

Aplikace matematiky

Miroslav Fiedler

Numerické řešení algebraických rovnic Bernoulli-Whittakerovou metodou

Aplikace matematiky, Vol. 2 (1957), No. 4, 321–326

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102581>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1957

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

NUMERICKÁ PRAXE

NUMERICKÉ ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÝCH ROVNIC
BERNOULLI-WHITTAKEROVOU METHODOU

MIROSLAV FIEDLER

Je popsána Bernoulli-Whittakerova metoda řešení algebraické rovnice, spočívající v postupném výpočtu kořenů o největší absolutní hodnotě. Metoda je jednoduchá a účinná zejména pro rovnice, jejichž kořeny (reálné nebo komplexní) mají absolutní hodnoty značně odlišné.

I. Pišme danou algebraickou rovnici n -tého stupně ve tvaru

$$x^n = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n. \tag{1}$$

Počítejme postupně čísla u_1, u_2, \dots z daných

$$u_0 = 1, \quad u_{-1} = u_{-2} = \dots = u_{-n+1} = 0$$

pomocí rekurentního vztahu ($m \geq 1$)

$$u_m = a_1 u_{m-1} + a_2 u_{m-2} + \dots + a_n u_{m-n}. \tag{2}$$

Potom platí (viz na př. HOUSEHOLDER [1]):

I. Má-li (1) právě jeden kořen x o největší absolutní hodnotě¹⁾, potom pro všechna dosti velká r platí přibližně

$$x = \frac{u_r}{u_{r-1}}, \tag{3}$$

čili x je přibližně kořenem rovnice

$$\begin{vmatrix} x & 1 \\ u_r & u_{r-1} \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

(t. j. $u_{r-1}x - u_r = 0$).

II. Má-li (1) právě dva kořeny x_1, x_2 o největší absolutní hodnotě, pak x_1, x_2 jsou přibližně dvojicí kořenů rovnice

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ u_{r+1} & u_r & u_{r-1} \\ u_{r+2} & u_{r+1} & u_r \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

¹⁾ Platí-li pro kořeny x_1, \dots, x_n rovnice (1) $|x_1| = |x_2| = \dots = |x_r| > |x_{r+1}| \geq \dots \geq |x_n|$, říkáme, že rovnice (1) má r kořenů o největší absolutní hodnotě.

²⁾ S determinanty se čtenář seznámí na př. v knize B. Byřozorský, *Úvod do theorie determinantů a jejich užítí*, Praha 1947.

(čili $(u_r^2 - u_{r-1}u_{r+1})x^2 + (u_{r-1}u_{r+2} - u_ru_{r+1})x + u_{r+1}^2 - u_ru_{r+2} = 0$) pro všechna dosti velká r .

Poznámka. I. a II. lze zobecnit i na (méně častý) případ, že (I) má právě $m > 2$ kořenů o největší absolutní hodnotě. Příslušná rovnice vznikne zřejmým zobecněním (4) a (5).

2. Předchozích vztahů lze užít k numerickému řešení algebraické rovnice (I). Postupujeme takto:

Podle (2) vypočteme čísla u_k až do u_{20} včetně. Přitom je výhodné napsat koeficienty a_1, \dots, a_n v obráceném pořadí „svisle“ pod sebou na proužek papíru, který posouváme podél svisle psané posloupnosti již vypočtených u_k : tak pro $n = 4$ v poloze

$$\begin{array}{|c|} \hline a_4 \\ \hline a_3 \\ \hline a_2 \\ \hline a_1 \\ \hline \dots \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{array}$$

vypočteme $u_5 = a_4u_1 + a_3u_2 + a_2u_3 + a_1u_4$.

U posledních pěti ($r = 16, \dots, 20$) vypočteme podíly

$$q_r = \frac{u_r}{u_{r-1}} \quad (6)$$

A. Jestliže se čísla q_{16}, \dots, q_{20} navzájem mnoho neliší (dvě následující o 2–3%, jak se ukazuje v praxi), usuzujeme, že nastal případ I. a považujeme q_{20} za přibližnou hodnotu kořene α . Přitom jestliže se čísla q_{16}, \dots, q_{20} sice liší (do 10%), ale chovají se dost pravidelně, je možno vypočíst ještě asi deset dalších u_k a provádět uvedené kroky pro u_{25}, \dots, u_{30} .

