Jiří Klátil

Ustálené teplotní pole v nekonečné rovinné desce z více vrstev s obecným rozložením teploty na okrajových stěnách

Aplikace matematiky, Vol. 2 (1957), No. 4, 258–278

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102576

USTÁLENÉ TEPLOTNÍ POLE V NEKONEČNÉ ROVINNÉ DESCE Z VÍCE VRSTEV S OBECNÝM ROZLOŽENÍM TEPLOTY NA OKRAJOVÝCH STĚNÁCH

JIŘÍ KLÁTIL

(Došlo dne 14. června 1956.) DT : 536.248.1

V článku je podáno odvození vzorců pro ustálenou teplotu v planparalelní rovinné desce, složené z více vrstev v případě, že na každé z obou bočných stěn desky je udržována táž určitá (libovolná) teplota a že mezi sousedními vrstvami uvnitř desky nastává přestup tepla.

A. Úvod

Ve svém článku [1] jsem podal odvození vzorců pro výpočet ustálené teploty v libovolném místě dvouvrstvé, rovinné a nekonečně rozlehlé desky pro případ, že na jejích bočných stěnách je obecné, na čase nezávislé rozdělení a že mezi oběma vrstvami této desky nastává přestup tepla. V tomto článku provádím podstatné zobecnění uvedeného problému na případ, kdy táž deska se skládá z libovolného konečného počtu vrstev, přičemž na styčné rovině kterýchkoli dvou sousedních vrstev opět nastává přestup tepla. Volím zde rovněž podrobnější a názornější postup výpočtu, než jaký jsem podal ve výše zmíněné své práci.

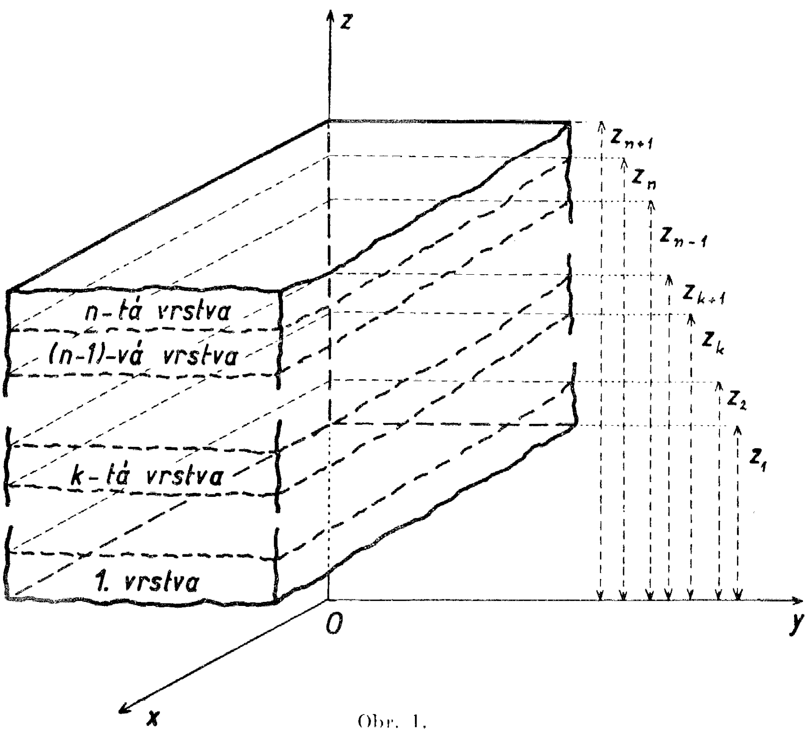
B. Formulace problému a postup při jeho řešení

1. Formulace problému

Uvažujme nekonečnou planparalelní desku, složenou z n rovinných vrstev z homogenních a isotropních materiálů. Obdobně jako v [1] zvolme i nyní souřadnicový systém $Oxyz$ pravoúhlých přímočarých souřadnic x, y, z tak, aby okrajové roviny této desky měly v tomto systému rovnice $z = z_1$ a $z = z_{n+1}$. Při této volbě je k-tá vrstva omezena rovinami $z = z_k$ a $z = z_{k+1}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), přičemž je $z_1 < z_2 < \ldots < z_{k-1} < z_k < z_{k+1} < \ldots < z_n < z_{n+1}$ (na obr. 1 je znázorněna část desky, ležící v prvním kvadrantu zvoleného souřadnicového systému). Naším úkolem je stanovit rozložení teploty $u = u(x, y, z)$ v libovolném místě (x, y, z) desky za těchto předpokladů:

α) je

$u(x, y, z) = u_k(x, y, z)\,, \ -\infty < x, y < +\infty\,, \ z_k < z < z_{k+1}\,; \ k = 1, 2, \ldots, n;$



Obr. 1.

