Vratislav Horálek

O některých přejímacích způsobech surovin

Aplikace matematiky, Vol. 2 (1957), No. 5, 370–389

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102587

O NĚKTERÝCH PŘEJÍMACÍCH ZPŮSOBECH SUROVIN

VRATISLAV HORÁLEK

(Došlo dne 2. května 1957.) DT: 330.682.1.001.2

V článku jsou uvažovány tři normalisované přejímací způsoby, používané při přejímce surovin (kapalin, sypkých hmot a pod.). Je ukázán vliv chyby rozboru vzorku (chem. analysy a pod.) na účinnost příslušných přejímacích způsobů a jsou vyvozeny závěry pro úpravu počtu vzorků. Současně je řešena i otázka chyb prvního a druhého druhu, které vznikají při posuzování zjištěné a skutečné hodnoty analysovaného vzorku.

1. Úvod

Uvažujme případ, kdy surovina je dodávána v pytlích, sudech, barelech a pod. Jestliže u výrobce výslednou operací celého výrobního procesu je homogenisace suroviny, je pochopitelné, že mezi vzorky náhodně odebranými z různých míst dodávky bude pouze nepatrný rozdíl. Ten vzniká nejčastěji vlivem chyby prováděného rozboru (chemické analysy a pod.).

Z praxe víme, že k homogenisaci suroviny u výrobce většinou nedochází a že je prováděna pouze regulace výrobních operací. Základní jednotky (pytle, sudy, barely, atd.) jsou plněny surovinou plynule u jednotlivých mlýnů, van nebo jiného výrobního zařízení. V tomto stavu přichází surovina do skladu a odtud je postupně expedována. Je potom zajisté důležitá otázka určení správných přejímacích způsobů pro tyto druhy surovin, neboť i nepatrně zvýšený podíl nejakostní suroviny, který propouštíme přes vstupní kontrolu do výroby, ve srovnání s tolerovaným podílem může znamenat u některých surovin velké národohospodářské ztráty ve výrobě.

V tomto článku se zabýváme účinností tří přejímacích způsobů, které jsou uváděny v normách a technických podmínkách pro kapaliny, sypké hmoty, některé tuhé hmoty (asfalt, kalafuna a pod.), chemikalie, atd. Jde o tyto přejímací způsoby:

Přejímací způsob A: Rozhodnutí o jakosti přejímané partie činíme na základě výsledků rozboru jednoho náhodně odebraného vzorku z dodávky.

Přejímací způsob B: Rozhodnutí o jakosti přejímané partie činíme na základě výsledku rozboru jednoho průměrného vzorku, který vznikl promísením m vzorků (stejné váhy nebo objemu), které jsme odebrali náhodně z dodávky. Přitom se předpokládá, že utvořený průměrný vzorek získá průměrnou hodnotu sledované vlastnosti všech odebraných vzorků.

Přejímací způsob C: Rozhodnutí o jakosti přejímané partie činíme na základě hodnoty výběrového průměru výsledků rozborů n náhodně odebraných vzorků, při čemž každý z těchto vzorků podrobíme samostatně rozboru.

U všech přejímacích způsobů postupujeme tak, že z každé vzorkované základní jednotky odebereme pouze jeden vzorek. O surovině v základní jednotce předpokládáme, že je zcela homogenní.

Pokud jde o přesnost prováděného rozboru a o hodnotu, vůči které posuzujeme jakost suroviny v dodávce, předpokládáme, že jsou předem známy. Pojem přesnosti ztotožňujeme s pojmem „experimentální chyby", pod který zahrnujeme vliv teploty prostředí, vážení vzorků, doby míšení, doby spalování vzorků a pod.

Ačkoliv jednotlivé typy přejímky měřením jsou řešeny v řadě prací (na př. [1], [2], [3]), nebyl dosud nikde uvažován vliv chyby rozboru na výslednou účinnost přejímacího způsobu. V předložené práci je podáno řešení (odst. 3) pro uvedené tři přejímací způsoby. Předpokládá se, že velikost chyby rozboru je nezávislá na skutečné hodnotě sledované vlastnosti a že rozptyl sledované vlastnosti v dodávce je znám. S otázkou účinnosti je současně řešena i otázka chyb prvního a druhého druhu, které vznikají při posuzování rozborem zjištěné hodnoty vzorku (odst. 2).

Výsledky řešení byly aplikovány při vypracovávání návrhů přejímacích způsobů pro některé kabelárenské suroviny v roce 1956 a 1957.

2. Chyby při hodnocení jakosti dodávky

2.1. Formulace úloh.

Přejímací způsob A. Předpokládejme, že z dodávky odebereme náhodně jeden vzorek a provedeme jeho rozbor. Nechť η značí náhodnou proměnnou, která nabývá skutečných hodnot y sledované jakostní vlastnosti zkoušeného vzorku a nechť ζ značí náhodnou proměnnou, která nabývá hodnot chyby rozboru z. Definujme nyní novou náhodnou proměnnou

$$\xi = \eta + \zeta ,$$

která nabývá hodnot x výsledků rozboru zkoušeného vzorku.

Předpokládejme nyní, že náhodné proměnné η a ζ, které jsou vzájemně nezávislé, jsou spojité a že jejich rozdělení se řídí normálním zákonem rozdělení s průměrem μ a rozptylem σ_y^2 resp. s průměrem nulovým a rozptylem σ_z^2. Jsou tedy příslušné frekvenční funkce

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma_y}\right)^2}, \quad -\infty < y < \infty \tag{2.1}$$

a

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_z} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sigma_z}\right)^2}, \quad -\infty < z < \infty\,. \tag{2.2}$$

Potom pro podmíněnou frekvenční funkci náhodné proměnné ξ vzhledem k hypotése $\eta = y$ bude platit

$$f(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_z} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-y}{\sigma_z}\right)^2} \tag{2.3}$$

a pro simultánní frekvenční funkci $f(x, y)$ náhodných proměnných ξ a η

$$f(x, y) = f(y)\,.\,f(x|y)\,. \tag{2.4}$$

Vzhledem k nezávislosti náhodných proměnných η a ζ platí pro střední hodnotu a rozptyl náhodné proměnné ξ

$$\mathsf{E}(\xi) = \mathsf{E}(\eta + \zeta) = \mathsf{E}(\eta) + \mathsf{E}(\zeta) = \mathsf{E}(\eta) = \mu\,, \tag{2.5}$$

$$\mathsf{D}^2(\xi) = \mathsf{D}^2(\eta + \zeta) = \mathsf{D}^2(\eta) + \mathsf{D}^2(\zeta) = \sigma_y^2 + \sigma_z^2 = \sigma_x^2 \tag{2.6}$$

a pro frekvenční funkci

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma_x}\right)^2}. \tag{2.7}$$

Dodávku považujme za jakostně vyhovující, jestliže platí $y \leqq a_A$[1]) a za jakostně nevyhovující, jestliže platí $y > a_A$. Poněvadž v praxi máme k disposici pouze výsledek rozboru, který je zatížen chybou, musíme kritický obor náležitým způsobem upravit. Dodávku považujeme za jakostně vyhovující, jestliže je $x \leqq a_A^*$[1]), a za jakostně nevyhovující, jestliže je $x > a_A^*$.

