

Aplikace matematiky

Ivo Babuška

O napjatosti nehomogenního podloží

Aplikace matematiky, Vol. 2 (1957), No. 5, 361–369

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102586>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1957

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

O NAPJATOSTI NEHOMOGENNÍHO PODLOŽÍ

IVO BABUŠKA

(Došlo dne 23. dubna 1957.)

DT: 624.043 : 539.311

V práci jsou udány vzorce pro napjatost nehomogenní poloroviny s modulem pružnosti $E(h) = E_0 \cdot h^\alpha$ a konstantní Poissonovou konstantou σ .

Podloží stavebních konstrukcí jest materiál, který má často proměnlivé vlastnosti, poměrně nesnadno zjistitelné. Z tohoto hlediska, zvláště při nedokonalé znalosti materiálových vlastností podloží, nutno chápat i ověřování dosažených výsledků ve srovnání s theoretickými závěry, ověřování kladených předpokladů a vysoké požadavky praxe na jednoduchost závěrů. Proto se v praxi někdy omezují případy pouze na nejjednodušší případy řešení o rovnováze, při čemž se vychází s experimentálních zkušeností (srv. [1], [2]).

Na druhé straně se v praxi často užívá theorie homogenního poloprostoru. Řada experimentů však ukazuje, že theorie pružného homogenního poloprostoru má i při poměrně stejnorodých podložích mnohem menší aplikabilitu než by bylo možno očekávat. Zejména při větších zatěžovacích plochách jsou skutečné deformace podstatně menší než deformace vypočtené podle theorie pružného poloprostoru. Tak na př. Koegler (viz [3], str. 342) měřil deformace v závislosti na zatěžované ploše při konstantním napětí. Na obr. 1 jest znázorněn theoretický a experimentální průběh této závislosti. K podobným výsledkům se dospělo i při vodním díle Orava, kde skutečné deformace jsou podstatně menší než podle theorie pružného homogenního poloprostoru.

Některé z uvedených obtíží odstraníme, když ve shodě se zkušenostmi a skutečným stavem ve většině praktických případů, zavedeme do výpočtu skutečnost, že modul roste s hloubkou na př. podle rovnice

$$E(h) = E_0(h + c)^\alpha, \quad c > 0, \quad (1)$$

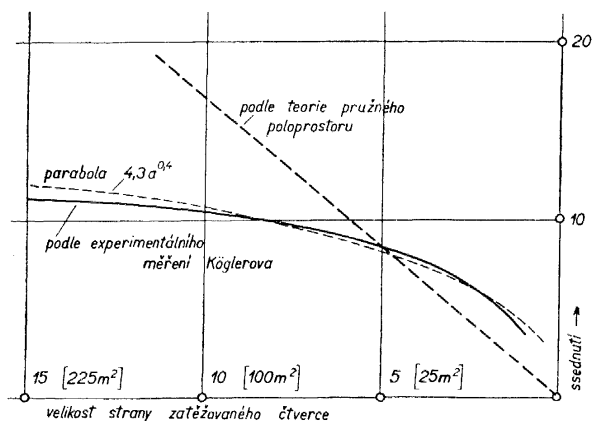
kde h jest hloubka pod povrchem, α koeficient vzrůstu (zpravidla $0 \leq \alpha \leq 1$) (viz na př. [4]), Poissonovo číslo předpokládáme konstantní.

Domníváme se, že tento vztah velmi dobře vystihuje ve většině případů skutečnost.

Vhodnost tohoto předpokladu je patrna z obr. 1, kde je znázorněna výše uvedená závislost mezi zatěžovací plochou a deformací za předpokladu, že

$$E(h) = E_0 h^{0,6}$$

V této práci se budeme zabývat rovinným problémem napjatosti podloží za předpokladu proměnného modulu pružnosti podle rovnice (1). Nejprve budeme předpokládat $c = 0$ a pak provedeme praktické rozšíření aplikability našich závěrů i na případ $c \neq 0$.



Obr. 1.

