

Aplikace matematiky

Josef Šmahel

Přibližné konformní zobrazení Besselova elipsoidu

Aplikace matematiky, Vol. 2 (1957), No. 4, 297–313

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102578>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1957

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

PŘIBLIŽNÉ KONFORMNÍ ZOBRAZENÍ BESSELOVA ELIPSOIDU

JOSEF ŠMAHEL

(Došlo dne 8. června 1956.)

DT: 517.54:513.561

Článek se zabývá přibližným konformním zobrazením referenční plochy (rotačního elipsoidu). Zobrazení je centrální projekce elipsoidu z bodu na normále ve vzdálenosti dvou poloměrů střední křivosti na tečnou rovinu.

Jedním z nejstarších způsobů zobrazení povrchu zemského v rovině je stereografická projekce. Byla známa již před Kristem a jejím vynálezcem byl pravděpodobně Hipparch, který v ní zobrazil oblohu. Theoreticky toto zobrazení obdržíme průmětem koule na její tečnou rovinu z bodu protilehlého k bodu dotykovému.

V tomto článku se budeme zabývat obecnějším zobrazením podobného charakteru. Budeme promítat elipsoid ze středu ležícího na normále dotykového bodu ve dvojnásobné vzdálenosti poloměru střední křivosti na rovinu tečnou a všimneme si vlastností tohoto zobrazení. Střed promítání S leží v téže poloprostoru vyfátém tečnou rovinou jako střed elipsoidu.

Věta 1. *Mějme dán trojosý elipsoid E_1 vyjádřený rovnicemi*

$$\begin{aligned} x &= p \sin v \cos u, \\ y &= q \sin v \sin u, \\ z &= c \sin \beta \cos v, \\ 0 &\leq v \leq \pi; \quad 0 \leq u \leq 2\pi; \\ 0 &< \beta < \pi \end{aligned} \tag{1,1}$$

a elipsoid E_2 s ním afinní, určený rovnicemi:

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= x + c \cos \beta \cos v, \\ \bar{\eta} &= y, \\ \bar{\zeta} &= z. \end{aligned} \tag{1,2}$$

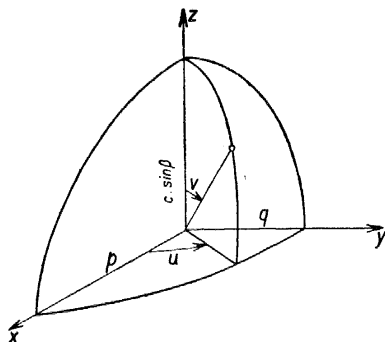
pak řezy rovnoběžné s rovinou $z = 0$ jsou homothetické elipsy, jež v odpovídajících řezech obou elipsoidů E_1 a E_2 jsou kuželosečky shodné. Hlavní poloosy těchto elips jsou

$$p' = p \sin v, \quad q' = q \sin v. \tag{1,3}$$

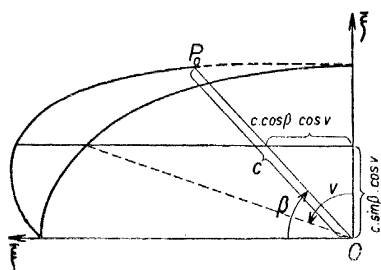
Důkaz: Rovnice (1,2) lze přepsat vzhledem k (1,1) na tvar

$$\begin{aligned}\bar{\xi} &= x + Kz, \\ \bar{\eta} &= y, \\ \bar{\zeta} &= z,\end{aligned}$$

kde $K = \cotg \beta$, což jsou rovnice speciální transformace afinní grupy. Ježto podle principů analyt. geometrie platí vztah (1,3) pro elipsoid \mathbf{E}_1 , platí tedy i pro elipsoid \mathbf{E}_2 .



Obr. 1. Elipsoid \mathbf{E}_1 .



Obr. 2. Řez elipsoidu \mathbf{E}_2 rovinou $\bar{\xi}\bar{\zeta}$.

Věta 2. Průmětem bodů elipsoidu \mathbf{E}_2 , jehož souřadnice dle (1,1) a (1,2) jsou vázány vztahy:

$$\begin{aligned}\bar{\xi} &= p \sin v \cos u + c \cos \beta \cos v, \\ \bar{\eta} &= q \sin v \sin u, \\ \bar{\zeta} &= c \sin \beta \cos v,\end{aligned}\tag{1,4}$$

z uvažovaného středu promítání S , na tečnou rovinu, která odpovídá hodnotě parametru $v = 0$ jsou body, jejichž souřadnice jsou určeny vztahy:

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= \frac{2Rp \sin v \cos u - 2Rc \cos \beta (1 - \cos v)}{2R - c \sin \beta (1 - \cos v)}, \\ \mathbf{Y} &= \frac{2Rq \sin v \sin u}{2R - c \sin \beta (1 - \cos v)}.\end{aligned}\tag{1,5}$$

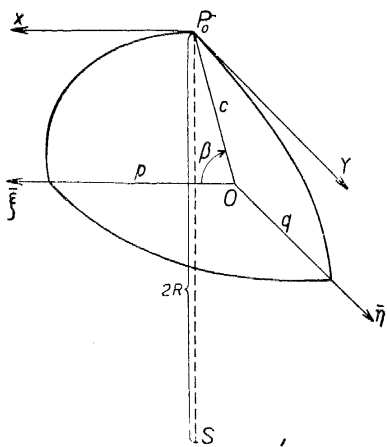
Přitom \mathbf{X} , \mathbf{Y} jsou souřadnice průmětů bodů elipsoidu do této tečné roviny, počátek souřadnicového systému je v dotykovém bodě \mathbf{P}_0 a osy \mathbf{X} , \mathbf{Y} jsou stejně orientovány jako průmět os $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ do tečné roviny a osa $\bar{\xi}$ promítá se do osy \mathbf{X} (obr. 3).

