, které provázejí mechanické kmity. Jedná-li se o vlastní kmity pružné soustavy, ztráty energie se projeví v tom, že amplituda kmitů soustavy bude klesat s časem, t. j. že kmity budou tlumené. V případě vynucených ustálených kmitů soustavy vyžadují ztráty neustálého přívodu energie zvnějška, aby amplituda kmitů setrvala na konstantní hodnotě.

Příčiny, které způsobují ztráty energie, mohou být různé. Obecně můžeme všechny tyto příčiny rozdělit do dvou kategorií: na příčiny, které způsobují t. zv. vnější ztráty, a příčiny způsobující vnitřní ztráty. K vnějším ztrátám nutno počítat ztráty energie v upevnění (základech) a ve spojích jednotlivých částí soustavy, aerodynamické ztráty a ztráty třením o prostředí (vzduch, plyn, páru, kapalinu), v němž soustava kmitá, atd. K vnitřním ztrátám patří ztráty vlivem nedokonalé pružnosti materiálu, t. j. ztráty energie v materiálu vlivem nezvratných pochodů, které probíhají v materiálu při jeho cyklickém deformování kmitáním.

Tak vidíme, že všechny skutečné kmitající soustavy jsou vlivem ztrát nekonzervativní. S takovými nekonzervativními soustavami se skutečně vždy setkáváme v inženýrské praxi.

Je nutno poznamenat, že při výpočtu kmitů nějaké mechanické soustavy je velmi důležité uvažovat ztráty energie kmitáním ve vyšetřované soustavě za podmínek, za kterých skutečně pracuje. Na příklad při výpočtu součástí

strojů, u nichž může při provozu nastat resonance, je velmi důležité, abychom náležitými výpočty uměli určit předem možné amplitudy rezonančních kmitů a jim odpovídající proměnná napětí a tím odhadnout skutečnou pevnost konstrukce.

Výpočet kmitající soustavy s uvažováním všech činitelů, které mají vliv na ztráty energie, představuje v obecném případě potíže zásadního rázu, takže tento problém nemůže být vždy uspokojivě řešen, i když se použije přibližných metod. Vznikají tu potíže dvojího druhu. Předně je nutno znát konstanty tlumení soustavy a na čem tyto konstanty závisí. Za druhé je nutno sestavit příslušnou diferenciální rovnici, která respektuje toto tlumení, a potom ji řešit, což je též obvykle spojeno se značnými obtížemi čistě matematického charakteru.

V tomto článku si nestavíme cíl vyřešit kmitání pružných soustav s ohledem na všechny možné druhy ztrát energie. Omezíme se zde pouze na vyšetřování kmitů pružných mechanických soustav s přihlédnutím k ztrátám energie v materiálu. Přitom budeme vyšetřovat tento problém s ohledem na výpočet příčných kmitů prutů.

Postavení takového úkolu má velký význam i proto, že předně příčné kmity prutů jsou snad nejrozšířenějším prvkem kmitavých soustav, s nimiž se setkáváme v inženýrské praxi, a za druhé v mnohých případech hlavním zdrojem ztrát při příčných kmitech prutů jsou právě vnitřní ztráty v materiálu. Tak při vyšetřování vibrací některých druhů turbinových lopatek, na př. lopatek bez výztužné obruče, je možno považovat za hlavní zdroj tlumení ztráty energie v materiálu lopatek.

Dříve než přejdeme k výkladu teorie výpočtu kmitů pružných soustav s přihlédnutím ke ztrátám energie v materiálu (hysteresním ztrátám), zastavíme se krátce u základních hypotéz týkajících se otázky ztrát energie v materiálu, abychom stanovili základní fyzikální předpoklady pro naše výpočty.

Mluvíme-li o rozvoji metod výpočtu kmitů pružných soustav s respektováním hysteresních ztrát, především je nutno poznamenat, že v dosti dlouhém období, přibližně od r. 1892 do r. 1938, při budování teorie s respektováním ztrát v materiálu se vycházelo z tak zvané hypotézy vazkého tření neboli z hypotézy VOIGTOVY [1]. V této hypotéze se předpokládá, že vnitřní nepružný odpor je úměrný rychlosti deformace.

Ačkoliv Voigtova hypotéza, zavedená v r. 1892, nebyla experimentálně potvrzena, bylo jí do značné míry používáno, protože zjednodušovala výpočet kmitavých soustav s hysteresí a umožnila dospět k řadě užitečných přibližných řešení prakticky důležitých problémů.

Když byla nahromaděna experimentální fakta k přímému i nepřímému ověření Voigtovy hypotézy, byla přesvědčivě dokázána neopodstatněnost této hypotézy a byly jakožto neopodstatněné odmítnuty pokusy zpřesnit

tuto hypotesu tím, že vnitřní tření by nezáviselo na rychlosti lineárně, nýbrž na druhé mocnině rychlosti [2].

Na druhé straně bez výjimky všechny správně provedené pokusy svědčí o tom, že ztráty v materiálu nezávisí na frekvenci kmitů, ale na velikosti amplitudy napětí.

Na základě rozboru četných experimentálních vyšetření, provedených jak v SSSR tak i v zahraničí, N. N. DAVIDĚNKOV vybudoval úplně novou fyzikálně podloženou koncepci, publikovanou v r. 1938 [3], o níž je možno bez přehánění prohlásit, že zahájila novou epochu ve vzniku prací, týkajících se ztrát v materiálu při kmitání pružných těles.

Nebudeme se zdržovat rozбором různých výkladů, pojednávajících o fyzikální podstatě ztrát energie v materiálu, které existovaly ještě před zmíněnou prací N. N. Daviděnkova, protože vyčerpávající rozbor všech těchto výkladů je proveden v přehledové části zmíněné práce [3], a zastavíme se krátce pouze u hypotesy navržené N. N. Daviděnkovem.

Protože v zajímavých nás případech kmitů nekonzervativních pružných soustav se jedná o ztráty v materiálu při pružných kmitech, kdy se materiál cyklicky deformuje v mezích Hookova zákona, t. j. nepohybujeme se v oblasti plastických deformací, nemá smyslu mluvit ani o lineární, ani nelineární hypotese vazkého tření. Jak ukazuje N. N. Daviděnkov, zmenšování amplitudy není vůbec nutno vykládat působením odporových sil, úměrných nějaké mocnině rychlosti, nýbrž je třeba toto zmenšování spojit s hystereseční smyčkou, jejíž existence nás přesvědčuje o tom, že příčiny tlumení nesouvisí s rychlostí deformace.