B. Jestliže se q_{16}, \dots, q_{20} navzájem dost liší, vypočteme pro $r = 15, \dots, 19$ determinanty

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} u_r & u_{r-1} \\ u_{r+1} & u_r \end{vmatrix} = u_r^2 - u_{r-1}u_{r+1} \quad (7)$$

a jejich podíly

$$Q_r = \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}} \quad (8)$$

pro $r = 16, \dots, 19$.

³⁾ Pro $u_{r-1} \neq 0$. Je-li některé $u_{r-1} = 0$, přejdeme ihned k dalšímu případu B.

⁴⁾ Pro $\Delta_{r-1} \neq 0$. Je-li některé $\Delta_{r-1} = 0$, přejdeme k dalšímu případu C.

Jsou-li čísla Q_{16}, \dots, Q_{19} již navzájem blízká, usuzujeme, že nastal případ II. Sestrojíme rovnici (5) pro $r = 18^5$ a považujeme její kořeny za přibližné hodnoty kořenů rovnice (1).

C. Může se ovšem stát, že jak čísla q_{16}, \dots, q_{20} , tak i čísla Q_{16}, \dots, Q_{20} se navzájem dost liší. Potom má rovnice (1) alespoň tři kořeny o největší absolutní hodnotě nebo o absolutních hodnotách jí blízkých. Lze pak buď postupovat analogicky dále (podle poznámky za II.)⁶⁾, anebo přejít substitucí

$$x = y + u \tag{9}$$

do (1) k nové rovnici v y o kořenech $x_i - u$, kde x_i jsou kořeny (1).

V obou těchto případech A, B⁷⁾ pak dělíme (viz následující Dodatek) polynom $x^n - a_1x^{n-1} - \dots - a_n$; v prvním případě $x - \alpha$, v druhém levou stranou (5). Výsledný podíl (zbytek má být velmi malý!) je polynom stupně $n - 1$ nebo $n - 2$, jehož kořeny jsou přibližně zbylé kořeny rovnice (1). Pro tento polynom celý postup od začátku opakujeme, dokud nedostaneme polynom druhého nebo prvního stupně.

3. Předností Bernoulli-Whittakerovy metody je jednak její jednoduchost, jednak to, že případné chyby při výpočtu posloupnosti (2) ztrácejí po n krocích prakticky vliv na výsledek, a přitom ani zaokrouhlovací chyby výpočet příliš nezatěžují. Doporučuje se však zejména poslední čísla u_{15} až u_{20} počítat co nejpresněji (nejméně o tři desetinná místa přesněji než je požadovaná přesnost kořenů).

Oproti na př. Gräffeho metodě má Bernoulli-Whittakerova metoda nevýhodu v pomalejší konvergenci posloupnosti (2). Mají-li (při reálných koeficientech) reálné kořeny resp. dvojice komplexně sdružených kořenů absolutní hodnoty postupně od největší k nejmenší $r_1 > r_2 > \dots > r_i > 0$, a přitom poměry $\frac{r_1}{r_2}, \frac{r_2}{r_3}$ atd. jsou stále větší než asi 1,3, potom nenastanou v metodě potíže. Jsou-li však někdy aspoň tři kořeny o přibližně stejné absolutní hodnotě, nastane v příslušném kroku případ C, který výpočet komplikuje.

Potřebujeme-li znát kořeny přesně, najdeme je ovšem známou Newtonovou metodou z vypočtených aproximací kořenů.

Dodatek

Dělit polynom $c(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \dots + c_n$ polynomem $d(x) = d_0x^k + d_1x^{k-1} + \dots + d_k$ znamená najít polynomy $p(x)$ (částečný podíl) a $r(x)$ (zbytek) tak, aby

$$c(x) = p(x)d(x) + r(x),$$

a přitom aby stupeň $r(x)$ byl menší než stupeň $d(x)$.