β) na spodním okraji $z = z_1$ desky je neustále udržována teplota $u_1(x, y, z_1) = f(x, y)$;

γ) podobně na horním okraji $z = z_{n+1}$ je stálá teplota $u_n(x, y, z_{n+1}) = F(x, y)$;

δ) funkce $f(x, y)$ a $F(x, y)$ lze vyjádřit Fourierovým integrálem [2] vzhledem k proměnné x (resp. y) pro každou hodnotu proměnné y (resp. x);

ε) na styčné rovině $z = z_k$ vrstvy $(k - 1)$-vé a k-té $(k = 2, 3, \ldots, n)$ nastává přestup tepla s koeficienty h_k ve směru rostoucích a h'_k ve směru klesajících z-ových souřadnic $(h_k > 0,\ h'_k > 0;\ k = 2, 3, \ldots, n)$.

Za těchto okolností je matematické vyjádření problému dáno vztahy [3]:

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} = 0\,, \quad -\infty < x, y < +\infty\,,$$
$$z_k < z < z_{k+1}\,; \quad k = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{1.1}$$

$$u_1(x, y, z_1) = f(x, y)\,, \quad -\infty < x, y < +\infty\,, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial z} + h_{k+1}(u_k - u_{k+1}) = 0\,, \quad \frac{\partial u_{k+1}}{\partial z} + h'_{k+1}(u_k - u_{k+1}) = 0\,,$$
$$-\infty < x\,, y < +\infty\,, \quad z = z_{k+1}\,; \quad k = 1, 2, \ldots, n-1\,, \tag{1.3}$$

$$u_n(x, y, z_{n+1}) = F(x, y)\,, \quad -\infty < x, y < +\infty\,. \tag{1.4}$$

2. Postup při řešení

Řešení u tohoto problému získáme superposicí řešení $u^{(1)}$ a $u^{(2)}$ dvou částečných problémů, určených rovněž vztahy (1.1) — (1.4) se záměnou okrajové podmínky (1.4) podmínkou

$$u_n^{(1)}(x, y, z_{n+1}) = 0\,, \quad -\infty < x, y < +\infty \tag{2.1}$$

v prvém a podmínky (1.2) podmínkou

$$u^{(2)}(x, y, z_1) = 0\,, \quad -\infty < x, y < +\infty \tag{2.2}$$

v druhém částečném problému. Výsledné řešení bude tedy tvaru

$$u(x, y, z) = u^{(1)}(x, y, z) + u^{(2)}(x, y, z)\,. \tag{2.3}$$

Řešení prvního částečného problému je podstatnou částí řešení celého problému vůbec. Abychom tohoto řešení dosáhli, budeme nejprve hledat vhodný systém partikulárních integrálů, vyhovujících pouze některým z uvedených podmínek. Pomocí těchto integrálů určíme zmíněná částečná řešení. Řešení druhého částečného problému získáme pak přímo z předchozího použitím vhodné transformace.

C. Řešení prvního částečného problému

První částečný problém, na jehož řešení se omezíme nejprve, je charakterisován vztahy (1.1) — (1.3) a (2.1). V našem výpočtu najdeme nejdříve partikulární integrály, vyhovující podmínkám (1.1), (1.3) a (2.1).

3. Základní partikulární integrály

Výše zmíněné partikulární integrály nalezneme mezi základními partikulárními integrály, vyhovujícími podmínce (1.1). Tyto základní partikulární integrály budeme podle známé Bernoulliovy metody separace proměnných [4] předpokládat ve tvaru

$$v_k = v_k(x, y, z) = X_k(x)\, Y_k(y)\, Z_k(z)\,,$$
$$-\infty < x, y < +\infty\,, \quad z_k < z < z_{k+1}\,; \quad k = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{3.1}$$

kde funkce $X_k(x)$, $Y_k(y)$ a $Z_k(z)$ jsou diferenciace schopné do druhého řádu včetně. Po dosazení výrazu v_k do podmínky (1.1) dostáváme vztah

$$\frac{X''_k}{X_k} + \frac{Y''_k}{Y_k} + \frac{Z''_k}{Z_k} = 0\,; \quad k = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{3.2}$$

platný stejně jako všechny vztahy následujících dvou odstavců pro všechna x, y a z, uvedená v (3.1). Vztah (3.2) bude zřejmě splněn, položíme-li

$$\frac{X''_k}{X_k} = -\lambda^2\,, \quad \frac{Y''_k}{Y_k} = -\mu^2\,, \quad \frac{Z''_k}{Z_k} = \nu^2\,, \tag{3.3}$$

kde

$$\nu = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}\,, \tag{3.4}$$

λ a μ jsou libovolná reálná čísla. Poznamenejme ihned, že při následujících výpočtech postačí se omezit na nezáporné hodnoty všech tří zavedených parametrů