N. N. Daviděnkov vychází ze skutečnosti, že ztráty energie při kmitání závisí na amplitudě a nikoliv na rychlosti, a vyšetřuje hystereseční smyčku, která vzniká při cyklickém zatížení vlivem nedokonalé pružnosti materiálu. Ta vzniká důsledkem toho, že materiál nevyhovuje lineárnímu Hookovu zákonu, s nímž pracuje nauka o pružnosti, t. j. zdánlivý modul pružnosti $\frac{d\sigma}{d\xi}$ není ve skutečnosti během jednoho cyklu konstantní, jak se obvykle předpokládá, nýbrž je funkcí nějaké mocniny deformace, což můžeme obecně vyjádřit vztahem

$$\frac{d\sigma}{d\xi} = f(\xi^k).$$

N. N. Daviděnkov, vycházející z tohoto předpokladu, navrhl rovnice křivek, které tvoří hystereseční smyčku, pro různé zatěžovací cykly. Ve zvláštním případě souměrného cyklu přibližné rovnice vzestupné a sestupné větve hystereseční smyčky, jejíž plocha charakterizuje ztrátu energie v jednotce objemu během jednoho cyklu s amplitudou deformace ξ_0 , mohou být napsány ve tvaru

$$\begin{aligned}\vec{\sigma} &= E \left\{ \xi - \frac{\eta}{n} [(\xi_0 + \xi)^n - 2^{n-1}\xi_0^n] \right\}, \\ \overleftarrow{\sigma} &= E \left\{ \xi + \frac{\eta}{n} [(\xi_0 - \xi)^n - 2^{n-1}\xi_0^n] \right\},\end{aligned}\quad (1)$$

kde n a η jsou geometrické konstanty hysterese smyčky, které musí být pro každý materiál určeny na základě pokusů a na které je možno se dívat jako na konstanty, charakterisující tlumení materiálu.

Při řešení problému kmitání pružné soustavy s respektováním ztrát v materiálu bylo přirozené vzít v úvahu fyzikální podstatu soustavy a vyjít z nesporně experimentálně zjištěné skutečnosti, že totiž pro většinu materiálů, kterých se používá v inženýrské praxi, se obě větve hysterese smyčky málo odlišují od přímky vyjadřující Hookův zákon, t. j. hysterese smyčka je „úzká“ a vnáší do pružného kmitání jen malou nelineárnost. To je též důvodem toho, že k řešení takto formulovaného problému kmitání pružných soustav s uvažováním ztrát v materiálu, jakožto problému slabě nelineárního kmitání, bylo přirozené použít asymptotických metod nelineární mechaniky, neboli t. zv. metody malého parametru.

Účinnost těchto metod při řešení různých slabě nelineárních pružných soustav i při řešení problémů fyzikálních byla dokázána základními pracemi akademiků K. M. KRYLOVA a N. N. BOGOLJUBOVA. Proto rozvíjení těchto metod a jejich použití pro řešení úloh uvažovaného typu s hysterese, které jsou klasickým příkladem „slabě nelineárních“ kmitů, bylo zcela přirozené a účelné.

Krátce se zastavíme u schematu výpočtu kmitání pružných soustav s uvažováním ztrát v materiálu, při čemž budeme vycházet z nelineárního pojetí problému a použijeme metody nelineární mechaniky, založené na rozvoji v řadu podle mocnin malého parametru.

Vynucené příčné kmity prutu

Pro názornost budeme vyšetřovat typický případ výpočtu kmitání pružné soustavy s rozloženými konstantami a jako příklad pro konkrétnost vyšetříme vynucené kmity prutu konstantního průřezu, který příčně kmitá působením síly $\varepsilon q \cos \omega t$, která představuje stejnoměrně rozložené zatížení s kosinově proměnnou amplitudou. Diferenciální rovnice ustálených kmitů uvažované nekonzervativní pružné soustavy, která má hysterese ztráty, má obecně tvar [5]

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\Phi \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right] = \varepsilon q \cos \omega t, \quad (2)$$

kde EI je tuhost tyče v ohybu, $u(x, t)$ je funkce vyjadřující průhybovou čáru, $\varepsilon q = q_0$ je amplituda stejnoměrně rozloženého zatížení, m hmota na jednotku

délky, ω kruhová frekvence vnější zatěžující síly, x souřadnice ve směru osy prutu, t čas, ε malý parametr, $\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\Phi \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right]$ je operátor, který charakterizuje ztráty energie v materiálu prutu při kmitání a jehož velikost je řádově ε jako amplituda vnější síly q_0 .

Malý parametr ε má v daném případě zcela určitý fyzikální smysl. Představuje totiž poměr energie zmařené v určitém objemu materiálu během jedné periody (tato energie je úměrná ploše hysterese smyčky) a maximálního množství potenciální energie nahromaděné v tomto objemu a jeho velikost je řádově 10^{-2} .

Při řešení rovnice (2) se podle uvedené metody funkce průhybu $u(x, t)$, kruhová frekvence kmitů ω a úhel fázového posunutí ψ vyjádří ve tvaru těchto asymptotických rozvojit

$$u(x, t) = \varphi(x) a \cos(\omega t + \psi) + \varepsilon u_1(x, t) + \varepsilon^2 u_2(x, t) + \dots, \quad (3)$$

$$\omega^2 = \omega_c^2 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots, \quad (4)$$

$$\psi = \psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \dots. \quad (5)$$

Přitom se předpokládá, že $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ atd. neobsahují první harmonickou.

Dosadíme rozvoje (3)–(5) do rovnice (2), použijeme toho, že vnější periodická síla je úměrná $\cos \omega t$ a že $\varepsilon \neq 0$ a dostaneme rovnici (2) ve tvaru této soustavy:

$$EI \frac{d^4 \varphi(x)}{dx^4} - m \omega_c^2 \varphi(x) = 0, \quad (6)$$

$$EI \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} + m \omega_c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - m A_1 a \varphi(x) \cos \tau - q \cos(\tau - \psi_0) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\Phi \left(\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} a \cos \tau \right) \right] = 0, \quad (7)$$

$$EI \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} + m \omega_c^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} + m A_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} - m A_2 \varphi(x) a \cos \tau - q \cos(\tau - \psi_0) - q_0 \psi_1 \sin(\tau - \psi_0) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\Psi(x, \tau)] = 0, \quad (8)$$

.....
kde $\Psi(x, \tau)$ je funkce, která zpřesňuje respektování ztrát energie v materiálu ve druhém přiblížení a

$$\tau = \omega t + \psi.$$

Rovnice (6)–(8) jsou výchozími rovnicemi, pomocí nichž můžeme vyšetřovat kmitání uvažované nelineární soustavy s různým přiblížením.