Důkaz: Průmětem řezu $\zeta = \text{konst}$ o poloosách $p' = p \sin v$, $q' = q \sin v$ je elipsa o poloosách p'' , q'' , jejíž střed je posunut proti směru osy \mathbf{X} o délku X_p .

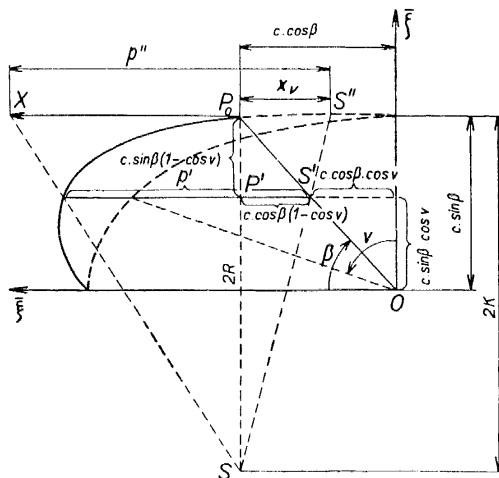
Z obr. 4, který představuje řez elipsoidu E_2 rovinou jdoucí průvodičem $c = OP_0$, kolmou k rovině tečné, plynou úměry:

$$\frac{X_v}{2R} = \frac{c \cos \beta (1 - \cos v)}{2R - c \sin \beta (1 - \cos v)}, \quad (1,6)$$

$$\frac{p''}{p'} = \frac{2R}{2R - c \sin \beta (1 - \cos v)} = \frac{q''}{q'}. \quad (1,7)$$



Obr. 3.



Obr. 4.

Ježto umíme zjistiti délku poloos p'' , q'' průmětů těchto elips jakož i posunutí jejich středu, můžeme napsat jejich rovnice v parametrickém tvaru

$$\begin{aligned} X &= p'' \cos u - X_v, \\ Y &= q'' \sin u. \end{aligned} \quad (1,8)$$

Dosadíme-li nyní do výrazu (1,8) za příslušné veličiny výrazy podle (1,6) a (1,7), dostaneme ihned rovnice (1,5). Z těchto rovnic je zároveň vidět, že každému bodu na elipsoidu E_2 pro určité parametry u , v přísluší jediný bod v tečné rovině. Při zobrazování okolí dotykového bodu na rovinu tečnou je zřejmé přiřazení bodů jednojednoznačné.

Ježto v našich úvahách pokládáme elipsoid E_2 za mezinárodní rotační elipsoid Besselův¹⁾ o rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, poukážeme ještě na

¹⁾ Besselův elipsoid je zploštělý rotační elipsoid, kterým nahrazujeme geoid pro účely kartografických a geodetických výpočtů.

Geometrický význam a velikost konstant rotačního elipsoidu E_2

Z postupu při výpočtu je patrné, že konstanty p, q, c vyskytující se v rovnicích (1,5), odpovídají těmto průvodičům na elipsoidu (obr. 3): Průvodič c je vzdálenost středu elipsoidu O od dotykového bodu P_0 , jehož okolí zobrazujeme do tečné roviny; konstanty p, q jsou poloosy elipsy v průměrové rovině sdružené se směrem \overline{OP}_0 ; R je poloměr střední křivosti elipsoidu v bodě P_0 a úhel β je úhel, který svírá průvodič c se svou sdruženou průměrovou rovinou.

Velikost konstant p, q, c, R . Určíme-li střed zobrazovaného území P_0 zeměpisnou šířkou φ_0 a zeměpisnou délkou $\lambda = 0$, pak podle principů analytické geometrie konstanty p, q, c a R jsou určeny výrazy

$$c^2 = \frac{a^2(1 - e^2)}{1 - e^2 \cos^2 \gamma_0}; \quad q = a; \quad p^2 = \frac{a^2(1 - e^2)}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}; \quad R = a \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0},$$

kde $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ je excentricita elipsoidu, γ_0 je geocentrická šířka, a φ_0 je zeměpisná šířka bodu P_0 .

Určení úhlu β . Podle obr. 3 je β úhel, který svírá průvodič $c = \overline{OP}_0$ se svou sdruženou průměrovou rovinou (nebo (obr. 5) se svým sdruženým průměrem v řezu $\lambda = 0$). Jeho velikost je tedy

$$\beta = \alpha + \gamma_0,$$

kde γ_0 je geocentrická šířka bodu P_0 a α je úhel, který svírá rovina sdružená se směrem \overline{OP}_0 s rovinou rovníku.

Vzhledem k tomu, že budeme v dalším používat též redukované šířky ψ , napíšeme vztahy, jež mezi těmito parametry platí. Geometrický význam těchto parametrů je patrný z (obr. 5)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= (1 - e^2) \operatorname{tg} \varphi, & \sin \psi &= \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \varphi}{W}, \\ \operatorname{tg} \psi &= \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} \varphi, & \cos \psi &= \frac{\cos \varphi}{W}, \end{aligned} \quad (1,9)$$

kde W je geodetická funkce

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}.$$

(Viz lit.)