Hodnocení jakosti dodávky podle přejímacího způsobu A je pak ekvivalentní testování hypotésy H_0, že skutečná hodnota vzorku $y \leqq a_A$, naproti alternativní hypotése H_1. S praktického hlediska nás především zajímají případy, kdy na základě výsledku testu:

a) nesprávně zamítneme testovanou hypotésu H_0, když je správná, — (pravděpodobnost chyby prvního druhu) — risiko ${}_Aq_1$;

b) nesprávně přijmeme hypotésu H_0, když je správná alternativní hypotésa H_1, — (pravděpodobnost chyby druhého druhu) — risiko ${}_Aq_2$.

---

[1]) Určení hodnot a_i a a_i^* ($i = A, B, C$) je provedeno v odst. 3. Podle volby přejímacího postupu (p_1, α) nebo (p_2, β) klademe pak $a = c$ resp. $a = d$ ve smyslu označení a výkladu v odst. 3.

Je tedy

$$ {}_Aq_1 = \mathsf{P}[\eta \leqq a_A\,;\quad \xi > a_A^*] = \iint\limits_{\substack{a_A^* < x < \infty \\ -\infty < y \leqq a_A}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{2.8} $$

a

$$ {}_Aq_2 = \mathsf{P}[\eta > a_A\,;\quad \xi \leqq a_A^*] = \iint\limits_{\substack{-\infty < x \leqq a_A^* \\ a_A^* < y < \infty}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \tag{2.9} $$

kde frekvenční funkce $f(x, y)$ je určena vztahem (2.4).

Přejímací způsob B. Označme $y_1, y_2, \ldots, y_m$ skutečné hodnoty m náhodně odebraných vzorků a $\bar{y}_m$ hodnotu získaného průměrného vzorku, kde

$$ \bar{y}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} y_i\,. \tag{2.10} $$

Nechť η_m značí náhodnou proměnnou, která nabývá hodnot $\bar{y}_m$. Potom stejně jako u přejímacího postupu A můžeme definovat náhodnou proměnnou ξ_m, která nabývá hodnot x_m výsledků rozboru průměrného vzorku a která bude tedy dána vztahem

$$ \xi_m = \eta_m + \zeta\,. $$

Vzhledem předpokladům (2.1) a (2.2) o tvaru frekvenčních funkcí náhodných proměnných η a ζ můžeme zřejmě pro simultánní frekvenční funkci $f(x_m, \bar{y}_m)$ náhodných proměnných ξ_m a η_m psát

$$ f(x_m, \bar{y}_m) = \frac{\sqrt{m}}{2\pi\,\sigma_y\,\sigma_z}\, e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\bar{y}_m - \mu}{\sigma_y}\right)^2 m + \left(\frac{x_m - \bar{y}_m}{\sigma_z}\right)^2\right]}. \tag{2.11} $$

V případě, že rozbor není zatížen žádnou chybou, ohraničme kritický obor hodnotou a_B (dodávku přijímáme pouze, když $\bar{y}_m \leqq a_B$) a v případě, že chyba rozboru existuje, hodnotou a_B^* (dodávku přijímáme pouze, když $x_m \leqq a_B^*$).

Platí tedy analogicky k přejímacímu způsobu A pro pravděpodobnosti chyb prvního a druhého druhu ${}_Bq_1$ a ${}_Bq_2$

$$ {}_Bq_1 = \mathsf{P}[\eta_m \leqq a_B\,;\quad \xi_m > a_B^*] = \iint\limits_{\substack{a_B^* < x_m < \infty \\ -\infty < \bar{y}_m \leqq a_B}} f(x_m, \bar{y}_m)\,\mathrm{d}x_m\,\mathrm{d}\bar{y}_m \tag{2.12} $$

a

$$ {}_Bq_2 = \mathsf{P}(\eta_m > a_B\,;\quad \xi_m \leqq a_B^*] = \iint\limits_{\substack{-\infty < x_m \leqq a_B^* \\ a_B < \bar{y}_m < \infty}} f(x_m, \bar{y}_m)\,\mathrm{d}x_m\,\mathrm{d}\bar{y}_m\,, \tag{2.13} $$

kde frekvenční funkce $f(x_m, \bar{y}_m)$ je určena vztahem (2.11).

Přejímací způsob C. Označme $y_1, y_2, \ldots, y_n$ skutečné hodnoty n náhodně odebraných vzorků a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jejich odpovídající hodnoty zjištěné rozborem. Budeme uvažovat průměry

$$\bar{y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{2.14}$$

a

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \, . \tag{2.15}$$

Nechť nyní η_n značí náhodnou proměnnou, která nabývá hodnot $\bar{y}_n$, a ζ_n náhodnou proměnnou, která nabývá hodnot průměrné chyby rozboru n vzorků. Ve shodě s přejímacím postupem A můžeme tedy definovat náhodnou proměnnou

$$\xi_n = \eta_n + \zeta_n \, , \tag{2.16}$$

která nabývá hodnot $\bar{x}_n$.

Za předpokladu platnosti vztahů (2.1) a (2.2) bude pro simultánní frekvenční funkci $f(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$ náhodných proměnných ξ_n a η_n platit

$$f(\bar{x}_n, \bar{y}_n) = \frac{n}{2\pi\, \sigma_y\, \sigma_z}\, \mathrm{e}^{-\frac{n}{2}\left[\left(\frac{\bar{y}_n - \mu}{\sigma_y}\right)^2 + \left(\frac{\bar{x}_n - \bar{y}_n}{\sigma_z}\right)^2\right]} . \tag{2.17}$$

Podobně jako u přejímacích způsobů A a B ohraničme kritický obor v případě, že chyba rozboru neexistuje, hodnotou a_C (dodávku přijímáme pouze, když $\bar{y}_n \leqq a_C$) a v případě, že chyba rozboru existuje, hodnotou a_C^* (dodávku přijímáme pouze, když $\bar{x}_n \leqq a_C^*$).