Abychom určili funkci $\varphi(x)$ a kruhovou frekvenci kmitání ω_c v nultém přiblížení, t. j. bez uvažování ztrát v materiálu, musíme řešit „neporušenou“ rovnici (6), která je vlastně rovnicí (2) pro $\varepsilon = 0$.

Nebudeme se zdržovat řešením rovnice (6), ačkoliv její řešení je známé a nepředstavuje zvláštních potíží, a přejdeme k vyšetřování řešení v prvním přiblížení. Přitom budeme nadále předpokládat, že známe průhybovou funkci $\varphi(x)$ a vlastní frekvenci kmitů ω_c , které dostaneme z rovnice (6) při daných krajových podmínkách.

Abychom vyřešili úlohu v prvním přiblížení, musíme podle rozvoju (3)–(5) vyšetřovat rovnici (7).

Použijeme zákona o zachování energie (změna energie kmitající soustavy během jedné periody je rovna nule), vynásobíme rovnici (7) jednou výrazem $\varphi(x) \sin \tau \, dx \, d\tau$, po druhé výrazem $\varphi(x) \cos \tau \, dx \, d\tau$ a zintegrujeme tyto rovnice podle x od 0 do l a podle času přes jednu periodu.

Integrujeme-li per partes podle x a τ a použijeme-li přitom okrajových podmínek a té okolnosti, že funkce $u_1(x, t)$ neobsahuje první harmonickou, snadno dospějeme k této soustavě čtyř rovnic:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^l \left[EI \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} + m\omega_c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} \right] \varphi \sin \tau \, dx \, d\tau = 0, \quad (9)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^l \left\{ -aA_1 m \varphi \cos \tau - q \cos(\tau - \psi_0) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\Phi \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} a \cos \tau \right) \right] \right\} \varphi \sin \tau \, dx \, d\tau = 0, \quad (10)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^l \left[EI \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} + m\omega_c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} \right] \varphi \cos \tau \, dx \, d\tau = 0, \quad (11)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^l \left\{ -aA_1 m \varphi \cos \tau - q \cos(\tau - \psi_0) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\Phi \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} a \cos \tau \right) \right] \right\} \varphi \cos \tau \, dx \, d\tau = 0. \quad (12)$$

Z rovnic (9)–(12) dostaneme, že hledané veličiny $\sin \psi_0$ a A_1 mají tvar

$$\sin \psi_0 = \left[\pi q \int_0^l \varphi \, dx \right]^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\Phi \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} a \cos \tau \right) \right] \varphi \sin \tau \, dx \, d\tau = S(a, \varphi, q), \quad (13)$$

$$A_1 = \left[am\pi \int_0^l \varphi^2 dx \right]^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^l \left\{ \frac{\varepsilon^2}{\partial x^2} \left[\Phi \left(\frac{d^2 q}{dx^2} a \cos \tau \right) \right] \varphi \cos \tau dx d\tau - \right. \\ \left. - \pi q \cos \psi_0 \int_0^l \varphi dx \right\} = \Omega(a, \varphi, q, \psi_0). \quad (14)$$

Výraz pro funkci průhybu $u_1(x, \tau)$, je-li jej nutno zpřesnit, můžeme určit z rovnic (9) nebo (11).

Na základě (4) a (14) a též (5) a (13) vzorce prvního přiblížení pro určení frekvence a fázového posunutí můžeme zkráceně zapsat ve tvaru

$$\omega_I^2 = \omega_c^2 + \varepsilon \Omega(a, \varphi, q, \psi_0), \quad (15)$$

$$\sin \psi_0 = S(a, \varphi, q). \quad (16)$$

Řešením rovnic (15) a (16) můžeme sestavit rezonanční křivku $a = f(\omega)$ libovolně vyšetřované kmitavé soustavy.

Abychom mohli najít výraz pro funkce $\Omega(a, \varphi, q, \psi_0)$ a $S(a, \varphi, q)$, musíme podle rovnic (15) a (16) znát výraz pro funkci $\Phi \left(\frac{d^2 q}{dx^2} a \cos \tau \right)$, která vystupuje v rovnicích prvního přiblížení, protože ve výchozí diferenciální rovnici (2) se vyskytuje nelineární člen $\varepsilon \Phi_{xx}(u_{xx})$, respektující ztráty energie v materiálu.

Zjistíme, co představuje funkce $\Phi(u_{xx})$. Vzhledem k vyšetřovaným příčným kmitům dlouhých tenkých prutů, kdy ztráta energie v materiálu bude v podstatě určena normálním napětím, musíme k zjištění tvaru funkce $\Phi(u_{xx})$ vyjít z nelineární závislosti normálních napětí při zatížení a odlehčení prutu, který příčně kmitá, čímž vznikne hysterese smyčka. Je možno použít závislosti mezi napětím a deformací navržených N. N. Daviděnkovem, které zřejmě nejlépe vyjadřují fyzikální stránku ztráty energie při velkých napětích. Výrazy pro ohybové momenty působící v průřezu prutu v libovolném okamžiku periody při zatížení a odlehčení mohou být obecně představeny, při uvažování vnitřního tření, ve tvaru

$$\dot{M} = M + \dot{M}_s, \\ \ddot{M} = M + \ddot{M}_s, \quad (17)$$

kde M je ohybový moment pružných sil a M_s je moment vnitřního tření, který je totožný s funkcí $\varepsilon \Phi(u_{xx})$. Na základě závislosti (1) mohou být výrazy (17) zrozsápný pro vzestupný a sestupný pohyb kmitajícího prutu ve tvaru

$$\overset{\pm}{M} = E \int_{(F)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} z^2 dF \mp \frac{E\eta}{n} \int_{(F)} \left\{ \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{t=0} \pm \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]^n - 2^{n-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{t=0} \right\} z^{n+1} dF \quad (18)$$

nebo v prvním přiblížení, s ohledem na vyšetřovaný příklad

$$\ddot{M}_s = \varepsilon \Phi(u_{xx}) = \mp 2 \int_0^{\frac{h}{2}} \left\{ E \frac{\eta}{n} \left[a \frac{d^2 q}{dx^2} z \pm a \frac{d^2 q}{dx^2} z \cos \tau \right]^n - 2^{n-1} \left[a \frac{d^2 q}{dx^2} z \right]^n \right\} b z dz.$$

Vidíme tedy, že pro vzestupný a sestupný pohyb má funkce $\varepsilon \Phi(u_{xx})$ jiný tvar, což je nutno mít na zřeteli při integraci rovnice (14) a (15) přes dobu jedné periody.