$$\lambda \geqq 0\,, \quad \mu \geqq 0\,, \quad \nu \geqq 0\,. \tag{3.5}$$

Vzhledem k pozdější potřebě je vhodné zavésti do obecných integrálů diferenciálních rovnic (3.3) ještě další dva reálné parametry ξ a η. Pišme tyto obecné integrály ve tvaru

$$\begin{aligned}
X_{k\lambda} &= \alpha_{k\lambda} \cos \lambda(\xi - x) + \beta_{k\lambda} \sin \lambda(\xi - x)\,, \quad \lambda > 0\,; \quad k = 1, 2, \ldots, n\,,\\
X_{k0} &= \alpha_{k0} + \beta_{k0}(\xi - x)\,; \quad k = 1, 2, \ldots, n\,,\\
Y_{k\mu} &= \gamma_{k\mu} \cos \mu(\eta - y) + \delta_{k\mu} \sin \mu(\eta - y)\,, \quad \mu > 0\,; \quad k = 1, 2, \ldots, n\,,\\
Y_{k0} &= \gamma_{k0} + \delta_{k0}(\eta - y)\,; \quad k = 1, 2, \ldots, n\,,\\
Z_{k\nu} &= \varepsilon_{k\nu} \operatorname{ch} \nu(z - z_k) + \zeta_{k\nu} \operatorname{sh} \nu(z - z_k)\,, \quad \nu > 0\,; \quad k = 1, 2, \ldots, n - 1\,,\\
Z_{k0} &= \varepsilon_{k0} + \zeta_{k0}(z - z_k)\,; \quad k = 1, 2, \ldots, n - 1\,,\\
Z_{n\nu} &= \varepsilon_{n\nu} \operatorname{sh} \nu(z_{n+1} - z) + \zeta_{n\nu} \operatorname{ch} \nu(z_{n+1} - z)\,, \quad \nu > 0\,,\\
Z_{n0} &= \varepsilon_{n0}(z_{n+1} - z) + \zeta_{n0}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

a podotkněme, že obecné integrační konstanty jsou vesměs závislé na všech čtyřech parametrech λ, μ, ξ, a η, t. j. že

$$\begin{gathered}
\alpha_{k\lambda} = \alpha_{k\lambda}(\lambda, \mu; \xi, \eta), \ldots, \zeta_{n\nu} = \zeta_{n\nu}\,(\lambda, \mu; \xi, \eta),\\
\lambda \geqq 0\,, \quad \mu \geqq 0\,, \quad -\infty < \xi, \eta < +\infty\,.
\end{gathered} \tag{3.7}$$

Zdůrazněme ještě, že pokud zde a kdykoli v dalším užíváme symbolu ν jako indexu, máme vždy míti na mysli určitou dvojici hodnot parametrů λ a μ vzhledem k závislosti $\nu = \nu(\lambda, \mu)$.

Z podmínky (2.1) vychází

$$\zeta_{n\nu} = 0\,, \quad \nu \geqq 0\,. \tag{3.8}$$

4. Důsledky podmínky (1.3)

Partikulární integrály, vyhovující zatím podmínkám (1.1) a (2.1), mají tvar

$$\begin{gathered}
v_k = v_k(x, y, z; \lambda, \mu; \xi, \eta) = X_{k\lambda} Y_{k\mu} Z_{k\nu}\,,\\
\lambda \geqq 0\,, \quad \mu \geqq 0\,, \quad \nu \geqq 0\,, \quad -\infty < \xi, \eta < +\infty\,; \quad k = 1, 2, \ldots, n\,,
\end{gathered} \tag{4.1}$$

funkce $X_{k\lambda}$, $Y_{k\mu}$ a $Z_{k\nu}$ jsou určeny vzorci (3.6) a vztahem (3.8). Během dalšího postupu budeme sledovat vliv požadavku (1.3) na koeficienty $\alpha_{k\lambda}, \ldots, \zeta_{k\nu}$, a to odděleně podle povahy integrálů pro jednotlivé hodnoty parametrů λ a μ. Buď nejprve

α) $\lambda > 0\,, \quad \mu > 0\,, \quad (\nu > 0)\,.$

V tomto úseku provedeme převážnou část celé naší práce.

Dosaďme partikulární integrály $v_k(x, y, z; \lambda, \mu; \xi, \eta)$ ze vztahu (4.1) jednak do prvé z podmínek (1.3), jednak do nového vztahu, který získáme z těchto podmínek vyloučením rozdílu $u_k - u_{k+1}$. Obdržíme rovnice

$$\left.\begin{aligned} &X_{k\lambda}Y_{k\mu}Z'_{k\nu} + h_{k+1}(X_{k\lambda}Y_{k\mu}Z_{k\nu} - X_{k+1,\lambda}Y_{k+1,\mu}Z_{k+1,\nu}) = 0\,,\\ &h'_{k+1}X_{k\lambda}Y_{k\mu}Z'_{k\nu} - h_{k+1}X_{k+1,\lambda}Y_{k+1,\mu}Z'_{k+1,\nu} = 0\,, \end{aligned}\right\} k = 1, 2, \ldots, n-1. \quad (4.2)$$