Pro pravděpodobnosti chyb prvního a druhého druhu ${}_Cq_1$ a ${}_Cq_2$ tedy dostáváme

$${}_Cq_1 = \mathsf{P}[\eta_n \leqq a_C\, ; \quad \xi_n > a_C^*] = \iint\limits_{\substack{a_C^* < \bar{x}_n < \infty \\ -\infty < \bar{y}_n \leqq a_C}} f(\bar{x}_n, \bar{y}_n)\, \mathrm{d}\bar{x}_n\, \mathrm{d}\bar{y}_n \tag{2.18}$$

a

$${}_Cq_2 = \mathsf{P}[\eta_n > a_C\, ; \quad \xi_n \leqq a_C^*] = \iint\limits_{\substack{-\infty < \bar{x}_n \leqq a_C^* \\ a_C < \bar{y}_n < \infty}} f(\bar{x}_n, \bar{y}_n)\, \mathrm{d}\bar{x}_n\, \mathrm{d}\bar{y}_n \, , \tag{2.19}$$

kde frekvenční funkce $f(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$ je definována vztahem (2.17).

2.2. Výpočet risik ${}_iq_1$ a ${}_iq_2$ ($i = A, B, C$).

Přejímací způsob A. Použijeme-li vztahů (2.4), (2.3) a (2.1), můžeme vyjádřit pravděpodobnostní element $f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ takto

$$f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi\, \sigma_y\, \sigma_z}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y - \mu}{\sigma_y}\right)^2 + \left(\frac{x - y}{\sigma_z}\right)^2\right]}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \, . \tag{2.20}$$

Proveďme dále tyto transformace

$$y = \sigma_y t + \mu \quad \text{a} \quad x = \sigma_z u + \mu \, .$$

Jakobián této transformace je $J = \sigma_y \sigma_z$ a kromě toho platí (2.5), takže pro transformovaný vztah (2.20) platí

$$f(u, t)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} Q(u,t)}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}t\,,$$

kde

$$Q(u, t) = u^2 + \left(1 + \frac{1}{b^2}\right) t^2 - \frac{2}{b} ut$$

a

$$b = \frac{\sigma_z}{\sigma_y}\,. \tag{2.21}$$

Porovnáme-li kvadratickou formu $Q(u, t)$ s příslušnou kvadratickou formou dvojrozměrného normálního rozdělení, dostáváme pro koeficient korelace ϱ mezi proměnnými ξ a η tento vztah

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}}\,. \tag{2.22}$$

Provedeme-li tedy ve vztahu (2.20) transformace

$$y = \sigma_y t + \mu \quad \text{a} \quad x = \frac{\sigma_z}{\sqrt{1 - \varrho^2}} s + \mu\,, \tag{2.23}$$

dostáváme po menších úpravách vztah (2.20) vyjádřen takto

$$f(s, t)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \varrho^2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s^2 - 2\varrho st + t^2}{1 - \varrho^2}\right)} \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t\,. \tag{2.24}$$

Hodnoty distribuční funkce dvojrozměrného normálního rozdělení

$$\iint\limits_{\substack{h < s < \infty \\ k < t < \infty}} f(s, t)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t = M(h, k, \varrho) \tag{2.25}$$

jsou uvedeny v Pearsonových tabulkách [4] a to pro $h \geqq 0$, $k \geqq 0$.

Označme

$$\Phi(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{h} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t \tag{2.26}$$

distribuční funkci normálního rozdělení, která je tabelována na př. v práci [5]. Potom pomocí vztahů (2.25) a (2.26) lze vyjádřit následující integrály

$$\iint\limits_{\substack{-h < s < \infty \\ -\infty < t \leqq -k}} f(s, t)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t = \iint\limits_{\substack{-\infty < s \leqq h \\ k < t < \infty}} f(s, t)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t = 1 - \Phi(k) - M(h, k, \varrho)\,, \tag{2.27}$$

$$\iint\limits_{\substack{-\infty < s \leqq -h \\ -k < t < \infty}} f(s, t)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t = \iint\limits_{\substack{h < s < \infty \\ -\infty < t \leqq k}} f(s, t)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t = 1 - \Phi(h) - M(h, k, \varrho)\,, \tag{2.28}$$

$$\iint\limits_{\substack{-\infty < s \leqq h \\ -k < t < \infty}} f(s, t)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t = \iint\limits_{\substack{-h < s < \infty \\ -\infty < t \leqq k}} f(s, t)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t =$$
$$= \Phi(h) + \Phi(k) - 1 + M(h, k, -\varrho)\,, \tag{2.29}$$

$$\iint\limits_{\substack{h<s<\infty \\ -\infty<t<-k}} f(s,t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \iint\limits_{\substack{-\infty<s\leq -h \\ k<t<\infty}} f(s,t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = M(h, k, -\varrho)\,, \tag{2.30}$$

kde $f(s, t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$ je určeno vztahem (2.24).

Po těchto přípravných výpočtech snadno již vyjádříme risika ${}_Aq_1$ a ${}_Aq_2$, která jsou definována vztahy (2.8) a (2.9).

Proveďme v integrálech na pravých stranách rovnic (2.8) a (2.9) substituce vyplývající ze vztahů (2.23) a (2.22)

$$t = \frac{y-\mu}{\sigma_y} \quad \text{a} \quad s = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}\,\frac{x-\mu}{\sigma_z} \tag{2.31}$$

a pišme dále

$$\frac{a_A-\mu}{\sigma_y} = v_A \quad \text{a} \quad \frac{a_A^*-\mu}{\sigma_y} = v_A^*\,. \tag{2.32}$$

Dostáváme tedy pro ${}_Aq_1$ a ${}_Aq_2$

$${}_Aq_1 = \iint\limits_{\substack{a_A^*<x<\infty \\ -\infty<y\leq a_A}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\substack{\frac{v_A^*}{\sqrt{1+b^2}}<s<\infty \\ -\infty<t\leq v_A}} f(s,t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \tag{2.33}$$

a

$${}_Aq_2 = \iint\limits_{\substack{-\infty<x\leq a_A^* \\ a_A<y<\infty}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\substack{-\infty<s\leq\frac{v_A^*}{\sqrt{1+b^2}} \\ v_A<t<\infty}} f(s,t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,. \tag{2.34}$$

Ke konečnému vyjádření integrálů (2.33) a (2.34) použijeme vztahů (2.27) až (2.30). Tak na př. pro $\mu < a_A < a_A^*$ je $v_A > 0$ a $v_A^* > 0$, takže na př. pro ${}_Aq_1$ podle vztahu (2.28) platí

$${}_Aq_1 = 1 - \Phi\left(\frac{v_A^*}{\sqrt{1+b^2}}\right) - M\left(\frac{v_A^*}{\sqrt{1+b^2}}\,,\quad v_A\,,\quad \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\right).$$

Je-li $a_A^* < \mu < a_A$, pak je $v_A > 0$ a $v_A^* < 0$ a podle vztahu (2.29) je

$${}_Aq_1 = \Phi\left(\frac{v_A^*}{\sqrt{1+b^2}}\right) + \Phi(v_A) - 1 + M\left(\frac{v_A^*}{\sqrt{1+b^2}}\,,\ v_A\,,\ \frac{-1}{\sqrt{1+b^2}}\right).$$

Podobným způsobem bychom mohli vyjádřit risika ${}_Aq_1$ a ${}_Aq_2$ pro další případy vzájemné polohy μ, a_A^* a a_A.