Vzhledem k vyšetřovanému případu kmitání na jednom konci vetknutého prutu mohou být vzorce (15) a (16) s ohledem na vztah (19), který jsme dostali na základě nelineární závislosti (4), konečně napsány ve tvaru

$$\sin \psi_0 = - \frac{12(n-1) E I a^n h^{n-1} \eta}{n(n+1)(n+2) \pi q \int_0^l q(x) dx} \int_0^l \left[\frac{d^2 q(x)}{dx^2} \right]^{n-1} dx, \quad (20)$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 = 1 + \left[a \pi \omega^2 m \int_0^l q^2(x) dx \right]^{-1}.$$

$$\left\{ \frac{12 E I h^{n-1} \eta a^n}{n(n+2) 2^n} \int_0^\pi \int_0^l \left(\frac{d^2 q(x)}{dx^2} \right)^{n+1} (1 - \cos \tau)^n \cos \tau dx d\tau - \pi q \cos \psi_0 \int_0^l q(x) dx \right\}. \quad (21)$$

Pomocí vzorců (20) a (21) může být sestrojena rezonanční křivka pro libovolnou konkrétní kmitavou soustavu vyšetřovaného typu.

Přitom ovšem předpokládáme, že konstanty n a η hysterese smyčky, které charakterisují tlumení v materiálu vyšetřovaného prutu, jsou známy.

Jako příklad budeme vyšetřovat příčné kmity na jednom konci vetknutého ocelového prutu s konstantním průřezem a rozměry

$$l = 200 \text{ mm}, \quad b = 30 \text{ mm}, \quad h = 10 \text{ mm}.$$

Jak známo, řešení diferenciální rovnice (6) má tvar

$$\varphi(x) = C_1(\cos kx + \cosh kx) + C_2(\cos kx - \cosh kx) + C_3(\sin kx + \sinh kx) + C_4(\sin kx - \sinh kx), \quad (22)$$

kde

$$k^4 = \frac{\omega_c^2 m}{E I}, \quad (23)$$

m je hmota jednotkové délky prutu.

S ohledem na krajové podmínky uvažovaného příkladu

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(l) = 0, \quad \varphi'''(l) = 0,$$

dostáváme $C_1 = C_3 = 0$ a též známou rovnici pro frekvenci

$$\cos kl \cosh kl = -1.$$

Na základě (23) najdeme vlastní kruhovou frekvenci prutu

$$\omega_c = 1,268 \cdot 10^3.$$

Použijeme ještě dodatečné podmínky $\varphi(l) = 1$ a určíme integrační konstanty C_2, C_4 a tedy i funkci

$$\varphi(x) = \frac{1}{2 \sin kl \sinh kl} [(\cos kl + \cosh kl)(\cosh kx - \cos kx) + (\sin kl - \sinh kl)(\sinh kx - \sin kx)]. \quad (22')$$

Známe-li výraz pro funkci $\varphi(x)$, můžeme vypočítat integrály vyskytující se ve vzorcích (20) a (21)

$$\begin{aligned} \int_0^l \varphi(x) dx &= \frac{1}{2 \sin kl \sinh kl} \int_0^l [(\cos kl + \cosh kl)(\cosh kx - \cos kx) + \\ &+ (\sin kl - \sinh kl)(\sinh kx - \sin kx)] dx = -\frac{1}{k} \left(\frac{1}{\sinh kl} - \frac{1}{\sin kl} \right), \\ \int_0^l [\varphi(x)]^2 dx &= \frac{1}{4 \sin^2 kl \sinh^2 kl} \int_0^l [(\cos kl + \cosh kl)(\cosh kx - \cos kx) + \\ &+ (\sin kl - \sinh kl)(\sinh kx - \sin kx)]^2 dx = \frac{1}{4k} \left(\frac{1}{\sin^2 kl} - \frac{1}{\sinh^2 kl} \right). \end{aligned}$$

Zvolme konstanty hysterese smyčky $n = 2$ a $\eta = 31$. Dostaneme

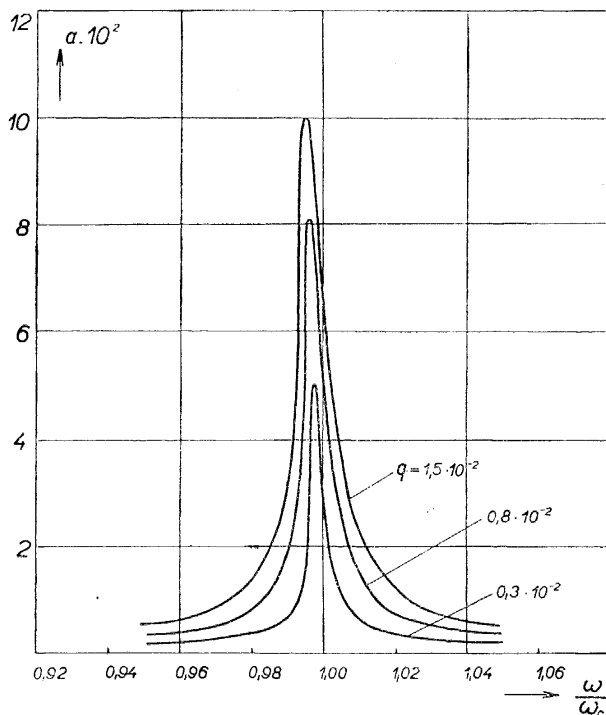
$$\begin{aligned} \int_0^l \left[\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \right]^{n+1} dx &= \int_0^l \left[\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \right]^3 dx = \frac{k^6}{2^3 \sin^3 kl \sinh^3 kl} \int_0^l [(\cos kl + \cosh kl) \cdot \\ &\cdot (\cosh kx + \cos kx) + (\sin kl - \sinh kl)(\sinh kx + \sin kx)]^3 dx = \\ &= \frac{k^5}{2^3 \sin^3 kl \sinh^3 kl} \left\{ (\cos kl + \cosh kl)^3 \left[\frac{8}{5} (\sin kl + \sinh kl) + \right. \right. \\ &+ 4 \sinh kl \sin kl (\sinh kl - \sin kl) + \frac{2}{3} (\sinh kl - \sin kl)^3 \left. \right] + (\sin kl - \sinh kl)^3 \cdot \\ &\cdot \left[\frac{6}{5} \sinh kl \sin kl (\cosh kl - \cos kl) + \frac{12}{5} (\cos kl + \cosh kl) - \frac{16}{5} \right] + \\ &+ (\cos kl + \cosh kl)^2 (\sin kl - \sinh kl) (\cosh kl - \cos kl) \cdot \left(\cos^2 kl + \cosh^2 kl - \frac{17}{5} \right) + \\ &\left. + (\cos kl + \cosh kl) (\sin kl - \sinh kl)^2 (\sinh kl + \sin kl)^3 \right\}, \\ \int_0^\pi (1 - \cos \tau)^2 \cos \tau d\tau &= \int_0^\pi (1 - \cos \tau)^2 \cos \tau d\tau = -\pi. \end{aligned}$$