Věta 3. Vztáhneme-li rotační elipsoid E_2 , určený zeměpisnými souřadnicemi (redukovanou šířkou a zeměpisnou délkou) s popisem

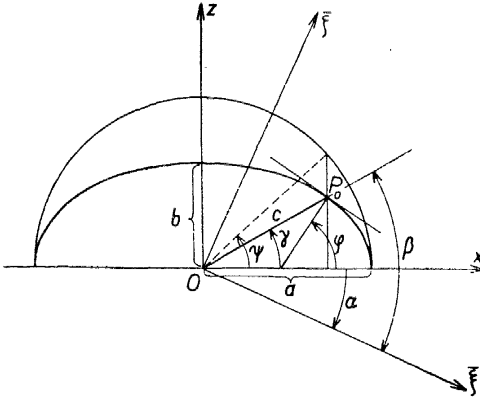
$$\begin{aligned} x &= a \cos \psi \cos \lambda, \\ y &= a \cos \psi \sin \lambda, \\ z &= b \sin \psi, \end{aligned} \quad (1,10)$$

k novému systému souřadnicovému $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ tak, aby hlavní rovina $z = 0$ padla do roviny sdružené se směrem \overline{OP}_0 , pak úhel α vyskytující se v transformačních rovnicích tohoto otočení je dán vztahem

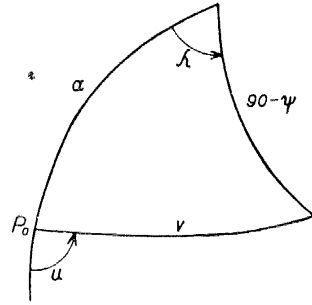
$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi_0 \quad (1,11)$$

a elipsoid (1,10) v novém souřadnicovém systému je vyjádřen rovnicemi

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= a \cos \psi \cos \lambda \cos \alpha - b \sin \psi \sin \alpha, \\ \bar{\eta} &= a \cos \psi \sin \lambda, \\ \bar{\zeta} &= a \cos \psi \cos \lambda \sin \alpha + b \sin \psi \cos \alpha. \end{aligned} \quad (1,12)$$



Obr. 5.



Obr. 6.

Důkaz plyne z toho, že rovina sdružená se směrem OP_0 je kolmá na normálu, jež svírá s rovníkem úhel φ_0 (obr. 5). Dosadíme-li do transformačních rovnic uvažovaného otočení

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= x \cos \alpha - z \sin \alpha, \\ \bar{\eta} &= y, \\ \bar{\zeta} &= x \sin \alpha + z \cos \alpha, \end{aligned} \quad (1,13)$$

výrazy (1,10) dostaneme ihned vyjádření elipsoidu E_2 ve tvaru (1,12).

Věta 4. Mezi křivoznačnými parametry a zeměpisnými souřadnicemi platí vztahy:

$$\begin{aligned} p \sin v \cos u + c \cos \beta \cos v &= a \cos \psi \cos \lambda \cos \alpha - b \sin \psi \sin \alpha, \\ q \sin v \sin u &= a \cos \psi \sin \lambda, \\ c \sin \beta \cos v &= a \cos \psi \cos \lambda \sin \alpha + b \sin \psi \cos \alpha. \end{aligned} \quad (1,14)$$

Důkaz: Ježto rotační elipsoid E_2 je vyjádřen v témže souřadnicovém systému jednak rovnicemi (1,4), a jednak rovnicemi (1,12), plynou z rovnosti souřadnic ihned vztahy (1,14).

Poznámka 1: Speciálním případem rovnic (1,14) uvažovaných na ploše kulové je věta sinová, sinuscosinová a kosinová, jak plyne dosazením $p = q = c = b = a$; $\beta = \frac{\pi}{2}$ (obr. 6).

Věta 5. *Obraz uvažovaného průmětu bodů elipsoidu E_2 na tečnou rovinu je v parametrické soustavě ψ, λ určen rovnicemi*

$$\begin{aligned} X &= \frac{2R[-c \cos \beta + a \cos \psi \cos \lambda \cos \alpha - b \sin \psi \sin \alpha]}{2R - c \sin \beta + a \cos \psi \cos \lambda \sin \alpha + b \sin \psi \cos \alpha}, \\ Y &= \frac{2R \cdot a \cos \psi \sin \lambda}{2R - c \sin \beta + a \cos \psi \cos \lambda \sin \alpha + b \sin \psi \cos \alpha}. \end{aligned} \quad (1,15)$$

Důkaz plyne z rovnic (1,5), do nichž podle vztahů (1,14) dosazeny nové parametry ψ, λ .

Volíme-li $a = 1$ a položíme-li dále v rovnicích (1,15)

$$\begin{aligned} A &= 2R - c \sin \beta, \\ B &= \cos \varphi_0 = \sin \alpha, \\ C &= b \sin \varphi_0 = b \cos \alpha, \\ D &= \sin \varphi_0 = \cos \alpha, \\ M &= b \cos \varphi_0 = b \sin \alpha, \\ N &= c \cos \beta, \end{aligned}$$

můžeme zobrazovací rovnice (1,15) napsat zkráceně ve tvaru

$$\begin{aligned} X &= \frac{2R(D \cdot \cos \psi \cos \lambda - M \sin \psi - N)}{A + B \cos \psi \cos \lambda + C \sin \psi}, \\ Y &= \frac{2R \cdot \cos \psi \cdot \sin \lambda}{A + B \cos \psi \cos \lambda + C \sin \psi}. \end{aligned} \quad (1,16)$$

Definice 1. *Forma*

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

se nazývá první nebo též metrická základní forma plochy, určené rovnicemi: $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$; E, F, G jsou složky metrického tensoru, pro něž platí

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ F &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2, \end{aligned}$$

ds se nazývá lineární element na ploše.

Definice 2. *Délkovým skreslením m_A nazýváme poměr lineárního elementu v obraze a příslušného lineárního elementu na ploše, tedy*

$$m_A^2 = \frac{ds^2}{d\bar{s}^2} = \frac{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}{\bar{E} du^2 + 2\bar{F} du dv + \bar{G} dv^2}.$$

Definice 3. *Křivka plochy, pro niž platí*

$$\begin{aligned} u &= \text{konst.}, \text{ nazývá se parametrická } u\text{-křivka,} \\ v &= \text{konst.}, \text{ nazývá se parametrická } v\text{-křivka.} \end{aligned}$$

Věta 6. *Jsou-li parametrické křivky na sebe kolmé, pak složka metrického tensoru $F = 0$. (Důkaz viz lit.)*

Metrický tensor plochy \mathbf{E}_2

Složky metrického tensoru plochy (1,10), určené v zeměpisných souřadnicích ψ, λ za předpokladu $a = 1, b = \sqrt{1 - e^2}$ dostaneme ve tvaru:

$$\begin{aligned} \bar{E}' &= 1 - e^2 \cos^2 \psi, \\ \bar{G}' &= \cos^2 \psi, \\ \bar{F}' &= 0. \end{aligned}$$

Důkaz plyne provedením výpočtu podle definice 1.