Přejímací způsob B. Analogicky k substitucím (2.31) a k (2.32) při výpočtu risik ${}_Aq_i$ $(i = 1, 2)$ proveďme v integrálech na pravých stranách rovnic (2.12) a (2.13) substituce

$$t = \frac{\bar{y}_m-\mu}{\sigma_y}\sqrt{m} \quad \text{a} \quad s = \frac{b\sqrt{m}}{\sqrt{1+b^2m}}\,\frac{x_m-\mu}{\sigma_z} \tag{2.35}$$

a pišme

$$\frac{a_B-\mu}{\sigma_y}\sqrt{m} = v_B \quad \text{a} \quad \frac{a_B^*-\mu}{\sigma_y}\sqrt{m} = v_B^*\,. \tag{2.36}$$

Při další úpravě použijeme opět vztahů (2.27) až (2.30).

Přejímací způsob C. Postup řešení integrálů v rovnicích (2.18) a (2.19) je stejný jako v případě A a B. Stačí provést substituce

$$t = \frac{\bar{y}_n - \mu}{\sigma_y}\sqrt{n} \quad \text{a} \quad s = \frac{b\sqrt{n}}{\sqrt{1 + b^2}} \frac{\bar{x}_n - \mu}{\sigma_z} \tag{2.37}$$

a při další úpravě položit

$$\frac{a_C - \mu}{\sigma_y}\sqrt{n} = v_C \quad \text{a} \quad \frac{a_C^* - \mu}{\sigma_y}\sqrt{n} = v_C^* \,, \tag{2.38}$$

abychom získali konečné vzorce pro ${}_Cq_1$ a ${}_Cq_2$ v podobném tvaru jako v případě A a B.

3. Vliv chyby rozboru na průběh operativní charakteristiky a úprava přejímacího postupu

Jak známo, účinnost každého výběrového přejímacího způsobu můžeme stanovit z průběhu operativní charakteristiky. V tomto odstavci odvodíme rovnice operativních charakteristik pro přejímací způsoby A, B a C. Přitom budeme uvažovat jednak případy, kdy chyba rozboru neexistuje, jednak případy, kdy chyba rozboru existuje a známe její rozdělení. Z porovnání výsledných vztahů pro tyto dvě skupiny případů vyvodíme závěry o vlivu chyby rozboru na skutečnou účinnost přejímacího způsobu.

Při řešení všech vzniklých úloh budeme předpokládat, že chyba rozboru je nezávislá na skutečné hodnotě sledované vlastnosti a že veličiny σ_y a σ_z jsou známy. Předpoklad známé hodnoty σ_y pro daný druh suroviny je na př. s hlediska regulované chemické výroby zcela přijatelný a v praxi téměř vždy splněn. Nutnost tohoto předpokladu vyplývá mimo to ze skutečnosti, že při způsobech přejímání A, B a C můžeme ověřit vlastně pouze průměrnou hodnotu sledované vlastnosti suroviny (počet vzorků n při způsobu C bývá nejvýše 5; vzhledem k nákladnosti rozborů bývá tohoto způsobu velmi málo používáno). O náhodných proměnných η a ξ budeme předpokládat, že jim přísluší frekvenční funkce definované vztahy (2.1) a (2.7) v odst. 2.1.

3.1. Operativní charakteristika v případě, že chyba rozboru neexistuje.

Přejímací způsob A. Nechť η je náhodná proměnná, která nabývá skutečných hodnot sledované vlastnosti a které přísluší frekvenční funkce $f(y)$, definovaná vztahem (2.1)

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma_y}\right)^2} .$$

Označme T_A předepsanou maximální hodnotu sledované vlastnosti. Potom tvrzení, že dodávka obsahuje podíl p jakostně nevyhovující suroviny, je při dané hodnotě σ_y^2 totožné s tvrzením, že střední hodnota sledované vlastnosti je rovna

$$\mu = T_A - K_p \sigma_y \,, \tag{3.1}$$

kde

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{K_p}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt = p \,. \tag{3.2}$$

Jak známo, při stanovení rozhodných čísel, se kterými porovnáváme výsledky výběru, můžeme postupovat dvojí cestou:

a) buď chceme mít zaručeno, aby pravděpodobnost zamítnutí dodávky, obsahující podíl p_1 jakostně nevyhovující suroviny, byla rovna α (dále v textu — volba (p_1, α)),

b) nebo chceme mít zaručeno, aby pravděpodobnost přijetí dodávky, obsahující podíl p_2 jakostně nevyhovující suroviny, byla rovna β (dále v textu — volba (p_2, β)).

Tato úloha je tedy ekvivalentní s úlohou stanovení rozhodných čísel pro daný přejímací způsob v souvislosti:

a) s testováním hypotésy H_0, že podíl jakostně nevyhovující suroviny v přejímaném celku je p_1 nebo menší, naproti alternativní hypotése H_1, kde α je maximální risiko nesprávného zamítnutí hypotésy H_0, když je správná.

b) s testováním hypotésy H_0, že podíl jakostně nevyhovující suroviny v přejímaném celku je p_2 nebo menší, naproti alternativní hypotése H_1, kde β je maximální risiko nesprávného přijetí hypotésy H_0, když je správná alternativní hypotésa H_1.

V případě volby (p_1, α) musí být současně splněny tyto dvě rovnice

$$\mathsf{P}[\eta > T_A \mid \mu, \sigma_y^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y} \int_{T_A}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma_y}\right)^2} dy = p_1 \tag{3.3}$$

a

$$\mathsf{P}[\eta > c_A \mid \mu, \sigma_y^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y} \int_{c_A}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma_y}\right)^2} dy = \alpha \,. \tag{3.4}$$

Provedeme-li ve vztazích (3.3) a (3.4) substituci

$$\frac{y-\mu}{\sigma_y} = t \,,$$

dostáváme vzhledem k označení, uvedenému ve vztahu (3.2), tyto dvě rovnice

$$\frac{T_A - \mu}{\sigma_y} = K_{p_1} \tag{3.5}$$

a
$$\frac{c_A - \mu}{\sigma_y} = K_\alpha . \tag{3.6}$$

Odečtením rovnice (3.6) od rovnice (3.5) získáme rozhodné číslo c_A v tomto tvaru

$$c_A = T_A - \sigma_y (K_{p_1} - K_\alpha) . \tag{3.7}$$

Dodávku tedy přijmeme, když $y \leqq c_A$, a zamítneme, když $y > c_A$.