Dosadíme-li tyto hodnoty integrálů a ostatní dané veličiny do vzorců (20) a (21), obdržíme konečně vzorec:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 = 1 - \frac{70,532 \pm \sqrt{605,03q_0^2 - 896,113a^4}}{606,64a}, \quad (24)$$

$$\sin \psi_0 = 1,217 \frac{a^2}{q_0}.$$

Na základě vzorců (24) byly pro hodnoty $q_0 = 1,5 \cdot 10^{-3}$ kg/cm, $0,8 \cdot 10^{-3}$ kg/cm a $0,3 \cdot 10^{-3}$ kg/cm sestrojeny rezonanční křivky pro uvažovaný případ kmitů vetknutého prutu, které jsou zachyceny na obr. 1.



Obr. 1.

Z rozboru rezonančních křivek je vidět, že kmitání soustavy při respektování ztrát je sice slabě, ale přece zřetelně nelineárního charakteru, a nelineárnost je tím podstatnější, čím větší je napětí určené amplitudou kmitů. Kromě toho mají rezonanční křivky velmi ostrý vrchol, což je důležité pro to, abychom mohli použít metody malého parametru, o níž se ještě zmíníme dále.

Poznamenejme, že účinnost této metody, jak bylo nejednou dokázáno při rozboru konkrétních příkladů [4], spočívá v tom, že pro funkci průhybu

dává již nulté přiblížení, pro frekvenci však první přiblížení dobré výsledky, zatím co vyšší přiblížení, jejichž výpočet je obecně značně složitý, zpřesňuje určení funkce průhybu méně než o 1% a určení polohy jednotlivých bodů rezonanční křivky nejvýše o 2–3%.

Postačující přesnost nultého přiblížení u průhybu a prvního přiblížení u frekvence přímo vyplývá, jak se můžeme snadno přesvědčit, z fyzikální povahy vyšetřovaného problému. Protože totiž první přiblížení souvisí s velikostí plochy hysterese smyčky, je pochopitelné, že druhé přiblížení, které zpřesňuje tvar hysterese smyčky, nemůže se podstatně projevit v konečném výsledku.

Považujeme též za nutné upozornit na tu okolnost, že právě vyložená teorie výpočtu je založena na respektování ztrát energie v daném kmitajícím pružném tělese a automaticky zachycuje stav napětí v každé jednotce jeho objemu. Protože celková energie spotřebovaná v tělese libovolného tvaru se vypočte integrací po celém objemu, nezávisle na složitosti tvaru průřezu prutu, na níž závisí rozložení napjatosti v tělese, odpadá nutnost zavádět při výpočtu kmitů s respektováním ztrát energie zvlášť funkci rozložení napětí a zvlášť funkci pohlcování energie, jak to na př. činí COCHARDT [5], když uvažuje ztráty energie v konstrukčních detailech turbinových lopatek.

Podstatnou zvláštností právě vyložené metody výpočtu pružných soustav s respektováním hysterese, jak jsme nejdříve upozorňovali ve svých předchozích pracích, je i to, že je založen na jistých předpokladech, a to speciálně o malosti vnější síly ve srovnání se silami setrvačnými a pružnými. Je naprosto jasné, že oprávněnost takového předpokladu vyplývá z toho, že v uvažovaném „hysterese“ problému nás především zajímá pásmo v okolí resonance, kde jsou předně zmíněné podmínky splněny a kde za druhé vznikají značná napětí a tím i podstatné ztráty v materiálu, s nimiž je nutno počítat. Ve větší vzdálenosti od resonance problém vůbec ztrácí smysl.

Připomeňme také to, že rezonanční křivky, které byly v poslední době pořízeny v naší laboratoři [6] při příležitosti zjišťování ztrát energie v prutu s homogenně rozloženým napětím (podélné kmity), plně potvrdily správnost nelineárního postupu při řešení problémů tohoto druhu: Experimentálně zjištěné rezonanční křivky jsou stejně nesymetrické jako křivky, které jsme dostali z výpočtů založených na metodách nelineární mechaniky.

Vlastní příčné kmity prutu

Diferenciální rovnici vlastních příčných kmitů prutu konstantního průřezu s respektováním ztrát můžeme snadno dostat z rovnice vynucených kmitů (2),

položíme-li v ní vnější sílu rovnou nule. V takovém případě tato rovnice nabude tvaru

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\Phi \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right] = 0$$

neboli

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\varepsilon f''(u_{xx}), \quad (25)$$

kde

$$f''(u_{xx}) = -\frac{1}{EI} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\Phi \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right]. \quad (26)$$

Pro $\varepsilon = 0$ rovnice (25) přejde v obyčejnou lineární rovnici vlastních kmitů nosníku, jejíž řešení lze dostat obvyklými existujícími metodami.

Je-li $\varepsilon \neq 0$ a je-li vnější síla, která vystupuje v pravé části rovnice (25) a obsahuje malý parametr, malá, je účelné hledat řešení rovnice (25) ve tvaru asymptotické řady

$$u(x, t) = a\varphi(x) \cos \tau + \varepsilon u_1(a, x, \tau) + \varepsilon^2 u_2(a, x, \tau) + \dots, \quad (27)$$

v němž $\varphi(x)$ je řešení (22) homogenní rovnice (6) nebo

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (28)$$

a $u_1(a, x, \tau)$, $u_2(a, x, \tau)$ jsou periodické funkce proměnné τ s periodou 2π , při čemž velikost amplitudy a a fázového úhlu τ , které jsou funkcemi času, se určí z diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \\ \frac{d\tau}{d\tau} &= \omega_c + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots, \end{aligned} \quad (30)$$

kde ω_c je vlastní frekvence kmitů prutu bez tlumení, jehož pohyb popisuje rovnice (28).

V dalším bude náš úkol tedy spočívat ve volbě vhodných výrazů pro funkce

$$u_1(a, x, \tau), u_2(a, x, \tau), \dots, A_1(a), A_2(a), \dots, B_1(a), B_2(a), \dots \quad (31)$$

takových, aby výraz (27), kam bylo dosazeno z (30), vyhovoval rovnici (25).