Výpočet metrického tensoru obrazu (1,16)

Označme v rovnicích (1,16) jmenovatele

$$A + B \cos \varphi \cos \lambda + \varphi \sin \psi = \bar{U}. \quad (1,17)$$

pak

$$\frac{\partial X}{\partial \psi} = -\frac{2R}{\bar{U}^2} [(MB + CD) \cos \lambda + (AD + BN) \cos \lambda \sin \psi + (AM - CN) \cos \psi],$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \psi} = -\frac{2R}{\bar{U}^2} [C \sin \lambda + A \sin \psi \sin \lambda],$$

$$\frac{\partial X}{\partial \lambda} = -\frac{2R}{\bar{U}^2} [(MB + CD) \sin \psi \cos \psi \sin \lambda + (AD + BN) \cos \psi \sin \lambda],$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \lambda} = \frac{2R}{\bar{U}^2} [B \cos^2 \psi + A \cos \psi \cos \lambda + C \sin \psi \cos \psi \cos \lambda].$$

Z těchto výrazů určíme podle definice (1) složky E', F', G' metrického tensoru obrazu v parametrech ψ, λ ve tvarech:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{U}^4}{4R^2} E' &= \cos^2 \lambda \{[(MB + CD)^2 - C^2] + [(AD + BN)^2 - A^2] \sin^2 \psi + \\ &+ [2(MB + CD)(AD + BN) - 2AC] \sin \psi\} + \cos \lambda \{2(MB + \\ &+ CD)(AM - CN) \cos \psi + 2(AD + BN)(AM - CN) \sin \psi \cos \psi\} + \\ &+ \{C^2 + A^2 \sin^2 \psi + (AM - CN)^2 \cos^2 \psi + 2AC \sin \psi\}, \quad (1,18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{U}^4}{4R^2} F' &= \sin \psi \cos \psi \sin \lambda \cos \lambda \{-C^2 - A^2 + (MB + CD)^2 + (AD + BN)^2\} + \\ &+ \sin^2 \psi \cos \psi \sin \lambda \cos \lambda \{(MB + CD)(AD + BN) - AC\} + \\ &+ \sin \psi \cos^2 \psi \sin \lambda \{-AB + (MB + CD)(AM - CN)\} + \\ &+ \cos \psi \sin \lambda \cos \lambda \{-AC + (BN + AD)(MB + CD)\} + \\ &+ \cos^2 \psi \sin \lambda \{-BC + (AD + BN)(AM - CN)\}, \quad (1,19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{U}^4}{4R^2} G' = & \cos^2 \lambda \{ [C^2 - (MB + CD)^2] \sin^2 \psi \cos^2 \psi + \\
& + [2AC - 2(MB + CD)(AD + BN)] \sin \psi \cos^2 \psi + \\
& + [A^2 - (AD + BN)^2] \cos^2 \psi \} + \\
& + \cos \lambda \{ 2AB \cos^3 \psi + 2BC \sin \psi \cos^3 \psi \} + \\
& + [(MB + CD)^2 - B^2] \sin^2 \psi \cos^2 \psi + [(AD + BN)^2 + B^2] \cos^2 \psi + \\
& + 2(MB + CD)(AD + BN) \sin \psi \cos^2 \psi + [A^2 - (AD + BN)^2] \cos^2 \psi .
\end{aligned} \tag{1,20}$$

Tím jsme obdrželi složky E', F', G' metrického tensoru obrazu vyjádřené v parametrech ψ, λ . Abychom dostali složky E, F, G tensoru obrazu (případně složky $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ tensoru plochy) v parametrech φ, λ , nutno je transformovat podle rovnic:

$$\begin{aligned}
E &= E' \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right)^2, & \bar{E} &= \bar{E}' \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right)^2, \\
F &= F' \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right), & \bar{F} &= \bar{F}' \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right), \\
G &= G', & \bar{G} &= \bar{G}',
\end{aligned} \tag{1,21}$$

načež dosadíme za $\sin \psi, \cos \psi$ výrazy podle (1,9). Z druhé rovnice (1,9) určíme nejprve

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{W^2} \tag{1,22}$$

diferencováním vztahu

$$\operatorname{tg} \psi = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} \varphi .$$

Dosadíme-li do výrazu (1,17) pomocí rovnic (1,9) místo parametru ψ parametr φ , dostaneme:

$$\bar{U} = \frac{AW + B \cos \varphi \cos \lambda + C\sqrt{1 - e^2} \sin \varphi}{W} .$$

Označíme-li nyní čitatele

$$AW + B \cos \varphi \cos \lambda + C\sqrt{1 - e^2} \sin \varphi = U , \tag{1,23}$$

pak platí

$$\bar{U} = \frac{U}{W} . \tag{1,24}$$

Použijeme-li těchto označení při vyjádření složek tensoru obrazu E, F, G v parametrech φ, λ , dostaneme je ve tvarech:

$$\frac{U^4}{4R^2} E = E' \frac{\bar{U}^4}{4R^2} (1 - e^2) , \tag{1,25}$$

$$\frac{U^4}{4R^2} F = F' \frac{\bar{U}^4}{4R^2} W^2(1 - e^2), \quad (1,26)$$

$$\frac{U^4}{4R^2} G = G' \frac{\bar{U}^4}{4R^2} W^4, \quad (1,27)$$

jak plyne dosazením do (1,18) – (1,20) podle (1,21) – (1,24).