V případě volby (p_2, β) budou muset být splněny tyto rovnice

$$\mathsf{P}[\eta > T_A \mid \mu, \sigma_y^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y} \int_{T_A}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma_y}\right)^2} dy = p_2 , \tag{3.8}$$

$$\mathsf{P}[\eta > d_A \mid \mu, \sigma_y^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y} \int_{d_A}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma_y}\right)^2} dy = 1 - \beta . \tag{3.9}$$

Podobnou úpravou jako v případě vztahů (3.5) a (3.6) dostáváme pro rozhodné číslo

$$d_A = T_A - \sigma_y(K_{p_2} + K_\beta) . \tag{3.10}$$

Dodávku tedy přijmeme, jestliže $y \leqq d_A$, a zamítneme, jestliže $y > d_A$.

Označme $L_A(p)$ operativní charakteristiku, vyjadřující pravděpodobnost přijetí dodávky, obsahující podíl p jakostně nevyhovující suroviny, při aplikaci přejímacího způsobu A v případě, že chyba rozboru neexistuje. Používáme-li volby (p_1, α), pak platí

$$L_A(p, p_1, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{K_p - K_{p_1} + K_\alpha} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(K_p - K_{p_1} + K_\alpha) . \tag{3.11}$$

Vyjdeme-li z volby (p_2, β) dostáváme

$$L_A(p, p_2, \beta) = \Phi(K_p - K_{p_2} - K_\beta) . \tag{3.12}$$

Přejímací způsob B. V případě volby (p_1, α) musí být splněny současně tyto podmínky

$$\mathsf{P}[\eta > T_A \mid \mu, \sigma_y^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y} \int_{T_A}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma_y}\right)^2} dy = p_1 , \tag{3.13}$$

$$\mathsf{P}[\eta_m > c_B \mid \mu, \sigma_y^2, m] = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y} \int_{c_B}^{\infty} e^{-\frac{m}{2}\left(\frac{\bar{y}-\mu}{\sigma_y}\right)^2} d\bar{y}_m = \alpha , \tag{3.14}$$

kde $\bar{y}_m$ je skutečná hodnota průměrného vzorku, který vznikl promíšením m náhodně odebraných vzorků (viz vztah (2.10)).

Po téže úpravě jako ve vztazích (3.5) a (3.6) dostáváme pro rozhodné číslo

$$c_B = T_A - \sigma_y \left(K_{p_1} - \frac{K_\alpha}{\sqrt{m}}\right). \tag{3.15}$$

Vyjdeme-li z volby (p_2, β), zjistíme, že pro rozhodné číslo d_B musí platit

$$d_B = T_A - \sigma_y \left(K_{p_2} + \frac{K_\beta}{\sqrt{m}}\right). \tag{3.16}$$

Příslušné rovnice operativních charakteristik budou mít tento tvar

$$L_B(p, p_1, \alpha, m) = \Phi\left[\left(K_p - K_{p_1} + \frac{K_\alpha}{\sqrt{m}}\right)\sqrt{m}\right], \tag{3.17}$$

$$L_B(p, p_2, \beta, m) = \Phi\left[\left(K_p - K_{p_2} - \frac{K_\beta}{\sqrt{m}}\right)\sqrt{m}\right]. \tag{3.18}$$

Přejímací způsob C. Abychom získali vztahy pro rozhodná čísla c_C a d_C a pro rovnice operativních charakteristik při přejímacím způsobu C, stačí ve vztazích (3.15) až (3.18) položit $m = n$. Jestliže totiž chyba rozboru neexistuje, je $\bar{y}_n = \bar{x}_n$.

3.2. Operativní charakteristika v případě, že chyba rozboru existuje. Poznámka: V odstavci 3.2 a 3.3 použijeme pro označení rozhodných čísel c a d a operativních charakteristik $L(p)$ symboliky zavedené v odst. 3.1. V případě, že budeme předpokládat existenci chyby rozboru, připojíme k příslušnému symbolu hvězdičku (*).

Přejímací způsob A. Rozhodné číslo c_A^* (při volbě (p_1, α)) určíme řešením těchto dvou podmínkových rovnic

$$\mathsf{P}[\eta > T_A \mid \mu, \sigma_y^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y} \int_{T_A}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma_y}\right)^2} \, dy = p_1 \tag{3.19}$$

a

$$\mathsf{P}[\xi > c_A^* \mid \mu, \sigma_x^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \int_{c_A^*}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma_x}\right)^2} \, dx = \alpha\,. \tag{3.20}$$

Rovnici (3.20) můžeme vzhledem ke (2.5), (2.6) a (2.21) psát ve tvaru

$$\mathsf{P}[\xi > c_A^* \mid \mu, \sigma_x^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 + b^2)}\,\sigma_y} \int_{c_A^*}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1+b^2)}\left(\frac{x-\mu}{\sigma_y}\right)^2} \, dx = \alpha\,, \tag{3.21}$$

takže podle (3.19) a (3.21) vychází

$$\begin{aligned} \frac{T_A - \mu}{\sigma_y} &= K_{p_1}\,, \\ \frac{c_A^* - \mu}{\sigma_y\sqrt{1 + b^2}} &= K_\alpha\,. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Odtud výraz pro rozhodné číslo c_A^*

$$c_A^* = T_A - \sigma_y(K_{p_1} - K_\alpha \sqrt{1 + b^2}) \,. \tag{3.23}$$

Vyjdeme-li z volby (p_2, β) snadno zjistíme, že pro rozhodné číslo d_A^* musí platit

$$d_A^* = T_A - \sigma_y(K_{p_2} + K_\beta \sqrt{1 + b^2}) \,. \tag{3.24}$$

Pro operativní charakteristiky dostaneme při volbě (p_1, α)

$$L_A^*(p, p_1, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}(K_p - K_{p_1} + K_\alpha\sqrt{1+b^2})} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt =$$

$$= \Phi\left[\frac{1}{\sqrt{1 + b^2}} (K_p - K_{p_1} + K_\alpha \sqrt{1 + b^2})\right] \tag{3.25}$$

a při volbě (p_2, β)

$$L_A^*(p, p_2, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}(K_p - K_{p_2} - K_\beta\sqrt{1+b^2})} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt =$$

$$= \Phi\left[\frac{1}{\sqrt{1 + b^2}} (K_p - K_{p_2} - K_\beta \sqrt{1 + b^2})\right] . \tag{3.26}$$

Přejímací způsob B. Opakujeme-li celou úvahu pro případ průměrného vzorku, který vytváříme z m náhodně odebraných vzorků, stačí, abychom určili pouze podmínkovou rovnici pro α resp. β. Podmínková rovnice pro p_1 resp. p_2 zůstává pro přejímací způsoby B a C totožná s příslušnou rovnicí u přejímacího způsobu A.