Aby funkce (31), které jsou koeficienty u jednotlivých mocnin malého parametru, byly jednoznačně určeny, musí funkce $u_1(a, x, \tau)$, $u_2(a, x, \tau)$ podle teorie konstrukce asymptotických řešení rovnice (25) ještě splňovat podmínky, že neobsahují první harmonické, t. j. musí být splněny rovnice

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} u_1(a, x, \tau) \cos \tau \, d\tau &= 0; & \int_0^{2\pi} u_2(a, x, \tau) \cos \tau \, d\tau &= 0; \dots; \\ \int_0^{2\pi} u_1(a, x, \tau) \sin \tau \, d\tau &= 0; & \int_0^{2\pi} u_2(a, x, \tau) \sin \tau \, d\tau &= 0; \dots \end{aligned} \quad (32)$$

Tyto podmínky s fyzikálního hlediska znamenají, že za veličinu a ve výrazu (27) bereme amplitudu první základní harmonické.

Použijeme-li čtvrté derivace výrazu (27), kde a i τ považujeme za proměnné, určené rovnicemi (30), můžeme napsat levou stranu diferenciální rovnice (25) ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = & a \left(\frac{d^4 \varphi(x)}{dx^4} - \alpha \omega^2 \varphi(x) \right) \cos \tau + \\ & + \varepsilon \left\{ -2\omega A_1(a) \varphi(x) \sin \tau - 2\omega a B_1(a) \varphi(x) \cos \tau + \omega^2 \alpha^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} \right\} + \\ & + \varepsilon^2 \left\{ \left[A_1(a) \frac{dA_1(a)}{da} - a B_1^2(a) - 2\omega a B_2(a) \right] \varphi(x) \cos \tau - \right. \\ & - \left[\omega A_2(a) + A_1(a) B_1(a) + A_1(a) \frac{dB_1(a)}{da} a \right] \varphi(x) \sin \tau + \\ & \left. + 2\omega A_1(a) \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \tau} + 2\omega B_1(a) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + \omega^2 \alpha^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} \right\} + \varepsilon^3 \dots \quad (33) \end{aligned}$$

Dále musíme rozložit pravou stranu rovnice (25) v řadu podle mocnin malého parametru

$$\varepsilon f''(u_{xx}) = \varepsilon f''[a\varphi''(x) \cos \tau] + \varepsilon^2 f'''[a\varphi''(x) \cos \tau] u_1 + \varepsilon^3 \dots \quad (34)$$

Aby výraz (27) vyhovoval výchozí rovnici (25) s přesností řádu ε^{m+1} , musí se rovnat koeficienty u stejných mocnin ε v pravých stranách výrazů (32) a (34) až do členů m -tého stupně včetně.

Z povahy problému plyne, že můžeme vzít $m = 2$. Na základě toho, co bylo řečeno dříve, dospíváme konečně k soustavě rovnic

$$\frac{d^4 \varphi(x)}{dx^4} - p^2 \varphi = 0, \quad (35)$$

kde $p^2 = \alpha^2 \omega^2$,

$$-2\varphi(x) \omega A_1(a) \sin \tau - 2\varphi(x) \omega a B_1(a) \cos \tau + \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} + p^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} = f''[a\varphi''(x) \cos \tau]. \quad (36)$$

Abychom určili $A_1(a)$ a $B_1(a)$, násobíme rovnici (36) jednou výrazem $\varphi(x) \cos \tau dx d\tau$, po druhé výrazem $\varphi(x) \sin \tau dx d\tau$ a výsledek zintegrujeme přes délku prutu (od 0 do l) a přes délku periody (od 0 do 2π):

$$\begin{aligned} & \int_0^l \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} + p^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} \right\} \varphi(x) \cos \tau dx d\tau = \\ & = \int_0^l \int_0^{2\pi} \{ f''[a\varphi''(x) \cos \tau] + 2\omega A_1(a) \varphi(x) \sin \tau + 2\omega a B_1(a) \varphi(x) \cos \tau \} \varphi(x) \cos \tau dx d\tau, \quad (40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} + p^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} \right\} \varphi(x) \sin \tau \, dx \, d\tau = \\
= & \int_0^l \int_0^{2\pi} \{ f''[a\varphi''(x) \cos \tau] + 2\omega A_1(a) \varphi(x) \sin \tau + 2\omega a B_1(a) \varphi(x) \cos \tau \} \varphi(x) \sin \tau \, dx \, d\tau
\end{aligned} \tag{41}$$

Integraci per partes lze ukázat [4], že

$$\begin{aligned}
\int_0^l \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} \varphi(x) \, dx &= \int_0^l \frac{d^4 \varphi(x)}{dx^4} u_1 \, dx, \\
\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} \sin \tau \, d\tau &= - \int_0^{2\pi} u_1 \sin \tau \, d\tau.
\end{aligned}$$

Z toho na základě (35)

$$\int_0^{2\pi} \int_0^l \left(\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} + p^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} \right) \varphi(x) \sin \tau \, d\tau \, dx = \int_0^{2\pi} \int_0^l \left(\frac{d^4 \varphi(x)}{dx^4} - p^2 \varphi \right) u_1 \sin \tau \, d\tau \, dx = 0.$$

Obdobně je možno ukázat, že i levá strana rovnice (41) se rovná nule.

Z toho a z rovnice (40) najdeme výraz pro

$$B_1(a) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^l f''[a\varphi''(x) \cos \tau] \varphi(x) \cos \tau \, dx \, d\tau}{2\omega\pi \int_0^l \varphi^2(x) \, dx} \tag{42}$$

a z rovnice (41) určíme

$$A_1(a) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^l f''[a\varphi''(x) \cos \tau] \varphi(x) \sin \tau \, dx \, d\tau}{2\omega\pi \int_0^l \varphi^2(x) \, dx} \tag{43}$$

Abychom určili $u_1(a, x, \tau)$, musíme se zabývat rovnicí (36), kterou zapíšeme ve tvaru

$$\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} + p^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} = F(a, x, \tau), \tag{44}$$

kde

$$F(a, x, \tau) = f''[a\varphi''(x) \cos \tau] + 2\omega A_1(a) \varphi(x) \sin \tau + 2\omega a B_1(a) \varphi(x) \cos \tau. \tag{45}$$

Dále rozložíme $u_1(a, x, \tau)$ a $F(a, x, \tau)$ ve Fourierovu řadu:

$$u_1(a, x, \tau) = u_0(a, x) + \sum \{ u_n^c(a, x) \cos n\tau + u_n^s(a, x) \sin n\tau \}, \tag{46}$$

$$F(a, x, \tau) = g_0(a, x) + \sum \{ g_n(a, x) \cos n\tau + h_n(a, x) \sin n\tau \}, \tag{47}$$

kde

$$\begin{aligned}
 g_0(a, x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(a, x, \tau) \, d\tau, \\
 g_n(a, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(a, x, \tau) \cos n\tau \, d\tau, \\
 h_n(a, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(a, x, \tau) \sin n\tau \, d\tau.
 \end{aligned} \tag{48}$$

Abychom nyní určili $u_1(a, x, \tau)$, musíme řešit soustavu diferenciálních rovnic typu (44), kde použijeme patřičných členů rovnic (46) a (47). Přitom $u_1(a, x, \tau)$ dostaneme jako součet členů řady, která má tvar pravé strany rozvoje (46). Metoda řešení obdobných rovnic je vyložena ve druhé kapitole monografie [4].