Na příklad:

$$E' \frac{\bar{U}^4}{4R^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right)^2 = \frac{EU^4}{4R^2 W^4},$$

odkud

$$\frac{U^4}{4R^2} E = E' \frac{\bar{U}^4}{4R^2} W^4 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right)^2 = E' \frac{\bar{U}^4}{4R^2} W^4 \frac{1 - e^2}{W^4} = E' \frac{\bar{U}^4}{4R^2} (1 - e^2) \text{ atp.}$$

Podle uvedených rovnic obdržíme tyto tvary jednoduše tím, že výraz (1,18) vynásobíme jen $(1 - e^2)$, výraz (1,19) vynásobíme $W^2(1 - e^2)$ a výraz (1,20) vynásobíme W^4 , načež nahradíme podle rovnic (1,19) parametr ψ parametrem φ .

Věta 7. *Délkové skreslení elementu ds, jehož směr svírá s poledníkem azimut A, je určeno výrazem*

$$m_A^2 = m_p^2 \cos^2 A + m_r^2 \sin^2 A + n \sin A \cos A.$$

(Důkaz viz lit.)

Z rovnic (1,18)–(1,20) můžeme rovněž počítati přímo výrazy

$$m_p^2 \frac{U^4}{4R^2} = E' \frac{\bar{U}^4}{4R^2} \frac{W^6}{1 - e^2}, \quad (1,28a)$$

$$m_r^2 \frac{U^4}{4R^2} = G' \frac{\bar{U}^4}{4R^2} \frac{W^4}{\cos^2 \psi}, \quad (1,29a)$$

$$n \frac{U^4}{4R^2} = \frac{2F}{\sqrt{EG}} \frac{U^4}{4R^2} = \frac{2F' W^5}{\cos \psi \sqrt{1 - e^2}} \frac{\bar{U}^4}{4R^2}, \quad (1,30a)$$

kde $m_p^2 = \frac{E}{E}$ je čtverec délkového skreslení ve směru poledníku,

$m_r^2 = \frac{G}{G}$ je čtverec délkového skreslení ve směru rovnoběžky a

$n = \frac{2F}{\sqrt{EG}}$ je výraz z rovnice skreslení v libovolném směru.

Důkaz: Pro skreslení ve směru poledníku platí

$$m_p^2 = \frac{E}{E} = \frac{E'}{E'},$$

neboť při transformaci tensoru podle (1,21) můžeme v čitateli i jmenovateli krátit stejným výrazem $\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2$ a proto použijeme při úpravě výrazu jen úpravy podle rovnice (1,24), načež dosadíme do rovnice složku metrického tensoru $\bar{E}' = 1 - e^2 \cos^2 \varphi$, kterou podle (1,9) píšeme ve tvaru $\bar{E}' = \frac{1 - e^2}{W^2}$.

Platí tedy:

$$\frac{E}{E} \frac{U^4}{4R^2} = \frac{E' \bar{U}^4 W^4}{4R^2 E'} = \frac{E' \bar{U}^4}{4R^2} W^4 \frac{W^2}{1 - e^2},$$

t. j. rovnici (1,28a) dostaneme vynásobením rovnice (1,18) výrazem $\frac{W^6}{1 - e^2}$.

Podobně vztah (1,29a) dostaneme vynásobením rovnice (1,20) výrazem $\frac{W^4}{\cos^2 \varphi}$

a vztah (1,30a) vynásobením (1,19) výrazem $\frac{2W^5}{\cos \varphi \sqrt{1 - e^2}}$.

Po provedení těchto úprav nahradí se podle (1,9) parametr ψ parametrem φ a dostaneme tyto výsledné rovnice:

$$\begin{aligned} m_p^2 \frac{U^4}{4R^2} = & \cos^2 \lambda \left\{ \frac{(MB + CD)^2 - C^2}{1 - e^2} W^6 + [(AD + BN)^2 - A^2] W^4 \sin^2 \varphi + \right. \\ & \left. + \frac{2(MB + CD)(AD + BN) - 2AC}{\sqrt{1 - e^2}} W^5 \sin \varphi \right\} + \\ & + \cos \lambda \left\{ \frac{2(MB + CD)(AM - CN)}{1 - e^2} W^5 \cos \varphi + \right. \\ & \left. + \frac{2(AD + BN)(AM - CN)}{\sqrt{1 - e^2}} W^4 \sin \varphi \cos \varphi \right\} + \\ & + \left\{ \frac{(AM - CN)^2}{1 - e^2} W^6 + \left[A^2 - \frac{(AM - CN)^2}{1 - e^2} \right] W^4 \sin^2 \varphi + \right. \\ & \left. + \frac{2AC}{\sqrt{1 - e^2}} W^5 \sin \varphi + \frac{(AM - CN)^2}{1 - e^2} W^4 \right\}, \end{aligned} \quad (1,28)$$

$$\begin{aligned} m_r^2 \frac{U^4}{4R^2} = & \cos^2 \lambda \{ [C^2 - (MB + CD)^2](1 - e^2) W^2 \sin^2 \varphi + \\ & + [2AC - 2(MB + CD)(AD + BN) \sqrt{1 - e^2}] W^3 \sin \varphi + \\ & + [A^2 - (AD + BN)^2] W^4 \} + \\ & + \cos \lambda \{ 2AB W^3 \cos^2 \varphi + BC \sqrt{1 - e^2} W^2 \sin^2 2\varphi \} + \\ & + \{ [(MB + CD)^2 - B^2](1 - e^2) W^2 \sin^2 \varphi + [(AD + BN)^2 + B^2] W^4 + \\ & + 2(MB + CD)(AD + BN) \sqrt{1 - e^2} W^3 \sin \varphi \}, \end{aligned} \quad (1,29)$$