Podmínková rovnice pro α (při volbě (p_1, α)) má tento konečný tvar

$$\mathsf{P}[\xi_m > c_B^* \mid \mu, \sigma_x^2, m] = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\pi(1 + mb^2)}\, \sigma_y} \int\limits_{c_B^*}^{\infty} e^{-\frac{m}{2(1+mb^2)}\left(\frac{x_m - \mu}{\sigma_y}\right)^2} dx_m = \alpha \,. \tag{3.27}$$

Pro rozhodná čísla c_B^* a d_B^* pak vychází

$$c_B^* = T_A - \sigma_y\left(K_{p_1} - K_\alpha \sqrt{\frac{1 + mb^2}{m}}\right) \tag{3.28}$$

a

$$d_B^* = T_A - \sigma_y\left(K_{p_2} + K_\beta \sqrt{\frac{1 + mb^2}{m}}\right) . \tag{3.29}$$

Analogicky k rovnicím (3.25) a (3.26) dostáváme pro operativní charakteristiky při volbě (p_1, α) resp. (p_2, β):

$$L_B^*(p, p_1, \alpha, m) = \Phi\left[\sqrt{\frac{m}{1 + mb^2}}\left(K_p - K_{p_1} + K_\alpha \sqrt{\frac{1 + mb^2}{m}}\right)\right] \tag{3.30}$$

a

$$L_B^*(p, p_2, \beta, m) = \Phi\left[\sqrt{\frac{m}{1 + mb^2}}\left(K_p - K_{p_2} - K_\beta\sqrt{\frac{1 + mb^2}{m}}\right)\right]. \quad (3.31)$$

Přejímací způsob C. Vzhledem k poznámce u přejímacího způsobu B v tomto odstavci, stanovíme opět jen podmínkovou rovnici pro α. Má tento konečný tvar

$$\mathsf{P}[\xi_n > c_C^* \mid \mu, \sigma_x^2, n] = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi(1 + b^2)}\,\sigma_y} \int_{c_C^*}^{\infty} e^{-\frac{n}{2(1+b^2)}\left(\frac{x_n - \mu}{\sigma_y}\right)^2} \mathrm{d}x_n = \alpha \,. \quad (3.32)$$

Opakováním další úpravy jako v případě přejímacího způsobu B získáme hledané vztahy

$$c_C^* = T_A - \sigma_y\left(K_{p_1} - K_\alpha\sqrt{\frac{1 + b^2}{n}}\right), \quad (3.33)$$

$$d_C^* = T_A - \sigma_y\left(K_{p_2} + K_\beta\sqrt{\frac{1 + b^2}{n}}\right), \quad (3.34)$$

$$L_C^*(p, p_1, \alpha, n) = \Phi\left[\sqrt{\frac{n}{1 + b^2}}\left(K_p - K_{p_1} + K_\alpha\sqrt{\frac{1 + b^2}{n}}\right)\right] \quad (3.35)$$

a

$$L_C^*(p, p_2, \beta, n) = \Phi\left[\sqrt{\frac{n}{1 + b^2}}\left(K_p - K_{p_2} - K_\beta\sqrt{\frac{1 + b^2}{n}}\right)\right]. \quad (3.36)$$

3.3 Rozbor výsledků.

Porovnání rozhodných čísel. Podle definice je $m > 0, n > 0$ a $b > 0$. Je tedy v případě volby (p_1, α)

$$c_i < c_i^* \,, \qquad (i = A, B, C)$$

a v případě volby (p_2, β)

$$d_i > d_i^* \,, \qquad (i = A, B, C)$$

jak vyplývá z porovnání vztahů (3.7) a (3.23), (3.10) a (3.24), atd.

Porovnání průběhů operativních charakteristik.

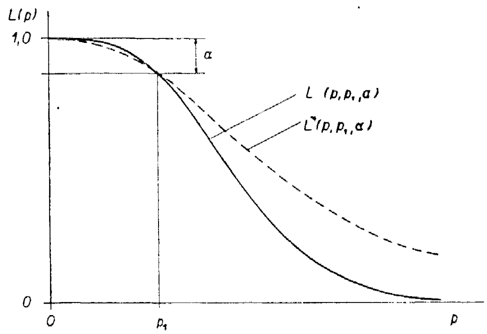
a) Abychom získali informaci o vlivu chyby rozboru na průběh operativní charakteristiky, porovnejme dvojice operativních charakteristik pro každý přejímací způsob. Vzhledem k jejich vyjádření jako integrálů s týmž integrandem a dolní mezí, stačí porovnat pouze horní meze. Proveďme to na př. pro přejímací způsob B při volbě (p_1, α).

Uvědomíme-li si opět, že podle definice je $m > 0$, $b > 0$ a že K_p je klesající funkcí p, snadno zjistíme, že

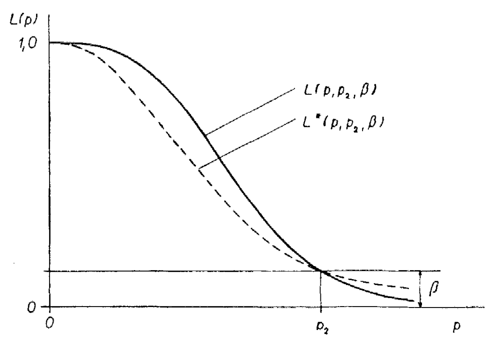
$$\left.\begin{aligned} L_B(p, p_1, \alpha, m) &> L_B^*(p, p_1, \alpha, m) \quad \text{pro} \quad 0 < p < p_1 \,, \\ L_B(p, p_1, \alpha, m) &= L_B^*(p, p_1, \alpha, m) \quad \text{pro} \quad p = \begin{cases} 0 \\ p_1, \\ 1 \end{cases} \\ L_B(p, p_1, \alpha, m) &< L_B^*(p, p_1, \alpha, m) \quad \text{pro} \quad p_1 < p < 1 \,. \end{aligned}\right\} \tag{3.37}$$

Analogické vztahy platí i v případě volby (p_2, β).

K podobným závěrům dospějeme i při porovnání příslušných rovnic u přejímacích způsobů A a C. Graficky jsou výsledky znázorněny na obr. 1a a 1b. Plynulá křivka přísluší případu $b = 0$ (chyba rozboru neexistuje) a čárkovaná křivka případu $b > 0$ (chyba rozboru existuje).



Obr. 1a. Volba (p_1, α).



Obr. 1b. Volba (p_2, β).

Ze získaných výsledků můžeme učinit tyto závěry:

Všimněme si nejprve případu, kdy chceme mít zaručeno, že dodávky s podílem p_1 jakostně nevyhovující suroviny budou zamítány s pravděpodobností α, ať chyba rozboru existuje či nikoliv. Vliv chyby rozboru se v praxi projeví nepříznivě pro dodavatele v tom smyslu, že dodávky obsahující podíl jakostně nevyhovující suroviny $p < p_1$ budou při přejímce častěji zamítány, než kdyby chyba rozboru neexistovala. Naproti tomu u dodávek, obsahujících podíl $p > p_1$, bude chyba rozboru nevýhodou odběratele, neboť pravděpodobnost přijetí takových dodávek je větší, než kdyby chyba rozboru neexistovala.