Protože nás zajímá pouze první přiblížení, můžeme pro funkci průhybu s dostatečnou přesností použít vzorce (38), neboť podle (30) stupeň přesnosti vzorce (38) bude též jako vzorec prvního přiblížení

$$u = a\varphi(x) \cos \tau + \varepsilon u_1(a, x, \tau).$$

To je důvodem toho, že při řešení úlohy v prvním přiblížení se zde nemusíme podrobně zdržovat vyvozováním konečných vzorců pro

$$u_1(a, x, \tau).$$

Když jsme určili výrazy pro $A_1(a)$ a $B_1(a)$ na základě vzorců (43), (42) a (30), můžeme snadno dospět ke vzorcům pro amplitudu kmitů a a fázový úhel τ v závislosti na čase t . Skutečně, dosadíme-li (43) a (42) do (30), máme

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon \int_0^{2\pi} \int_0^l f''[a\varphi''(x) \cos \tau] \varphi(x) \sin \tau \, dx \, d\tau}{2\omega\pi \int_0^l \varphi^2(x) \, dx}, \tag{49}$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \omega_c - \frac{\varepsilon \int_0^{2\pi} \int_0^l f''[a\varphi''(x) \cos \tau] \varphi(x) \cos \tau \, dx \, d\tau}{2a\omega\pi \int_0^l \varphi^2(x) \, dx}. \tag{50}$$

Abychom mohli napsat diferenciální rovnice (49) a (50) v explicitním tvaru, je účelné explicitně vyjádřit funkci $f''[a\varphi''(x) \cos \tau]$ a transformovat zlomky v těchto vzorcích.

Proto vyjdeme z existujících nelineárních vztahů mezi normálním napětím při ohybu σ a poměrným prodloužením ξ (1).

Potom s ohledem na uvažovaný případ ohybu prutu obdélníkového průřezu o šířce b a výšce h

$$\begin{aligned}
 (\xi_0)_{\max} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{\max} \frac{h}{2} = \left[a \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right)_{\tau=0} + \dots \right] \frac{h}{2}, \\
 \xi_0 &= (\xi_0)_{\max} \frac{2z}{h} = \left[a \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right)_{\tau=0} + \dots \right] z, \\
 \xi_z &= \left[a \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \cos \tau + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \dots \right] z, \\
 \bar{\Phi} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) &= \mp \int_{(F)} E \frac{\eta}{n} \left\{ a \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right)_{\tau=0} + \dots \pm \right. \\
 &\quad \left. \pm \left[a \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \cos \tau + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right]^n - \right. \\
 &\quad \left. - 2^{n-1} \left[a \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right)_{\tau=0} + \dots \right]^n \right\} z^{n+1} dF, \quad (51)
 \end{aligned}$$

kde z značí vzdálenost od neutrální osy. Protože jsme si vzali za cíl dospět k řešení v prvním přiblížení a protože pravá strana rovnice (25) je násobena malým parametrem ε , může být výraz (51) podstatně zjednodušen a v prvním přiblížení napsán ve tvaru

$$\bar{\Phi}[a\varphi''(x) \cos \tau] = \mp E \frac{\eta}{n} a^n \int_{(F)} [(1 \pm \cos \tau)^n - 2^{n-1}] \left(\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \right)^n z^{n+1} dF.$$

S ohledem na to, že pro prut obdélníkového průřezu platí $dF = b dz$, máme

$$\begin{aligned}
 \bar{\Phi}[a\varphi''(x) \cos \tau] &= \mp \frac{E\eta a^n b}{n} \cdot 2 \int_0^{1/2} [(1 \pm \cos \tau)^n - 2^{n-1}] \left(\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \right)^n z^{n+1} dz = \\
 &= \mp \frac{E\eta a^n b h^{n+2}}{2^{n+2} \cdot n} [(1 \pm \cos \tau)^n - 2^{n-1}] \left(\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \right)^n. \quad (52)
 \end{aligned}$$

Potom vzhledem k (26) můžeme $f''(u_{xx})$ v prvním přiblížení zřejmě napsat ve tvaru

$$f''_1(u_{xx}) = f''([a\varphi''(x) \cos \tau]) = \pm \frac{E\eta a^n b h^{n+2}}{2^{n+2} \cdot n} [(1 \pm \cos \tau)^n - 2^{n-1}] \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \right)^n. \quad (53)$$

Na základě (53) integrály, které vystupují ve jmenovatelích výrazů (49) a (50) mohou být zapsány ve tvaru

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^l f''[a q''(x) \cos \tau] q(x) \sin \tau \, dx \, d\tau &= \frac{E\eta a^n b h^{n+2}}{2^{n+2} \cdot n} \int_0^l \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2 q(x)}{dx^2} \right)^n q(x) \, dx \\ \cdot \left\{ \int_0^\pi [(1 - \cos \tau)^n - 2^{n-1}] \sin \tau \, d\tau + \int_0^{2\pi} [(1 + \cos \tau)^n - 2^{n-1}] \sin \tau \, d\tau \right\} &= \\ &= \frac{E\eta b h^{n+2} (n-1)}{2n(n+1)} a^n \int_0^l \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2 q(x)}{dx^2} \right)^n q(x) \, dx, \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^l f''[a q''(x) \cos \tau] q(x) \cos \tau \, dx \, d\tau &= \frac{E\eta a^n b h^{n+2}}{2^{n+2} \cdot n} \int_0^l \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2 q(x)}{dx^2} \right)^n q(x) \, dx \\ \cdot \left\{ \int_0^\pi [(1 - \cos \tau)^n - 2^{n-1}] \cos \tau \, d\tau + \int_\pi^{2\pi} [(1 + \cos \tau)^n - 2^{n-1}] \cos \tau \, d\tau \right\} &= \\ &= -\frac{E\eta a^n b h^{n+2}}{2^{n+2} \cdot n} \int_0^l \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2 q(x)}{dx^2} \right)^n q(x) \, dx \int_0^\pi (1 - \cos \tau)^n \cos \tau \, d\tau. \end{aligned} \quad (55)$$