Dosadíme-li dále do těchto rovnic příslušné výrazy ze vztahů (3.6), vychází

$$\begin{gathered} \nu[\alpha_{k\lambda}\cos\lambda(\xi - x) + \beta_{k\lambda}\sin\lambda(\xi - x)][\gamma_{k\mu}\cos\mu(\eta - y) + \\ + \delta_{k\mu}\sin\mu(\eta - y)][\varepsilon_{k\nu}\operatorname{sh}\nu(z_{k+1} - z_k) + \zeta_{k\nu}\operatorname{ch}\nu(z_{k+1} - z_k)] + \\ + h_{k+1}\{[\alpha_{k\lambda}\cos\lambda(\xi - x) + \beta_{k\lambda}\sin\lambda(\xi - x)][\gamma_{k\mu}\cos\mu(\eta - y) + \\ + \delta_{k\mu}\sin\mu(\eta - y)][\varepsilon_{k\nu}\operatorname{ch}\nu(z_{k+1} - z_k) + \zeta_{k\nu}\operatorname{sh}\nu(z_{k+1} - z_k)] - \\ - [\alpha_{k+1,\lambda}\cos\lambda(\xi - x) + \beta_{k+1,\lambda}\sin\lambda(\xi - x)][\gamma_{k+1,\mu}\cos\mu(\eta - y) + \\ + \delta_{k+1,\mu}\sin\mu(\eta - y)]\,\varepsilon_{k+1,\nu}\} = 0\,; \quad k = 1, 2, \ldots, n-2\,, \end{gathered} \tag{4.3}$$

$$\begin{gathered} h'_{k+1}[\alpha_{k\lambda}\cos\lambda(\xi - x) + \beta_{k\lambda}\sin\lambda(\xi - x)][\gamma_{k\mu}\cos\mu(\eta - y) + \\ + \delta_{k\mu}\sin\mu(\eta - y)][\varepsilon_{k\nu}\operatorname{sh}\nu(z_{k+1} - z_k) + \zeta_{k\nu}\operatorname{ch}\nu(z_{k+1} - z_k)] - \\ - h_{k+1}[\alpha_{k+1,\lambda}\cos\lambda(\xi - x) + \beta_{k+1,\lambda}\sin\lambda(\xi - x)][\gamma_{k+1,\mu}\cos\mu(\eta - y) + \\ + \delta_{k+1,\mu}\sin\mu(\eta - y)]\,\zeta_{k+1,\nu} = 0\,; \quad k = 1, 2, \ldots, n-2\,; \end{gathered} \tag{4.4}$$

$$\begin{gathered} \nu[\alpha_{n-1,\lambda}\cos\lambda(\xi - x) + \beta_{n-1,\lambda}\sin\lambda(\xi - x)][\gamma_{n-1,\mu}\cos\mu(\eta - y) + \\ + \delta_{n-1,\nu}\sin\mu(\eta - y)][\varepsilon_{n-1,\nu}\operatorname{sh}\nu(z_n - z_{n-1}) + \zeta_{n-1,\nu}\operatorname{ch}\nu\,(z_n - z_{n-1})] + \\ + h_n\{[\alpha_{n-1,\lambda}\cos\lambda(\xi - x) + \beta_{n-1,\lambda}\sin\lambda\,(\xi - x)][\gamma_{n-1,\mu}\cos\mu(\eta - y) + \\ + \delta_{n-1,\mu}\sin\mu(\eta - y)][\varepsilon_{n-1,\nu}\operatorname{ch}\nu(z_n - z_{n-1}) + \zeta_{n-1,\nu}\operatorname{sh}\nu(z_n - z_{n-1})] - \\ - [\alpha_{n\lambda}\cos\lambda(\xi - x) + \beta_{n\lambda}\sin\lambda(\xi - x)][\gamma_{n\mu}\cos\mu(\eta - y) + \\ + \delta_{n\mu}\sin\mu(\eta - y)]\,\varepsilon_{n\nu}\operatorname{sh}\nu(z_{n+1} - z_n)\} = 0\,, \end{gathered} \tag{4.5}$$

$$\begin{gathered} h'_n[\alpha_{n-1,\lambda}\cos\lambda(\xi - x) + \beta_{n-1,\lambda}\sin\lambda(\xi - x)][\gamma_{n-1,\mu}\cos\mu(\eta - y) + \\ + \delta_{n-1,\mu}\sin\mu(\eta - y)][\varepsilon_{n-1,\nu}\operatorname{sh}\nu(z_n - z_{n-1}) + \zeta_{n-1,\nu}\operatorname{ch}\nu(z_n - z_{n-1})] + \\ + h_n[\alpha_{n\lambda}\cos\lambda(\xi - x) + \beta_{n\lambda}\sin\lambda(\xi - x)][\gamma_{n\mu}\cos\mu(\eta - y) + \\ + \delta_{n\mu}\sin\mu(\eta - y)]\,\varepsilon_{n\nu}\operatorname{ch}\nu(z_{n+1} - z_n) = 0\,. \end{gathered} \tag{4.6}$$

Ve vztazích (4.4) a (4.6) bylo kráceno nenulovým faktorem ν.