⁵⁾ Koeficient u x^2 a absolutní člen jsou již vypočtená čísla Δ_{18} a Δ_{19} .

⁶⁾ Je pak ovšem nutno řešit rovnici aspoň třetího stupně, která má kořeny o skoro stejné absolutní hodnotě. To lze učinit podle článku *M. Friedler, Numerické řešení algebraických rovnic, které mají kořeny o skoro stejné absolutní hodnotě, Apl. mat. 1 (1956), 4-22.*

⁷⁾ Analogicky se postupuje i v případě C, jestliže jsme pokračovali podle poznámky za II.

Numericky se dělení provádí velmi jednoduše takto:

Budiž nejprve $d_0 = 1$ a pišme $d(x)$ ve tvaru

$$x^k - v_1x^{k-1} - \dots - v_k$$

Na pomocný proužek papíru si napíšeme čísla v_i v obráceném pořadí do sloupce: v_k, \dots, v_1 . Koeficienty c_0, c_1, \dots, c_n napíšeme pod sebou do sloupce. Do sousedního sloupce vpravo budeme vepisovat koeficienty p_0, \dots, p_{n-k} podílu $p(x) = p_0x^{n-k} + p_1x^{n-k-1} + \dots + p_{n-k}$ a r_{n-k+1}, \dots, r_n zbytku $r(x) = r_{n-k+1}x^{k-1} + \dots + r_n$. Výpočet provádíme tak, že napíšeme do prvního řádku číslo p_0 rovné c_0 ; přiložíme pomocný proužek zleva na sloupec c tak, že v_1 je ve stejném řádku jako p_0 , vynásobíme v_1p_0 a přičteme c_1 (t. j. první číslo ve sloupci c , které je vidět pod pomocným sloupcem). Výsledek $p_1 = v_1p_0 + c_1$ napíšeme pod p_0 . Proužek posuneme o jeden řádek níže, vypočteme $v_2p_0 + v_1p_1 + c_2 = p_2$ a vepíšeme p_2 pod p_1 (nevyskytuje-li se už v_2 , počítáme ovšem jen $v_1p_1 + c_2 = p_2$). Takto pokračujeme, dokud nevypočteme všechna p_i až do p_{n-k} včetně. Potom pod p_{n-k} uděláme vodorovnou čáru (můžeme ji udělat předem!) a počítáme koeficienty r_i zbytku úplně obdobně, jen s tím rozdílem, že násobíme čísla v_i jen čísla p_j , t. j. čísla nad vodorovnou čarou) a ne už vypočtená r_j . Tak na př. pro $n = 6, k = 2$, má-li proužek polohu I., vypočteme

$$p_3 = v_2p_1 + v_1p_2 + c_3,$$

má-li polohu II., pak $r_6 = v_2p_4 + c_6$:

I.	c_0	p_0	II.	c_0	p_0
	v_2	p_1		c_1	p_1
	v_1	p_2		c_2	p_2
	c_3	p_3		c_3	p_3
	c_4	p_4		v_2	p_4
	c_5	r_5		v_1	r_5
	c_6	r_6		c_6	r_6

Je-li v polynomu $d(x)$ $d_0 \neq 1$, dělíme nejprve $c(x)$ polynomem $\frac{1}{d_0}d(x)$ (který má uvedený tvar); výsledný částečný podíl násobíme (hledáme-li jen jeho kořeny, není to ovšem potřeba) číslem d_0 . Zbytek $r(x)$ ponecháme beze změny.