Dosadíme-li výrazy pro integrály (54) a (55) do diferenciálních rovnic (49) a (50), dostaneme

$$\frac{da}{dt} = -\frac{E\eta a^n b h^{n+2} (n-1)}{4n(n+1) \omega \pi \int_0^l q^2 \, dx} \int_0^l \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2 q(x)}{dx^2} \right)^n q(x) \, dx, \quad (56)$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \omega_c + \frac{E\eta a^{n-1} b h^{n+2}}{2^{n+2} \cdot n \omega \pi \int_0^l q^2 \, dx} \int_0^l \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2 q(x)}{dx^2} \right)^n q(x) \, dx \int_0^\pi (1 - \cos \tau)^n \cos \tau \, d\tau. \quad (57)$$

Integrací rovnice (56) najdeme

$$\frac{1}{(n-1) a^{n-1}} = -\frac{E\eta b h^{n+2} (n-1)}{4n(n+1) \omega \pi \int_0^l q^2(x) \, dx} \int_0^l \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2 q(x)}{dx^2} \right)^n q(x) \, dx \cdot t + C.$$

Integrační konstantu C určíme z počátečních podmínek

$$(a^{n-1})_{t=0} = a_0^{n-1} = \frac{1}{C(n-1)}.$$

Odtud

$$t = \frac{1}{(n-1)\alpha_0^{n-1}}.$$

Potom amplitudu kmitů můžeme v prvním přiblížení vyjádřit ve tvaru

$$a = \sqrt[n-1]{\frac{1}{E\eta b h^{n+2}(n-1)^2 t \int_0^t \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \right)^n \varphi(x) dx + \frac{1}{\alpha_0^{n-1}}}}$$

nebo

$$a = a_0 \sqrt[n-1]{4n(n+1) \omega \pi \int_0^t \varphi^2(x) dx} \quad (58)$$

kde

$$A = E\eta b h^{n+2}(n-1)^2 \alpha_0^{n-1} t \int_0^t \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \right)^n \varphi(x) dx + 4n(n+1) \omega \pi \int_0^t \varphi^2(x) dx.$$

Integrací rovnice (57) najdeme

$$\tau = \omega t + \frac{E\eta \alpha_0^{n-1} b h^{n+2} \int_0^t \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \right)^n \varphi(x) dx}{2^{n+3} \cdot n \omega \pi \int_0^t \varphi^2(x) dx} \cdot t \int_0^\pi (1 - \cos \tau)^n \cos \tau d\tau + \Theta, \quad (59)$$

kde Θ je fázová konstanta rovná počáteční hodnotě fázového úhlu τ pro $t = 0$,

$$\Theta = (\tau)_{t=0}.$$

Tak mohou být na základě vzorců (58) a (59) v libovolném okamžiku určeny amplituda vlastních tlumených kmitů i velikost fázového posunu kmitů prutu.

Jak jsme již ukázali na konkrétním příkladu [7] při vyšetřování soustavy s jedním stupněm volnosti, výpočet amplitud tlumených kmitů podle vzorců prvního přiblížení dává velmi dobré výsledky. Vzhledem k tomu máme všechny důvody pro to, abychom předpokládali, že obecné vzorce prvního přiblížení (58) a (59) pro soustavy s rozloženými parametry jsou též dostatečně přesné a můžeme je proto doporučit k praktickému používání.

LITERATURA

- [1] *Voigt W.*: Zur Bestimmung der Constanten der Elastizität und Untersuchungen der inneren Reibung für einige Metalle, Ann. d. Phys. u. Chemie, 47, 1892.
- [2] *Луц Е. Б.*: Об определении сил затухания от внутреннего трения при крутильных колебаниях металлических стержней, Вестник металлопромышленности, № 5, 1936.
- [3] *Давиденков Ш. П.*: Обзор о рассеянии энергии при вибрации, Журнал технической физики, том VIII, № 6, 1938.
- [4] *Писаренко Г. С.*: Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале, изд. АН УССР, 1955.
- [5] *Cochardt A. W.*: Method for Determining the Internal Damping of Machine Members, Journal of Appl. Mech., Sept., 1954.
- [6] *Тимошенко В. Г.*: Исследование рассеяния энергии в материале при однородном напряженном состоянии, Труды совещания по колебаниям упругих систем с учетом рассеяния энергии, изд. АН УССР, 1957.
- [7] *Писаренко Г. С.*: Колебания груза на балке с учетом рассеяния энергии в балке, Известия КНИ, том XVIII, 1955.

Резюме

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ РАССЕЯНИЯ ЭНЕРГИИ В МАТЕРИАЛЕ

Г. С. ПИСАРЕНКО (G. S. Pisarenko)

(Поступило в редакцию 25/VI 1957 г.)

В статье приводится теория расчета вынужденных и свободных колебаний систем с распределенными параметрами. Зависимость между напряжением и деформацией считается нелинейной, причем кривая гистерезиса выражается формулой (1). Уравнения колебаний решены методом нелинейной механики, основанным на применении разложений по степеням малого параметра. Сначала рассматривается случай вынужденных колебаний стержня постоянного сечения, совершающего поперечные колебания под действием возмущающей силы $eq \cos \omega t$, представляющей собой равномерно распределенную нагрузку с амплитудой, меняющейся по косинусоидальному закону. В качестве второго случая проведен расчет свободных поперечных колебаний стержня постоянного сечения.

Zusammenfassung

DIE QUERSCHWINGUNGEN DER STÄBE MIT ERWÄGUNG DER MATERIALVERLUSTE

G. S. PISARENKO

(Eingegangen am 25. Juni 1957.)

In diesem Artikel wird die Theorie der Berechnung der erzwungenen und freien Schwingungen von Systemen mit verteilten Parametern beschrieben. Die Beziehungen zwischen der Verlängerung und den Spannungen werden als nichtlinear vorausgesetzt, wobei die Hysteresiskurve durch die Formel (1) ausgedrückt wird. Die Schwingungsgleichungen werden mit Hilfe der Methode des kleinen Parameters, welche oft in der nichtlinearen Mechanik benutzt wird, gelöst. Zuerst wird der Fall der erzwungenen Schwingungen eines Stabes mit unveränderlichem Querschnitt gelöst. Die Querschwingung wird durch die störende Kraft $eq \cos \omega t$ hervorgerufen, welche eine gleichmässige Belastung mit der kosinusoidal veränderlichen Amplitude vorstellt. Weiter werden die freien Schwingungen eines Stabes mit unveränderlichem Querschnitt berechnet.