Protože tyto vztahy musí být splněny identicky vzhledem k x i y, plyne odtud, že čtyři výsledné koeficienty při členech, obsahujících činitele

$$\begin{aligned} &\cos\lambda(\xi - x)\cos\mu(\eta - y)\,, \quad \cos\lambda(\xi - x)\sin\mu(\eta - y)\,,\\ &\sin\lambda(\xi - x)\cos\mu(\eta - y)\,, \quad \sin\lambda(\xi - x)\sin\mu(\eta - y)\,, \end{aligned} \tag{4.7}$$

musí být všechny nulové. Výrazy $X_{k\lambda}$ resp. $Y_{k\mu}$ jsou však lineárními formami svých koeficientů $\alpha_{k\lambda}$ a $\beta_{k\lambda}$ resp. $\gamma_{k\mu}$ a $\delta_{k\mu}$, proto stačí zabývat se výsledným koeficientem při jediném z výrazů (4.7), ku př. při prvním z nich, a analogické vztahy pro ostatní získat formálně postupnou záměnou znaků $\alpha_{k\lambda}$, $\gamma_{k\mu}$ za znaky $\alpha_{k\lambda}$, $\delta_{k\mu}$ resp. $\beta_{k\lambda}$, $\gamma_{k\mu}$ resp. $\beta_{k\lambda}$, $\delta_{k\mu}$. Můžeme proto vztahy (4.3) — (4.6) nahradit pouze rovnicemi

$$\begin{aligned} &\nu\alpha_{k\lambda}\gamma_{k\mu}[\varepsilon_{k\nu}\operatorname{sh}\nu(z_{k+1} - z_k) + \zeta_{k\nu}\operatorname{ch}\nu(z_{k+1} - z_k)] + h_{k+1}\{\alpha_{k\lambda}\gamma_{k\mu}[\varepsilon_{k\nu}\operatorname{ch}\nu(z_{k+1} - z_k) +\\ &\quad + \zeta_{k\nu}\operatorname{sh}\nu(z_{k+1} - z_k)] - \alpha_{k+1,\lambda}\gamma_{k+1,\mu}\varepsilon_{k+1,\nu}\} = 0\,; \quad k = 1, 2, \ldots, n-2, \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} &h'_{k+1}\alpha_{k\lambda}\gamma_{k\mu}[\varepsilon_{k\nu}\operatorname{sh}\nu(z_{k+1} - z_k) + \zeta_{k\nu}\operatorname{ch}\nu(z_{k+1} - z_k)] -\\ &\quad - h_{k+1}\alpha_{k+1,\lambda}\gamma_{k+1,\mu}\zeta_{k+1,\nu} = 0\,; \quad k = 1, 2, \ldots, n-2\,; \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} &\nu\alpha_{n-1,\lambda}\gamma_{n-1,\mu}[\varepsilon_{n-1,\nu}\operatorname{sh}\nu(z_n - z_{n-1}) + \zeta_{n-1,\nu}\operatorname{ch}\nu(z_n - z_{n-1})] +\\ &\quad + h_n\{\alpha_{n-1,\lambda}\gamma_{n-1,\mu}[\varepsilon_{n-1,\nu}\operatorname{ch}\nu(z_n - z_{n-1}) +\\ &\quad + \zeta_{n-1,\nu}\operatorname{sh}\nu(z_n - z_{n-1})] - \alpha_{n\lambda}\gamma_{n\mu}\varepsilon_{n\nu}\operatorname{sh}\nu(z_{n+1} - z_n)\} = 0\,, \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} &h'_n\alpha_{n-1,\lambda}\gamma_{n-1,\mu}[\varepsilon_{n-1,\nu}\operatorname{sh}\nu(z_n - z_{n-1}) + \zeta_{n-1,\nu}\operatorname{ch}\nu(z_n - z_{n-1})] +\\ &\quad + h_n\alpha_{n\lambda}\gamma_{n\mu}\varepsilon_{n\nu}\operatorname{ch}\nu(z_{n+1} - z_n) = 0\,. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Z této poslední rovnice vypočteme nejdříve součin

$$\begin{aligned} h_n\alpha_{n\lambda}\gamma_{n\mu}\varepsilon_{n\nu} = &- h'_n\frac{\operatorname{sh}\nu(z_n - z_{n-1})}{\operatorname{ch}\nu(z_{n+1} - z_n)}\alpha_{n-1,\lambda}\gamma_{n-1,\mu}\varepsilon_{n-1,\nu} -\\ &- h'_n\frac{\operatorname{ch}\nu(z_n - z_{n-1})}{\operatorname{ch}\nu(z_{n+1} - z_n)}\alpha_{n-1,\lambda}\gamma_{n-1,\mu}\zeta_{n-1,\nu}\,, \end{aligned} \tag{4.12}$$