Problémem nehomogenního podloží se zabýval OHDE [5] a BOROWICKA, u nás pak K. HRUBAN [6], který se zabýval speciálními případy v závislosti Poissonovy konstanty a indexů vzrůstu. S uvažováním plastických vlastností za jistých speciálních předpokladů zabýval se tímto problémem na př. OLSZAK, MURZEWSKI, GOLECKI [7].

V tomto článku ukážeme jednoduchý tvar napjatosti v obecném případě v závislosti na Poissonově čísle a koeficientu vzrůstu.

1. Rovinný problém napjatosti nehomogenního prostředí¹⁾

Při studiu homogenní poloroviny zatížené na hranici jest problém ekvivalentní s problémem nalezení Airyho funkce $U(x, y)$, která vyhovuje biharmonické rovnici. Složky tensoru napětí jsou určeny Airyho funkcí rovnicemi:

$$X_y = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad X_x = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad Y_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \quad (2)$$

¹⁾ Předpokládáme vždy rovinnou deformaci.

V případě nehomogenního prostředí se stálou Poissonovou konstantou m a modulem pružnosti E závislém pouze na souřadnici y (hloubce pod povrchem), dojdeme úplně stejným postupem jako v klasickém případě homogenního prostředí k obecnější rovnici, která má tvar

$$(a - b) \Delta \Delta U + 2(a' - b') \frac{\partial \Delta U}{\partial y} + (a'' - b'') \Delta U - a'' \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0,$$

kde

$$a = \frac{m + 1}{mE(y)}, \quad b = \frac{m + 1}{m^2E(y)}, \quad -y = h. \quad (3)$$

Poněvadž problém je lineární a modul pružnosti závisí pouze na hloubce pod povrchem, stačí k úplnému řešení znát napjatost od svislého a vodorovného jednotkového břemene.

2. Řešení problému nehomogenní poloroviny s průběhem modulu tvaru $E(h) = h^\alpha$

Za předpokladu, že modul pružnosti probíhá podle rovnice $E(h) = h^\alpha$, vzhledem k homogennímu tvaru, musí nutně Airyho funkce pro osamělé břemeno v počátku mít tvar

$$U = rf(\psi), \quad (4)$$

kde r, ψ jsou polární souřadnice (srv. obr. 2). Tento případ odpovídá paprskovému roznášení břemene. Jest při tom

$$R_r = \frac{1}{r} (f + f'') = \frac{1}{r} F(\psi), \quad (5)$$

kde R_r je radiální složka napětí.

Dosazením (4) do (3) docházíme k závěru, že tvar (4) může být řešení rovnice (3) tehdy a jen tehdy, je-li splněna diferenciální rovnice tvaru

$$F'' + F'\lambda \operatorname{tg} \psi + F(\mu + \nu \operatorname{tg}^2 \psi) = 0,$$

kde je

$$\lambda = 2\alpha, \quad \mu = -\frac{1}{m-1} \alpha(\alpha+1) + 2\alpha + 1, \quad (6)$$

$$\nu = \alpha(\alpha+1).$$

Položíme nyní $F(\psi) = \Phi(\psi) \cos^\alpha \psi$, a dojdeme z (6) k ekvivalentní rovnici

$$\Phi'' + \mu^* \Phi = 0, \quad (7)$$

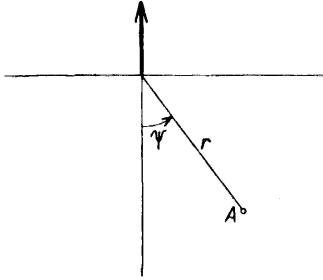
kde

$$\mu^* = (\alpha + 1) \left[1 - \frac{\alpha}{m-1} \right].$$

Tato rovnice je však snadno řešitelná. Je však třeba rozlišovat případy, kdy

$$\mu^* = 0, \quad \mu^* > 0, \quad \mu^* < 0.$$

V těchto jednotlivých případech dostáváme následující řešení: (Značíme ${}^s R_r(r, \psi)$ resp. ${}^v R_r(r, \psi)$ radiální složku napětí pro svislé resp. vodorovné osmělé břemeno působící v počátku.)



Obr. 2.