S hlediska provedeného rozboru použije odběratel raději volby (p_2, β). Zde totiž všechny dodávky s podílem jakostně nevyhovující suroviny $p < p_2$ bude odběratel častěji zamítat ve srovnání s případem, kdy chyba rozboru neexistuje. Přitom pravděpodobnost přijetí dodávky s podílem $p > p_2$ bude vždy menší než β.

b) Všimněme si nyní důsledků, které vyplývají z přejímacího postupu, kdy výsledek rozboru porovnáváme na př. s rozhodným číslem c_i ($i = A, B, C$) a nikoliv s c_i^* ($i = A, B, C$), ačkoliv chyba rozboru existuje.

Nechť α_0 značí pravděpodobnost zamítnutí dodávky s podílem p_1 jakostně nevyhovující suroviny, jestliže chyba rozboru neexistuje, a podobně nechť α_b značí pravděpodobnost zamítnutí dodávky stejně jakostní, jestliže chyba rozboru existuje. Předpokládejme, že rozsah výběru je konstantní a hledejme hodnotu α_b.

Položme tedy na př.

$$c_A^* = c_A ,$$

t. j. vzhledem ke (3.7) a (3.23)

$$T_A - \sigma_y(K_{p_1} - K_{\alpha_b} \sqrt{1 + b^2}) = T_A - \sigma_y(K_{p_1} - K_{\alpha_0}) .$$

Odtud plyne

$$K_{\alpha_b} = \frac{K_{\alpha_0}}{\sqrt{1 + b^2}}, \tag{3.38}$$

neboli pro $b > 0$

$$\alpha_b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{K_{\alpha_0}}{\sqrt{1+b^2}}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt > \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{K_{\alpha_0}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \alpha_0 , \tag{3.39}$$

kde α_0 a b jsou dány.

Vzhledem ke vztahu (3.38) bude pro horní hranici integrálu v rovnici (3.25) platit

$$\frac{1}{\sqrt{1 + b^2}} (K_p - K_{p_1} + K_{\alpha_b} \sqrt{1 + b^2}) = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}} (K_p - K_{p_1} - K_{\alpha_0}) . \tag{3.40}$$

Označme nyní

$$K_{p_1} - K_{\alpha_0} = K_{p_0} . \tag{3.41}$$

Potom porovnáním pravé strany rovnice (3.40) s horní hranicí integrálu v rovnici (3.11) dostáváme vztahy

$$\begin{aligned} L_A(p, p_1, \alpha_0) &> L_A^*(p, p_1, \alpha_b) \quad \text{pro } 0 < p < p_0 , \\ L_A(p, p_1, \alpha_0) &= L_A^*(p, p_1, \alpha_b) \quad \text{pro } p = \begin{cases} 0 \\ p_0 , \\ 1 \end{cases} \\ L_A(p, p_1, \alpha_0) &< L_A^*(p, p_1, \alpha_b) \quad \text{pro } p_0 < p < 1 \end{aligned}$$

a analogicky pro volbu (p_2, β). Ke stejným závěrům dospějeme i u přejímacích způsobů B a C. Grafické znázornění výsledků je uvedeno na obr. 2.

Z výsledků je zřejmé, že v případě, kdy chyba rozboru existuje, ale není uvažována (t. j. rozhodnutí o jakosti dodávky provádíme vždy k hodnotě c_i nebo d_i ($i = A, B, C$)), dochází se strany odběratele k častějšímu zamítání dodávek s podílem jakostně nevyhovující suroviny $p < p_0$ a k častějšímu přejímání dodávek s podílem $p > p_0$. Hodnota p_0 je definována vztahem (3.41).

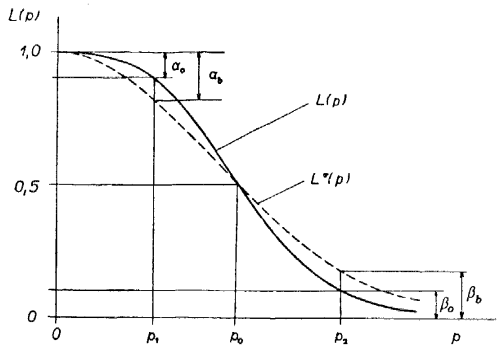
c) Nabízí se pochopitelně otázka, jak upravit přejímací postup v případě existence chyby rozboru, aby bylo $L_i(p) = L_i^*(p)$ — $i = A, B, C$ — pro $0 < p < 1$.

Úvahu proveďme pro přejímací způsob B při volbě (p_1, α). Označme m_0 počet vzorků odebraných v případě přesných měření a m_b počet vzorků odebraných v případě, že existuje chyba rozboru. Přitom požadujme, aby bylo

$$c_B^* = c_B$$

a (ve smyslu označení v bodě b) tohoto odst.)

$$\alpha_b = \alpha_0 \, .$$



Obr. 2. Případ, kdy $c_i = c_i^*$ nebo $d_i = d_i^*$ $(i = A, B, C)$ při konstantním rozsahu výběru.

Použijeme-li rovnic (3.15) a (3.28), můžeme uvedené dva požadavky vyjádřit rovnicí

$$T_A - \sigma_y \left(K_{p_1} - K_{\alpha_0} \sqrt{\frac{1 + m_b b^2}{m_b}}\right) = T_A - \sigma_y \left(K_{p_1} - \frac{K_{\alpha_0}}{\sqrt{m_0}}\right) .$$

Po její úpravě dostáváme

$$m_b = \frac{m_0}{1 - m_0 b^2} \, . \tag{3.42}$$

Poněvadž podle definice musí být $m_0 \geqq 1$ a $m_b \geqq 1$, mohou být uvažovány pouze ty hodnoty b, které splňují podmínku

$$b < \frac{1}{\sqrt{m_0}} \, . \tag{3.43}$$

Pro přejímací způsob C bychom opakováním uvedené úvahy získali vztah mezi n_0 a n_b (indexy mají zde stejný význam jako v předcházejícím případě)

$$n_b = n_0(1 + b^2) \, . \tag{3.44}$$

Přejímací způsob A zde nemůžeme uvažovat, neboť bychom museli předem znát, k jakému přejímacímu způsobu (B nebo C) se rozhodneme, když počet odebraných vzorků bude alespoň 2.

Kdybychom mohli upravit rozsahy výběrů podle (3.42) nebo (3.44), měli bychom zaručeno, že účinnost příslušných přejímacích způsobů bude stejná.