odtud a ze vztahu (4.10) pak závislost mezi činiteli $\alpha_{n-1,\lambda}\gamma_{n-1,\mu}\varepsilon_{n-1,\nu}$ a $\alpha_{n-1,\lambda}\gamma_{n-1,\mu}\zeta_{n-1,\nu}$ ve tvaru

$$\alpha_{n-1,\lambda}\gamma_{n-1,\mu}\zeta_{n-1,\nu} = q_{n-1,\nu}\alpha_{n-1,\lambda}\gamma_{n-1,\mu}\varepsilon_{n-1,\nu}\,, \tag{4.13}$$

$$q_{n-1,\nu} = -\frac{h_n\operatorname{ch}\nu(z_n - z_{n-1}) + [\nu + h'_n\operatorname{th}\nu(z_{n+1} - z_n)]\operatorname{sh}\nu(z_n - z_{n-1})}{[\nu + h'_n\operatorname{th}\nu(z_{n+1} - z_n)]\operatorname{ch}\nu(z_n - z_{n-1}) + h_n\operatorname{sh}\nu(z_n - z_{n-1})}\,. \tag{4.14}$$

Přihlédneme-li k této závislosti, dostaneme z rovnic (4.8) a (4.9) po krátkém výpočtu podobnou závislost

$$\alpha_{k\lambda}\gamma_{k\mu}\zeta_{k\nu} = q_{k\nu}\alpha_{k\lambda}\gamma_{k\mu}\varepsilon_{k\nu}\,; \quad k = 1, 2, \ldots, n-2\,, \tag{4.15}$$

v níž

$$\begin{aligned} q_{k\nu} = -\frac{h_{k+1}q_{k+1,\nu}\operatorname{ch}\nu(z_{k+1} - z_k) + (\nu q_{k+1,\nu} - h'_{k-1})\operatorname{sh}\nu(z_{k+1} - z_k)}{(\nu q_{k+1,\nu} - h'_{k+1})\operatorname{ch}\nu(z_{k+1} - z_k) + h_{k+1}q_{k+1,\nu}\operatorname{sh}\nu(z_{k+1} - z_k)}\,;&\\ k = 1, 2, \ldots, n-2\,.& \end{aligned} \tag{4.16}$$

Použijeme-li dále vyjádření (4.15) v rovnici (4.9), dostaneme vztah

$$h'_{k+1}[\operatorname{sh} \nu(z_{k+1} - z_k) + q_{k\nu} \operatorname{ch} \nu(z_{k+1} - z_k)]\, \alpha_{k\lambda}\gamma_{k\mu}\varepsilon_{k\nu} - \\ - h_{k+1}q_{k+1,\nu}\alpha_{k+1,\lambda}\gamma_{k+1,\mu}\varepsilon_{k+1,\nu} = 0 \,; \quad k = 1, 2, \ldots, n-2 \,, \tag{4.17}$$

z něhož vyplývá závislost součinu $\alpha_{k+1,\lambda}\gamma_{k+1,\mu}\varepsilon_{k+1,\nu}$ na součinu $\alpha_{k\lambda}\gamma_{k\mu}\varepsilon_{k\nu}$ ve tvaru

$$\alpha_{k+1,\lambda}\gamma_{k+1,\mu}\varepsilon_{k+1,\nu} = \varkappa_{k+1,\nu}\alpha_{k\lambda}\gamma_{k\mu}\varepsilon_{k\nu} \,; \quad k = 1, 2, \ldots, n-2 \,, \tag{4.18}$$

$$h_{k+1}q_{k+1,\nu}\varkappa_{k+1,\nu} = h'_{k+1}q_{k\nu} \operatorname{ch} \nu(z_{k+1} - z_k) + h'_{k+1} \operatorname{sh} \nu(z_{k+1} - z_k) \,; \\ k = 1, 2, \ldots, n-2 \,. \tag{4.19}$$

Zaveďme ještě ve vztahu (4.12) označení

$$\alpha_{n\lambda}\gamma_{n\mu}\varepsilon_{n\nu} = \varkappa_{n\nu}\alpha_{n-1,\lambda}\gamma_{n-1,\mu}\varepsilon_{n-1,\nu} \,, \tag{4.20}$$

$$h_n\varkappa_{n\nu} \operatorname{ch} \nu(z_{n+1} - z_n) = - h'_n q_{n-1,\nu} \operatorname{ch} \nu(z_n - z_{n-1}) - h'_n \operatorname{sh} \nu(z_n - z_{n-1}) \tag{4.21}$$

a položme konečně

$$p_{k\nu} = \varkappa_{1\nu}\varkappa_{2\nu} \ldots \varkappa_{k\nu} \,, \quad \varkappa_{1\nu} = 1 \,; \quad k = 1, 2, \ldots, n \,. \tag{4.22}$$