I. $\mu^* = 0$.

Jest

$${}^v R_r(r, \psi) = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{r} {}^v C_{\alpha, m} \cos^\alpha \psi, \quad (8.1)$$

$${}^s R_r(r, \psi) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{r} {}^s C_{\alpha, m} \cos^\alpha \psi, \quad (8.2)$$

kde konstanty ${}^v C_{\alpha, m}$, ${}^s C_{\alpha, m}$ jsou jisté konstanty (viz obr. 3) závislé na α , m , které vyjadřují podmínku rovnováhy. Budou určeny dále. Pří-

pad I. nastává v případě buď $\alpha = -1$ nebo $\alpha = m - 1$. Vzhledem k tomu, že $m \geq 2$ a v praxi většinou je $0 \leq \alpha \leq 1$ nemá tento případ velký praktický význam.

II. $\mu^* > 0$.

V tomto případě je

$${}^v R_r(r, \psi) = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{r} {}^v C_{\alpha, m} \cos^\alpha \psi \sin \sqrt{\mu^*} \psi, \quad (9.1)$$

$${}^s R_r(r, \psi) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{r} {}^s C_{\alpha, m} \cos^\alpha \psi \cos \sqrt{\mu^*} \psi. \quad (9.2)$$

Tento případ nastává pro $\alpha > -1$ a $m - 1 > \alpha$ (vzhledem k tomu, že $m \geq 2$).

III. $\mu^* < 0$.

V tomto případě jest

$${}^v R_r(r, \psi) = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{r} {}^v C_{\alpha, m} \cos^\alpha \psi \operatorname{sh} \sqrt{\mu^*} \psi, \quad (10.1)$$

$${}^s R_r(r, \psi) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{r} {}^s C_{\alpha, m} \cos^\alpha \psi \operatorname{ch} \sqrt{\mu^*} \psi. \quad (10.2)$$

Tento případ nastává pro $\alpha < -1$ a $m - 1 > \alpha$ nebo $\alpha > -1$, $m - 1 < \alpha$.

Prakticky je nejvýznamnější případ II.

Určeme nyní konstanty ${}^v C_{\alpha, m}$, ${}^s C_{\alpha, m}$. Vzhledem k paprskovému roznášení musí být

$$r \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} {}^s R_r(r, \psi) \cos \psi \, d\psi = 1,$$

$$r \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} {}^v R_r(r, \psi) \sin \psi \, d\psi = -1$$

a z této podmínky určíme konstanty ${}^S C_{\alpha,m}$, ${}^V C_{\alpha,m}$. Vypočítáním uvedených integrálů dostáváme:

pro

$$\alpha > 0, \quad m - 1 \geq \alpha$$

jest

$${}^S C_{\alpha,m} = \frac{2^\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha + 3 - \gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha + 3 + \gamma}{2}\right)}{\Gamma(\alpha + 2)}, \quad (11)$$

kde

$$\gamma = \sqrt{|\mu^*|} = \sqrt{(\alpha + 1) \left(1 - \frac{\alpha}{m - 1}\right)};$$

pro

$$\alpha > 0, \quad m - 1 \leq \alpha$$

jest

$${}^S C_{\alpha,m} = \frac{2^\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha + 3 - \gamma i}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha + 3 + \gamma i}{2}\right)}{\Gamma(\alpha + 2)}, \quad (12)$$

kde

$$i = \sqrt{-1}, \quad \gamma = \sqrt{|\mu^*|}.$$

Pro $\alpha = 0$ jest ${}^S C_{\alpha,m} = 1$. Dále pak platí

$${}^V C_{\alpha,m} = \frac{\alpha + 1}{\gamma} {}^S C_{\alpha,m} \quad \text{pro } \gamma = \sqrt{|\mu^*|} \neq 0, \quad (13)$$

$${}^V C_{\alpha,m} = (\alpha + 1) {}^S C_{\alpha,m} \quad \text{pro } \gamma = \sqrt{|\mu^*|} = 0. \quad (14)$$

Na obr. 3 jsou vykresleny hodnoty ${}^S C_{\alpha,m}$.