Platilo by

$$\left.\begin{aligned} L_B(p, p_1, \alpha_0, m) &= L_B^*\left(p, p_1, \alpha_0, \frac{m}{1 - mb^2}\right) \\ \text{a} \qquad & \\ L_C(p, p_1, \alpha_0, n) &= L_C^*(p, p_1, \alpha_0, n(1 + b^2)) \,. \end{aligned}\right\} \tag{3.45}$$

Poněvadž však upravený rozsah výběru musí být číslo celé kladné, dostáváme se v praxi opět k určitému rozdílu mezi průběhy příslušných operativních charakteristik $L_i(p)$ a $L_i^*(p)$ ($i = B, C$).

Porovnejme ještě hodnoty m_b a n_b. Položíme-li $m_0 = n_0$, dostáváme vzhledem k rovnicím (3.42) a (3.44)

$$\frac{m_b}{1 + m_b b^2} = \frac{n_b}{1 + b^2} \,,$$

takže na př.

$$n_b = \frac{(1 + b^2)\, m_b}{(1 + m_b b^2)} \,. \tag{3.46}$$

Je tedy $n_b < m_b$ pro $m_b \geqq 2$.

Závěrem tedy můžeme konstantovat, že chceme-li dosáhnout stejné účinnosti přejímacího způsobu, ať chyba rozboru existuje či nikoliv, jsme při použití přejímacího způsobu B omezeni podmínkou (3.43) a ve srovnání s přejímacím způsobem C jsme prakticky vždy nuceni odebrat vyšší počet vzorků. Konečné rozhodnutí zde může dát pouze porovnání součtu nákladů na odebrání a rozbor n_b vzorků se součtem nákladů na odebrání m_b vzorků, na vytvoření jednoho průměrného vzorku a na jeho rozbor.

4. Výpočet nomogramů a tabulek

Pro praktické užití výsledků řešení, které jsou uvedeny v tomto článku, budou pomocí výsledných vztahů v odst. 2 napočteny nomogramy pro určení risik ${}_iq_1$ a ${}_iq_2$ ($i = A, B, C$) a pomocí výsledných vztahů v odst. 3 tabulky rozhodných čísel c_i a d_i resp. c_i^* a d_i^* pro různé zvolené úrovně hodnot p_1, p_2 a b při $\alpha = \beta = 0{,}05$.

LITERATURA

[1] *Bowker, Goode:* Sampling Inspection by Variables, Mc Graw-Hill, New York, 1952.

[2] *Liebermann, Resnikoff:* Sampling Plans for Inspection by Variables, JASA, 1955, June.

[3] Statistical Research Group, Columbia University: Selected Technique of Statistical Analysis, Mc Graw-Hill, New York, 1947.

[4] *Pearson K.:* Tables for Statisticians and Biometricians, Part II., Cambridge University Press.

[5] *Janko:* Tabulky k matematické statistice, 1950.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ ПРИЕМНЫХ МЕТОДАХ СЫРЬЯ

ВРАТИСЛАВ ГОРАЛЕК (Vratislav Horálek)

(Поступило в редакцию 2/V 1957 г.)

В статье проводится теоретический разбор трех приемных методов, используемых при приемке сырья (жидкостей, сыпучих веществ и т. под.), доставляемого в мешках, бочках, жестяных бочках и т. под.

Приемный метод A: О качестве принимаемой партии судим по результату анализа одного случайно выбранного из патрии образца.

Приемный метод B: О качестве принимаемой партии судим по результату анализа одного среднего образца, возникшего совершенным перемешанием m случайно выбранных из партии образцов (одинакового веса или объема). При этом предполагается, что полученный таким образом средний образец достигнет среднего значения неблюдаемого признака всех выбранных образцов.

Приемный метод C: О качестве принимаемой партии судим по значению выборочного среднего значения результатов анализа n случайно выбранных образцов, причем каждый из них подвергается самостоятельному анализу.

Показано влияние ошибки анализа образца (химического анализа и т. под.) на эффективность отдельных приемных методов. На основании сравнения соответствующих оперативных характеристик в случае, когда имеются ошибки анализа, и в случае, когда таких ошибок нет, выводятся заключения для обработки приемочных схем и соотношения между числом образцов приемных планов B и C. Решение дается при условии, что ошибка анализа не зависит от фактического значения наблюдаемого признака образца. О распределении значений наблюдаемого признака в партии и о распределении ошибок анализа предполагается, что оно является нормальным, что его среднее значение равно μ и среднее квадратическое отклонение σ_y или же среднее значение равно нулю, а среднее квадратическое отклонение σ_z. Производя приемку, считаем значения σ_y и σ_z известными. Во всех случаях построение приемочных схем проводится на основании как допустимой, так и недопустимой доли качественно неудовлетворительного сырья в партии.

Далее в статье решается вопрос ошибок первого и второго рода, возникающий при обсуждении обнаруженного и фактического значения образца по отношению к определенному наперед заданному значению. Конечное выражение соответствующих рисков дается извесными табеллированными

функциями функции распределения одномерного и двухмерного нормального распределения.

Для практических целей будут составлены таблицы и номограммы, которые будут опубликованы позднее.

Summary

ON CERTAIN INSPECTION SCHEMES OF RAW MATERIALS

VRATISLAV HORÁLEK

(Received May 2, 1957.)

The paper contains a theoretical analysis of three sampling inspection schemes used when inspecting raw materials (liquids, powder and the like), which are dispatched in barrels, bags, etc.

Inspection scheme A: A decision about the quality of the inspected lot is made on the basis of the result of the analysis of one sample selected randomly from the lot.

Inspection scheme B: A decision about the quality of the inspected lot is made on the basis of the result of the analysis of one average sample, obtained by thoroughly mixing m samples (of the same weight or size), selected randomly from the lot. We assume that the average sample so formed will yield the average value of the checked quality characteristic of all the samples.

Inspection scheme C: A decision about the quality of the inspected lot is made on the basis of the value of the sample mean of the results obtained from the analysis of n random samples, each of which is submitted to independent analysis.

In this paper the influence of error due to sample analysis (for example chemical analysis) upon the efficiency of the individual inspection schemes is investigated. From the comparison of the operating-characteristics for cases where an error of analysis exists, with cases where it is assumed to be zero, conclusions for the modification of inspection plans are drawn and relations between the sample size for inspection schemes B and C are deduced. The solution is based on the assumption that the magnitude of the error of analysis is independent of the value of the checked quality characteristic of the sample. It is assumed that the distribution of values both of the checked quality characteristic and of the error of analysis is normal with averages μ and zero and standard deviations σ_z and σ_z respectively. During inspection we consider that the values σ_y and σ_y are known. In all cases the inspection plans

are constructed on the basis of acceptable and inacceptable fractions of defective material in the lot.

In addition the paper deals with the problem of errors of the first and second kind arising when testing the measured and the actual value of the sample with respect to a certain prescribed value. The final expression of the appropriate risks is given by know tabulated values of the distribution function of the onevariate and bivariate normal distribution.

For practical purposes it is the author's intention to compute tables and nomograms, which will be published later.