Lze nyní psáti

$$\alpha_{k\lambda}\gamma_{k\mu}\varepsilon_{k\nu} = p_{k\nu}\alpha_{1\lambda}\gamma_{1\mu}\varepsilon_{1\nu} \,; \quad k = 1, 2, \ldots, n \,. \tag{4.23}$$

Poznamenejme při této příležitosti, že při znalosti koeficientů $p_{k\nu}$ by z poměrů v první vrstvě bylo již možno určit poměry v libovolné další vrstvě, což ostatně odpovídá naší současné situaci při řešení prvního částečného problému. Bylo již totiž použito jak podmínky (2.1), týkající se horního okraje desky, tak podmínky (1.3), jíž jsme vzali v úvahu vliv přestupu tepla na všech styčných rovinách jednotlivých vrstev. Za těchto okolností bude o teplotních poměrech v první vrstvě — a tedy i v dalších — rozhodovat rozdělení teploty na spodní okrajové stěně, což vskutku odpovídá dosud nepoužité podmínce (1.2). K tomu však přistoupíme až později.

Po této orientační poznámce si všimněme určenosti jednotlivých zavedených koeficientů a způsobu jejich výpočtu.

Vzorce (4.14) a (4.16) dovolují vypočítat postupně činitele $q_{n-1,\nu}, q_{n-2,\nu}, \ldots$ $\ldots, q_{2\nu}, q_{1\nu}$ v závislosti na daných konstantách problému. Dále pak můžeme ze vzorců (4.19) a (4.21) určit koeficienty $\varkappa_{2\nu}, \varkappa_{3\nu}, \ldots, \varkappa_{n\nu}$ a tedy také podle (4.22) konstanty $p_{1\nu}, p_{2\nu}, \ldots, p_{n\nu}$. Vidíme odtud, že lze pomocí dosud obecného součinu $\alpha_{1\lambda}\gamma_{1\mu}\varepsilon_{1\nu}$ vyjádřit všechny součiny s činitelem $\alpha_{k\lambda}\gamma_{k\mu}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), které se v obecných integrálech (3.6) vyskytují.

Přihlédneme-li ještě k poznámce za vztahem (4.7), shledáme, že je možné partikulární integrály $v_k(x, y, z; \lambda, \mu; \xi, \eta)$ ze vztahu (4.1), které nyní splňují podmínky (1.1), (1.3) a (2.1), vyjádřit — pro případ kladných hodnot parametrů λ a μ — ve tvaru

$$v_k(x, y, z; \lambda, \mu; \xi, \eta) = X_{k\lambda} Y_{k\mu} \varepsilon_{k\nu} [\mathrm{ch}\, \nu(z - z_k) + q_{k\nu} \,\mathrm{sh}\, \nu(z - z_k)] =$$
$$= p_{k\nu} \frac{\mathrm{ch}\, \nu(z - z_k) + q_{k\nu} \,\mathrm{sh}\, \nu(z - z_k)}{\mathrm{ch}\, \nu(z - z_1) + q_{1\nu} \,\mathrm{sh}\, \nu(z - z_1)} v_1(x, y, z; \lambda, \mu; \xi, \eta) ,$$
$$-\infty < x, y < +\infty , \quad z_k < z < z_{k+1} ; \quad \lambda > 0 , \ \mu > 0 , \ \nu > 0 ;$$
$$-\infty < \xi, \eta < +\infty ; \quad k = 1, 2, \ldots, n - 1 \tag{4.24}$$

a podobně

$$v_n(x, y, z; \lambda, \mu; \xi, \eta) = X_{n\lambda} Y_{n\mu} \varepsilon_{n\nu} \,\mathrm{sh}\, \nu(z_{n+1} - z) =$$
$$= p_{n\nu} \frac{\mathrm{sh}\, \nu(z_{n+1} - z)}{\mathrm{ch}\, \nu(z - z_1) + q_{1\nu} \,\mathrm{sh}\, \nu(z - z_1)} v_1(x, y, z; \lambda, \mu; \xi, \eta) ,$$
$$-\infty < x, y < +\infty , \quad z_n < z < z_{n+1} ; \quad \lambda > 0 , \ \mu > 0 , \ \nu > 0 ;$$
$$-\infty < \xi, \eta < +\infty . \tag{4.25}$$

Buď dále

β) $\lambda > 0 , \quad \mu = 0 \quad (\nu = \lambda)$.

V tomto případě můžeme postupovat naprosto stejně jako v případě předchozím a proto upozorníme pouze na některé význačnější skutečnosti.