Známe-li radiální napětí R_r , známe tím také složky tensoru napětí. Jest

$$Y_y = R_r \cos^2 \psi, \quad x_y = R_r \sin \psi \cos \psi, \quad X_x = R_r \sin^2 \psi. \quad (15)$$

Koeficient ${}^S C_{\alpha,m}$ nám vyjadřuje poměr napětí pod svislým břemenem k hodnotě téhož napětí v případě homogenní poloroviny. Vidíme tedy, že pro větší m a $\alpha > 0$ je ${}^S C_{\alpha,m} > 1$ a tedy že napětí se pomaleji roznáší než v případě homogenního podloží. Je to i ve shodě s experimenty (srv. také [2]).

Známe-li napětí určíme snadno také deformace. Je-li l , t posunutí v polárních souřadnicích (viz obr. 4), pak platí pro $\alpha \neq 0$ vzorce pro posunutí v tabulce 1.

Nejdůležitější jsou deformace na povrchu.

Dostáváme zde:

A. Svislé břemeno

a) Svislé posunutí v

$$E_0 v = |x|^{-\alpha} \frac{1}{\alpha} \frac{m^2 - 1}{m^2} \sqrt{\frac{1 - \frac{\alpha}{m - 1}}{|\alpha + 1|}} \frac{2}{\pi} {}^S C_{\alpha,m} {}^S \beta_{\alpha,m}^v. \quad (16)$$

Tabulka I.

Případ	I.	II.	III.
	$\alpha = -1$ nebo $\alpha = m - 1$	$\alpha > -1, m - 1 > \alpha$	$\alpha < -1$ nebo $m - 1 < \alpha$
Svislé břemeno			
E_0^l	$-\frac{1}{\alpha} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{2}{\pi} S_{\alpha, m} r^{-\alpha}$	$-\frac{1}{\alpha} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{2}{\pi} S_{\alpha, m} r^{-\alpha} \cos \gamma \psi$	$-\frac{1}{\alpha} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{2}{\pi} S_{\alpha, m} r^{-\alpha} \operatorname{ch} \gamma \psi$
E_0^t	0	$\frac{1}{\alpha} \frac{m^2 - 1}{m^2} \sqrt{\frac{1 - \frac{\alpha}{m-1}}{ \alpha+1 }} \frac{2}{\pi} S_{\alpha, m} r^{-\alpha} \sin \gamma \psi$	$\frac{1}{\alpha} \frac{m^2 - 1}{m^2} \sqrt{\frac{1 - \frac{\alpha}{m-1}}{ \alpha+1 }} \frac{2}{\pi} S_{\alpha, m} r^{-\alpha} \operatorname{sh} \gamma \psi$
Vodorovné břemeno			
E_0^l	$\frac{1}{\alpha} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{2}{\pi} S_{\alpha, m} r^{-\alpha} \psi$	$\frac{1}{\alpha} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{2}{\pi} S_{\alpha, m} r^{-\alpha} \sin \gamma \psi$	$\frac{1}{\alpha} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{2}{\pi} S_{\alpha, m} r^{-\alpha} \operatorname{sh} \gamma \psi$
E_0^t	0	$\frac{1}{\alpha} \frac{m^2 - 1}{m^2} \sqrt{\frac{1 - \frac{\alpha}{m-1}}{ \alpha+1 }} \frac{2}{\pi} S_{\alpha, m} r^{-\alpha} \cos \gamma \psi$	$\frac{1}{\alpha} \frac{m^2 - 1}{m^2} \sqrt{\frac{1 - \frac{\alpha}{m-1}}{ \alpha+1 }} \frac{2}{\pi} S_{\alpha, m} r^{-\alpha} \operatorname{ch} \gamma \psi$

$$\gamma = \sqrt{\left(\alpha + 1\right) \left(1 - \frac{\alpha}{m-1}\right)}$$

b) Vodorovné posunutí u

$$E_0 u = \operatorname{sgn} x |x|^{-\alpha} \left(-\frac{m^2 - 1}{\alpha m^2} \right) \frac{2}{\pi} s C_{\alpha, m} s \beta_{\alpha, m}^u. \quad (17)$$