$$\begin{aligned}
n \frac{U^4}{4R^2} = & \sin 2\lambda[(MB + CD)^2 + (AD + BN)^2 - C^2 - A^2] W^4 \sin \varphi + \\
& + \sin 2\lambda[\sqrt{1 - e^2}(MB + CD)(AD + BN) - AC] W^3 \sin^2 \varphi + \\
& + \sin 2\lambda \left[\frac{(AD + BN)(MB + CD) - AC}{\sqrt{1 - e^2}} \right] W^5 + \\
& + \sin \lambda[(MB + CD)(AM - CN) - AB] W^3 \sin 2\varphi + \\
& + \sin \lambda \left[2 \frac{(AD + BN)(AM - CN) - BC}{\sqrt{1 - e^2}} \right] W^4 \cos \varphi, \quad (1,30)
\end{aligned}$$

ktéř ve spojení s rovnicí (1,23) nám umožní určit hodnoty m_p , m_r a n a tím skreslení délková v libovolném směru.

Abychom mohli studovat vlastnosti tohoto zobrazení, určíme ještě několik základních kartografických výpočtů:

Věta 8. *Skreslení plošné je dáno vztahem:*

$$P = m_1 m_2,$$

kde m_1 , m_2 jsou skreslení délková v hlavních směřech, t. j. extrémní délková skreslení.

Věta 9. *Azimuty A_1 , A_2 hlavních směřů jsou určeny rovnicí*

$$\operatorname{tg} 2A = \frac{n}{m_p^2 - m_r^2}.$$

Věta 10. *Maximální skreslení úhlové $\Delta\omega$ je dáno výřazem*

$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.$$

(Důkazy viz lit.)

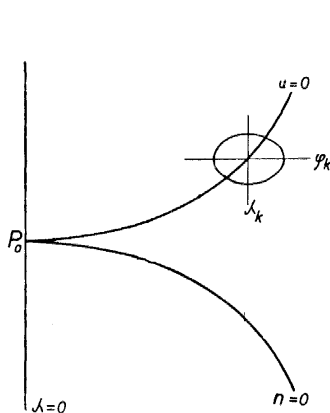
Zvolíme-li pevně střed zobrazovaného území P_0 ($\varphi_0 = 49^\circ$, $\lambda = 0^\circ$), můžeme všechny konstanty ve vzorcích (1,28)–(1,30) vyčíslit a pak těchto vzorců použít při základních kartografických výpočtech (skreslení délkovém, plošném a úhlovém).

Vzorce (1,28)–(1,30) bylo by možno zjednodušit rozvojem geodetické funkce W a funkcí goniometrických v okolí bodu $\varphi_0 = 49^\circ$ v řady. Geodetická funkce W a její mocniny konvergují velmi rychle. Pro požadovanou přesnost osmi míst stačí brát čtyři členy této řady a člen s $e^8 \sin^8 \varphi$ můžeme zanedbat, neboť jeho hodnota je menší než $0,1 \cdot 10^{-9}$. Označíme-li $\Delta\varphi = h$, pak pro požadovanou přesnost osmi míst bylo by nutno uvažovat v řadách ještě mocniny s h^5 (při výpočtu vzdálenosti cca 400 km). Pro informaci o vlastnostech tohoto zobrazení byla vypočtena skreslení na hlavním poledníku ve vzdálenosti ± 100 km od zvoleného středu zobrazovaného území, a dále skreslení

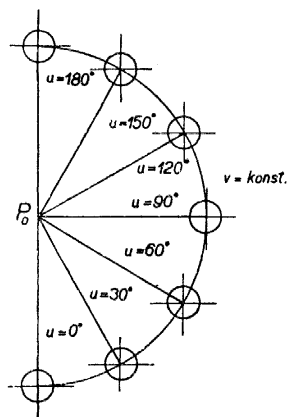
v bodech na parametrické v -křivce (jejíž body leží přibližně na kružnici o průvodiči $\rho \langle 375-390 \text{ km} \rangle$ pro $v = 3,5^\circ$ a pro hodnoty u od 0° do 180° o kroku 30° (obr. 8).

Průběh skreslení a poloha elipsy skreslení na parametrické v -křivce

Převod parametrů u, v na zeměpisné parametry φ, λ vyznačen v tabulce 1. Při převodu těchto parametrů bylo použito rovnice (1,14), kde z třetí rovnice



Obr. 7.



Obr. 8.

(1,14) vypočteme nejprve $\cos \lambda$ a dosadíme jej do první rovnice. Po sloučení dostaneme

$$\frac{b \sin \varphi}{\sin \alpha} = c \sin \beta \cotg \alpha \cos v - p \sin v \cos u - c \cos \beta \cos v,$$

odkud vypočteme $\sin \varphi$. Potom z druhé rovnice (1,15) vypočteme $\sin \lambda$, načež podle (1,9) určíme $\sin \varphi$ z rovnice

$$\sin^2 \varphi = \frac{\sin^2 \psi}{1 - e^2 \cos^2 \psi}.$$

Pomocí hodnot sestavených v tab. 1 byla vypočtena uvažovaná skreslení v uvedených bodech, jež jsme sestavili do další tabulky (tab. 2).

Bližším studiem rovnice (1,30), kterou si nyní představme ve tvaru $n = F^I \sin 2\lambda + F^{II} \sin \lambda$, poznáme, že výraz n se anuluje nejen pro $\lambda = 0$ (t. j. na základním poledníku), ale že na libovolné rovnoběžce $\varphi = \varphi_k$ můžeme z této anulované rovnice $\left(\cos \lambda = -\frac{F^{II}}{2F^I} \right)$ určit dvě hodnoty λ_k souměrné dle základního poledníku $\lambda = 0$, takže výraz n se anuluje též pro tyto hodnoty $\varphi = \varphi_k, \lambda = \lambda_k$.