Numerický příklad

Řešme touto methodou rovnici

$$x^4 = 4x^3 + 10,64x^2 + 2,96x - 34,03.$$

Dostaneme popsaným způsobem

i	u_i	i	u_i
0	1,0	11	1,8346 · 10 ⁸
1	4,0	12	1,05649 · 10 ⁹
2	2,664 · 10 ¹	13	6,08403 · 10 ⁹
3	1,5208 · 10 ²	14	3,50361 · 10 ¹⁰
4	8,6958 · 10 ²	15	2,01763 · 10 ¹¹
5	5,0392 · 10 ³	16	1,16189 · 10 ¹²
6	2,8953 · 10 ⁴	17	6,69100 · 10 ¹²
7	1,6683 · 10 ⁵	18	3,85315 · 10 ¹³
8	9,6069 · 10 ⁵	19	2,21892 · 10 ¹⁴
9	5,5320 · 10 ⁶	20	1,27781 · 10 ¹⁵
10	3,1858 · 10 ⁷		

$$q_{16} = 5,75872$$

$$q_{17} = 5,75870$$

$$q_{18} = 5,75871$$

$$q_{19} = 5,75871$$

$$q_{20} = 5,75870$$

Nastal případ A: přibližná hodnota jediného kořene o největší absolutní hodnotě je $\alpha_1 = 5,7587$. Dělíme podle Dodatku $x^4 - 4x^3 + 10,64x^2 - 2,95x + 34,03$ polynomem $x - 5,7587$:

5,7587	1,00	1,00
	-4,00	1,7587
	-10,64	-0,5122
	-2,96	-5,9096
	34,03	-0,0016

Podíl je tedy polynom $x^3 + 1,7587x^2 - 0,5122x - 5,9096$.

Dále řešíme rovnici

$$x^3 = -1,7587x^2 + 0,5122x + 5,9096.$$

i	u_i	i	u_i
0	1,0	11	-2,2183 · 10 ³
1	-1,7587	12	2,6202 · 10 ³
2	3,6052	13	8,26180 · 10 ²
3	-1,3317	14	-1,32200 · 10 ⁴
4	-6,2046	15	3,91577 · 10 ⁴
5	3,1535 · 10 ¹	16	-7,07555 · 10 ⁴
6	-6,6509 · 10 ¹	17	6,63693 · 10 ⁴
7	9,6455 · 10 ¹	18	7,84415 · 10 ⁴
8	-1,7340 · 10 ¹	19	-5,22097 · 10 ⁵
9	-3,1314 · 10 ²	20	1,35061 · 10 ⁶
10	1,1118 · 10 ³		

Poněvadž $q_{19} = -6,6559$, $q_{20} = -2,58689$, nenastane případ A. Vypočteme tedy

i	Δ_i	Q_i
15	$5,97935 \cdot 10^8$	
16	$2,40747 \cdot 10^9$	4,02631
17	$9,95505 \cdot 10^9$	4,13506
18	$4,08043 \cdot 10^{10}$	4,09885
19	$1,66642 \cdot 10^{11}$	4,08393

Nastane proto případ B. Dva kořeny o největší absolutní hodnotě uvedené rovnice třetího stupně (a tedy přibližně další dva kořeny původní rovnice) vyhovují přibližně rovnici (5), která vyjde ve tvaru

$$4,08043 \cdot 10^{10}x^2 + 1,30593 \cdot 10^{11}x + 1,66642 \cdot 10^{11} = 0,$$

čili

$$x^2 + 3,2005x + 4,0839 = 0.$$

Tedy $\alpha_{2,3} = -1,6003 \pm 1,2341i$.

Poslední kořen najdeme dělením:

$x^3 + 1,7587x^2 - 0,5122x - 5,9096$ polynomem $x^2 + 3,2005x + 4,0839$:

$-4,0839$	$1,00$	$1,00$
$-3,2005$	$1,7587$	$-1,4418$
	$-0,5122$	$0,0184$
	$-5,9096$	$-0,0214$

Podíl je $x - 1,4418$ a

$$\alpha_4 = 1,4418.$$

Pro srovnání uvádíme přesnější hodnoty kořenů:

$$\alpha_1 = 5,75870, \quad \alpha_{2,3} = -1,60000 \pm 1,24097i, \quad \alpha_4 = 1,44130.$$

LITERATURA

[1] *Householder A. S.*, Principles of Numerical Analysis, N. York 1953.