B. Vodorovné břemeno

a) Svislé posunutí v

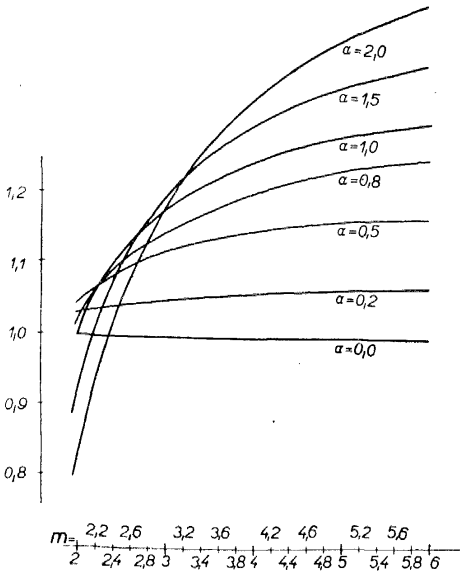
$$E_0 v = \operatorname{sgn} x |x|^{-\alpha} \frac{1}{\alpha} \frac{m^2 - 1}{m^2} \sqrt{\frac{1 - \frac{\alpha}{m-1}}{|\alpha + 1|}} \frac{2}{\pi} s C_{\alpha, m} v \beta_{\alpha, m}^v. \quad (18)$$

b) Vodorovné posunutí u

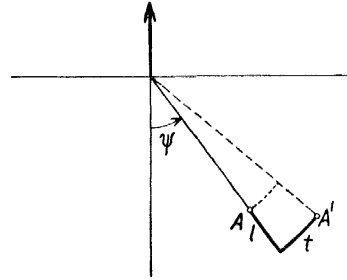
$$E_0 u = |x|^{-\alpha} \left(\frac{m^2 - 1}{\alpha m^2} \right) \frac{2}{\pi} v C_{\alpha, m} v \beta_{\alpha, m}^u. \quad (19)$$

Konstanty $s \beta_{\alpha, m}^u$, $s \beta_{\alpha, m}^v$, $v \beta_{\alpha, m}^u$, $v \beta_{\alpha, m}^v$ jsou uvedeny v tabulce 2. V téže tabulce je uvedena také napjatost pro vodorovné a svislé břemeno.

Tím máme úplně rozřešen problém napjatosti nehomogenní poloroviny pro zatížené hranice s modulem pružnosti tvaru $E(h) = E_0 h^\alpha$ a neproměnným



Obr. 3.



Obr. 4.

Poissonovým číslem. Skutečně totiž při obecném zatížení bychom prostě integrovali v podstatě tímto způsobem jako v případě homogenní poloroviny, vzhledem k tomu, že modul pružnosti závisí pouze na hloubce. Uvedli jsme všechny theoretické možnosti. Největší praktickou důležitost mají ovšem případy $0 \leq \alpha \leq 1$.

3. Řešení problému nehomogenní poloroviny s průběhem
modulu tvaru $E(h) = (h + c)^x E_0$

Tento případ je již složitější, poněvadž se napětí neroznáší paprskovitě. Vzhledem k nespolehlivosti předpokladů v praxi nemá smyslu užívat složitější theorie, i když v případě, který je uveden výše, může vzniknout námitka nereálnosti předpokladu $E(0) = 0$. Napětí a deformace však v případě, že $c > 0$, poměrně dosti rychle se zvětšujícím se r (v případě osamělého břemene) se blíží případu průběhu modulu $E(h) = h^x E_0$. Na druhé straně máme-li polorovinu s modulem pružnosti tvaru $E_0(h + c)^x$ můžeme si představit, že je to část poloroviny s modulem $E(h) = E_0 h^x$, která má však povrch ve vzdálenosti c nad skutečným povrchem.

Je proto nejvhodnější v praktických stavebních případech užit vzorců pro

Tabulka 2.