V těchto bodech jsou tedy směry poledníků a rovnoběžek směry hlavními. (Obr. 7.)

Z tab. 2 je patrné, že skreslení délková v poledníku a rovnoběžce liší se od sebe teprve na šestém místě a jsou ve všech bodech parametrické v -křivky $v = 3,5^\circ$ (obr. 8) při zaokrouhlení na 5 míst všude stejné. Je-li A_1 úhel, který svírá rovnoběžka s delší poloosou elipsy skreslení, pak vidíme, že hlavní směry elipsy skreslení odchyľují se od poledníků a rovnoběžek o úhel v absolutní hodnotě menší než $2^\circ 20'$ (tab. 2).

Pro srovnání tohoto zobrazení uvedeme ještě tabulku délkových skreslení na azimutální kružnici $v = 3,5^\circ$, pro několik způsobů zobrazení kulového povrchu na azimutální rovinu (tab. 3). Při porovnání délkového skreslení projekce stereografické s uváženou projekcí elipsoidu, vidíme, že skreslení délková se shodují na pět míst.

Uvedený způsob promítání Besselova elipsoidu na tečnou rovinu vykazuje na okraji kruhu poloměru 400 km velmi malé skreslení úhlové, které je menší než $1''$. Bylo by tedy možno použít tohoto zobrazení jako přibližného zobrazení konformního při sestřování mapy území tvaru vřehlíkového.

Článek vytkl si toliko za úkol seznámit čtenáře s postupem při návrhu tohoto zobrazení jako perspektivního průměru elipsoidu na tečnou rovinu a předvádí čtenářům užití analytické a diferenciální geometrie při výpočtu souřadnic bodů průmětu a rozboru jeho kartografických vlastností.

Hodnoty konstant

$$\varphi_0 = 49^\circ, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi_0 = 41^\circ,$$

$$\operatorname{tg} \gamma_0 = (1 - e^2) \operatorname{tg} \varphi_0 = 1,14269\ 0402, \quad \gamma_0 = 48^\circ 48' 35,7561'',$$

$$\beta = \alpha + \gamma_0 = 89^\circ 48' 35,7561'',$$

$$g = a = 1,00000\ 00000, \quad b = \sqrt{1 - e^2} = 0,99665\ 72268,$$

$$e^2 = \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos^2 \gamma_0} = 0,99620\ 93301, \quad e = 0,99810\ 28655,$$

$$p^2 = \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0} = 0,99711\ 62976, \quad p = 0,99855\ 71078,$$

$$R = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0} = 1,00046\ 06116,$$

$$A = 2R - c \sin \beta = 1,00282\ 38496, \quad B = \sin \alpha = 0,65605\ 90290,$$

$$C = b \cos \alpha = 0,75218\ 67572, \quad D = \cos \alpha = 0,75470\ 95802,$$

$$M = b \sin \alpha = 0,65386\ 59725, \quad N = c \cos \beta = 0,00331\ 10083,$$

$$(MB + CD) = 0,99665\ 72266, \quad (AD + BN) = 0,75901\ 29834,$$

$$(AM - CN) = 0,65322\ 18951.$$

Tab. I.

$$v = 3.5^\circ; \sin \psi = 0.7522149613 - 0.4012779376 \cos u; \sin \lambda = \frac{\sin v \sin u}{\cos \psi}; \sin^2 \varphi = \frac{\sin^2 \psi}{1 - e^2 \cos^2 \psi}$$

180°	0.79234 27551 (0.61007 61907)	0	0.00248 41543	0.62937 04950	0.79332 87434 0.62500 3607	52°21'31.666" (0.06104 61196)
150°	0.78696 66501 (0.61699 53362)	0.04947 24321 (0.99877 54895)	0.00254 08233	0.62089 40906	0.78796 83309 (0.61571 57699)	51°59'45.787" (0.05229 09761)
120°	0.77227 88582 (0.63528 36888)	0.08322 20109 (0.99653 10316)	0.00269 36789	0.59802 55235	0.77332 10999 (0.63401 44923)	50°39'11.032" (0.02885 14174)
90°	0.75221 49613 (0.65091 77895)	0.09264 97062 (0.99369 87607)	0.00289 78299	0.56747 38534	0.75330 86046 (0.63766 72005)	48°52'40.073" (-0.00213 28268)
60°	0.73215 10644 (0.68114 22898)	0.07761 90039 (0.99698 30942)	0.00309 66072	0.53771 02585	0.73328 72960 (0.67991 89227)	47° 9'45.692" (-0.00206 70702)
30°	0.71746 32725 (0.69659 63340)	0.04381 91651 (0.99903 94791)	0.00323 87154	0.51642 61045	0.71862 79319 (0.69539 47767)	45°56'28.737" (-0.05338 41096)
0°	0.71208 71676 (0.70209 10665)	0	0.00329 00107	0.50874 19005	0.71326 14531 (0.70089 80664)	45°30' 3.238" (-0.06107 06480)
u	$\frac{\sin \psi}{(\cos \psi)}$	$\frac{\sin \lambda}{(\cos \lambda)}$	$e^2 \cos^2 \psi$	$\sin^2 \varphi$	$\frac{\sin \varphi}{(\cos \varphi)}$	$\frac{\varphi}{(h)}$

Tab. 2.