Případ	I.	II.	III.
	$\alpha = -1$ nebo $\alpha = m - 1$	$\alpha > -1, m - 1 > \alpha$	$\alpha < -1 \quad m - 1 > \alpha$ nebo $\alpha > -1 \quad m - 1 < \alpha$
$S\beta_{\alpha,m}^v$	0	$\sin \gamma \frac{\pi}{2}$	$\text{sh } \gamma \frac{\pi}{2}$
$S\beta_{\alpha,m}^u$	1	$\cos \gamma \frac{\pi}{2}$	$\text{ch } \gamma \frac{\pi}{2}$
$V\beta_{\alpha,m}^v$	0	$\cos \gamma \frac{\pi}{2}$	$\text{ch } \gamma \frac{\pi}{2}$
$V\beta_{\alpha,m}^u$	$\frac{\pi}{2}$	$\sin \gamma \frac{\pi}{2}$	$\text{sh } \gamma \frac{\pi}{2}$
$VR_r(r, \psi)$	$-\frac{2}{\pi} \frac{1}{r} VC_{\alpha,m} \psi \cos^\alpha \psi$	$-\frac{2}{\pi} \frac{1}{r} VC_{\alpha,m} \cos^\alpha \psi \sin \gamma \psi$	$-\frac{2}{\pi} \frac{1}{r} VC_{\alpha,m} \cos^\alpha \psi \text{sh } \gamma \psi$
$SR_r(r, \psi)$	$\frac{2}{\pi} \frac{1}{r} SC_{\alpha,m} \cos^\alpha \psi$	$\frac{2}{\pi} \frac{1}{r} SC_{\alpha,m} \cos^\alpha \psi \cos \gamma \psi$	$\frac{2}{\pi} \frac{1}{r} SC_{\alpha,m} \cos^\alpha \psi \text{ch } \gamma \psi$

$$\gamma = \sqrt{\left| (x + 1) \left(1 - \frac{\alpha}{m - 1} \right) \right|}$$

polorovinu s modulem $E(h) = E_0 h^z$ a napětí určovat ve vzdálenosti $H + c = = h$ od povrchu náhradní poloroviny. Tím ovšem na původním povrchu není splněna okrajová podmínka. Ve většině praktických případů není však chyba velká vůči praktické nespolehlivosti zatížení. V případě, že by byla chyba větší, považujeme ji za další zatížení, které odečteme (přibližně stejným způsobem) pomocí náhradní poloroviny, jak jsme to učinili v prvním případě.

LITERATURA

- [1] *Fröhlich*: Druckverteilung im Baugrunde; J. Springer 1934.
 [2] *Strohschneider*: Sitzungsberichte der Königlich Akademie der Wissenschaften 1912.
 [3] *Цумович*: Механика грунтов; Москва — Ленинград 1957.
 [4] *Terzaghi*: Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage; Leipzig 1925.
 [5] *Ohde*: Zur Theorie der Druckverteilung im Baugrund; Bauingenieur 1939, H. 33, 34.
 [6] *Hruban*: Přetvoření a napětí pružného poloprostoru nestejnorožého; Rozpravy II. tř. ČSAV, LV, No 13.
 [7] *Olzszak, Murzewski, Golecki*: Non-homogeneous Elastic Plastic Semi-infinite Plate Loaded by a Contracted Force; Bull. Akad. Pol. IV. tř., vol. IV, No 4, 1956.

Резюме

О НАПРЯЖЕННОСТИ НЕОДНОРОДНОГО ОСНОВАНИЯ

ИВО БАБУШКА (Ivo Babuška)

(Поступило в редакцию 23/IV 1957 г.)

В работе приведены формулы для напряженности неоднородной плоскости с модулем упругости $E(h) = E_0 h^z$ и постоянной константой Пуассона σ .

Zusammenfassung

DER SPANNUNGSZUSTAND EINES NICHTHOMOGENEN BAUGRUNDES

IVO BABUŠKA

(Eingegangen am 23. April 1957.)

In dieser Arbeit werden die Formeln, für den Spannungszustand einer nicht-homogenen Halbebene mit dem Elastizitätsmodul $E(h) = E_0 h^z$ und der unveränderlichen Poissonschen Konstanten σ , angegeben.