Tabulka skreslení uvažované projekce elipsoidu na tečnou rovinu v bodech parametrické v -křivky $v = 3,5^\circ$ a v bodech na hlavním poledníku $\lambda = 0$ ve vzdálenosti ± 100 km (severně) $+ 100$ km (jižně) od zvoleného středu zobrazovaného území

$v = 3,5^\circ$ u	$(m_p - 1) \cdot 10^5$	$(m_r - 1) \cdot 10^5$	$n \cdot 10^{10}$	$\text{tg } 2A$	A_1	Δm	$(P - 1) \cdot 10^{10}$
180°	92,914	93,126	0000	0,00000	0°	0,436"	1860
150°	92,964	93,203	3818	-0,07984	$-2^\circ 16' 57''$	0,492"	1862
120°	93,072	93,342	188	-0,00983	$-16' 54''$	0,556"	1865
90°	93,126	93,382	-3738	0,07285	$+2^\circ 05'$	0,527"	1866
60°	93,043	93,314	428	-0,00789	$-13' 34''$	0,558"	1865
30°	92,882	93,186	3714	-0,06102	$-1^\circ 44' 45''$	0,626"	1762
0°	92,799	93,126	0000	0,00000	0°	0,673"	1860
$+ 100$ km	6,12	6,14	0000	0,00000	0°	0,020"	1226
$- 100$ km	5,13	6,15	0000	0,00000	0°	0,020"	1228

Tab. 3.

Tabulka délkových skreslení několika způsobů zobrazení kulového povrchu na tečnou rovinu při $v = 3,5^\circ$

Zobrazení	m_{A_1}	m_{A_2}
Postelovo	1	1,000 622
Stereografické	1,000 933	1,000 933
Stejnoploché	0,999 534	1,000 467
Braussingovo	1,000 350	1,000 700
Ortografické	0,998 135	1,000 000
Gnomické	1,000 374	1,001 868

LITERATURA

- [1] F. Fiala: Matematická kartografie, Praha 1954.
 [2] V. Hlavatý: Diferenciální geometrie křivek a ploch, Praha 1937.

Резюме

ПРИБЛИЖЕННОЕ КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ
 ЭЛЛИПСОИДА БЕССЕЛЯ

ИОСЕФ ШМАГЕЛЬ (Josef Šmabel)

(Поступило в редакцию 8/VI 1956 г.)

В настоящей работе выводятся преобразовательные уравнения приближенно-конформного отображения эллипсоида вращения в плоскость.

Отображение представляет собой центральное проектирование эллипсоида в плоскость, касательную к эллипсоиду в начальной точке $P_0(\varphi_0, \lambda_0 = 0^\circ)$. Центром проектирования является точка нормали, построенной в точке P_0 , находящаяся на расстоянии двух радиусов центральной кривизны. Автор воспользовался аффинным преобразованием координат трех-осевого эллипсоида для установления подходящих криволинейных параметров (u, v) . Прямоугольные координаты в плоскости (X, Y) центральной проекции он представил в виде простых функций криволинейных параметров [см. (1,5)]. Затем он в случае дискообразного эллипсоида вращения установил связь между этими параметрами и приведенной (возможно, географической) широтой ψ и географической долготой λ [см. (1,15)]; после этого плоскостные координаты образа он представил в виде функций ψ и λ [см. (1,16a)], упростив их введением полуоси $a = 1$ [см. (1,16)].

Далее, он нашел в подобных координатах компоненты метрических тензоров эллипсоида и его образа в плоскости. При помощи полученных результатов он нашел значения величин, встречающихся в уравнении для вычисления приращения длины при любом азимуте m_A , т. е. приращение по экваториальной линии m_p , по параллельной m_r и приращение выражения n [см. (1,28), (1,29), (1,30), (1,23)].

Из практических вычислений видно, что указанное отображение для точек, находящихся на расстоянии 370 км от начальной точки $P_0(\varphi_0 = 49^\circ, \alpha_0 = 0^\circ)$, практически не отличается от конформного. Максимальное угловое приращение меньше $0,7''$. Приращение длины соответствует стереографическому отображению соприкасающегося шара. Следовательно, оно было бы удобным в случае территории небольших размеров, имеющей вид шарового сектора. Его выгодой является непосредственный перевод по законченным формулам.

Zusammenfassung

DIE ANGENÄHERTE KONFORME ABBILDUNG DES BESSEL'SCHEN ELIPSOIDEN

JOSEF ŠMAHEL

(Eingegangen am 8. Juni 1956.)

In der vorgelegten Behandlung sind die darstellenden Gleichungen einer näherungsweise Konformabbildung des Rotationsellipsoiden in die Ebene angeführt. Die Abbildung ist eine Zentralprojektion eines Ellipsoiden in die Berührungsebene im Anfangspunkt $P_0(\varphi_0, \lambda_0 = 0)$. Mittelpunkt der Projektion

ist der Punkt an der eindeutig orientierten Normalen des Punktes P_0 in der Entfernung von zwei Halbmessern der mittleren Krümmung. Der Autor benützt eine affine Transformation der Koordinaten des dreiachsigen Ellipsoiden dazu, um geeignete krummlinige Parameter zu bestimmen. Kartesische Koordinaten X, Y in der Ebene der Zentralprojektion werden als einfache Funktionen krummliniger Parameter bestimmt.

Dann stellt er für den Rotationsellipsoiden die Beziehungen zwischen diesen Parametern und reduzierter (even. geographischer) Breite und geographischer Länge fest. Ferner bestimmt er die kartesischen Koordinaten der Abbildung in der Ebene als Funktionen von ψ und λ . Dann berechnet er den metrischen Tensor des Ellipsoiden und seiner Abbildung. Dadurch lässt sich eine Tafel mit den Längen-, Winkel- und Flächenverzerrungen zusammenstellen, woraus hervorgeht, dass die Abbildung noch für die Punkte in der Entfernung von 370 Km vom Zentralpunkt P_0 praktisch konform ist. Die maximale Winkelverzerrung ist kleiner als $0,7''$. Die Grösse der Längenverzerrung entspricht der stereographischen Abbildung der Kugel. Diese Abbildung wäre daher für ein Gebiet in der Form eines Kugelabschnittes im kleineren Ausmass geeignet.