Zásadně je nutno nahradit každé ν znakem λ. Ve vztazích (4.3) — (4.6) je třeba faktory $Y_{k\mu}$ nahradit novými Y_{k0} podle (3.6). Další postup se již zcela shoduje s předchozím, vede k činitelům $q_{k\lambda}$ a $p_{k\lambda}$, definovaným týmiž vzorci jako dříve. Zůstávají tedy v platnosti i výsledky (4.24) a (4.25) pro partikulární integrály $v_k(x, y, z; \lambda, \mu; \xi, \eta)$; $k = 1, 2, \ldots, n$, kam stačí dosadit $\mu = 0$ a $\nu = \lambda$. Protože je náš problém souměrný vzhledem k x a y, platí obdobná poznámka i pro případ

γ) $\lambda = 0 , \quad \mu > 0 \quad (\nu = \mu)$,

jímž se proto nebudeme zvláště zabývati. Jako skutečně výjimečný se ukazuje teprve poslední případ

δ) $\lambda = 0 , \quad \mu = 0 \quad (\nu = 0)$,

jehož je nutno si všimnouti podrobněji.

Nahraďme ve vztazích (4.3) — (4.6) faktory $X_{k\lambda}$, $Y_{k\mu}$, $Z_{k\nu}$ postupně novými X_{k0}, Y_{k0}, Z_{k0} podle vzorců (3.6) a postupujme obdobně i při dalších výpočtech. Následující rovnice, které získáme nejprve, jsou analogické ke vztahům (4.8) až (4.11):

$$\alpha_{k0}\gamma_{k0}\zeta_{k0} + h_{k+1}\{\alpha_{k0}\gamma_{k0}[\varepsilon_{k0} + \zeta_{k0}(z_{k+1} - z_k)] -$$
$$- \alpha_{k+1,0}\gamma_{k+1,0}\varepsilon_{k+1,0}\} = 0 ; \quad k = 1, 2, \ldots, n - 2 , \tag{4.26}$$

$$h'_{k+1}\alpha_{k0}\gamma_{k0}\zeta_{k0} - h_{k+1}\alpha_{k+1,0}\gamma_{k+1,0}\zeta_{k+1,0} = 0 ; \quad k = 1, 2, \ldots, n - 2 ; \tag{4.27}$$

$$\alpha_{n-1,0}\gamma_{n-1,0}\zeta_{n-1,0} + h_n\{\alpha_{n-1,0}\gamma_{n-1,0}[\varepsilon_{n-1,0} + \zeta_{n-1,0}(z_n - z_{n-1})] -$$
$$- \alpha_{n0}\gamma_{n0}\varepsilon_{n0}(z_{n+1} - z_n)\} = 0 \,, \tag{4.28}$$

$$h_n'\alpha_{n-1,0}\gamma_{n-1,0}\zeta_{n-1,0} + h_n\alpha_{n0}\gamma_{n0}\varepsilon_{n0} = 0 \,. \tag{4.29}$$

Z posledních dvou rovnic plynou dále vztahy

$$\alpha_{n-1,0}\gamma_{n-1,0}\zeta_{n-1,0} = q_{n-1,0}\alpha_{n-1,0}\gamma_{n-1,0}\varepsilon_{n-1,0} \,, \tag{4.30}$$

$$q_{n-1,0} = -\frac{h_n}{1 + h_n'(z_{n+1} - z_n) + h_n(z_n - z_{n-1})} \tag{4.31}$$

a podobně z rovnic (4.26) a (4.27) při

$$\alpha_{k0}\gamma_{k0}\zeta_{k0} = q_{k0}\alpha_{k0}\gamma_{k0}\varepsilon_{k0} \,; \quad k = 1, 2, \ldots, n-2 \tag{4.32}$$

s ohledem na (4.30) vychází

$$q_{k0}q_{k+1,0} + h_{k+1}q_{k+1,0}[1 + q_{k0}(z_{k+1} - z_k)] - h'_{k+1}q_{k0} = 0 \,, \tag{4.33}$$

odkud

$$q_{k0} = -\frac{h_{k+1}q_{k+1,0}}{q_{k+1,0} - h'_{k+1} + h_{k+1}q_{k+1,0}(z_{k+1} - z_k)} \,; \quad k = 1, 2, \ldots, n-2 \,. \tag{4.34}$$

Definujme faktory $\varkappa_{k0}$ rovněž vztahy

$$\alpha_{k+1,0}\gamma_{k+1,0}\varepsilon_{k+1,0} = \varkappa_{k+1,0}\alpha_{k0}\gamma_{k0}\varepsilon_{k0} \,; \quad k = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{4.35}$$

a položme

$$p_{k0} = \varkappa_{10}\varkappa_{20} \ldots \varkappa_{k0} \,, \quad \varkappa_{10} = 1 \,; \quad k = 1, 2, \ldots, n \,. \tag{4.36}$$

Podle rovnic (4.27) a (4.29) je

$$h_{k+1}q_{k+1,0}\varkappa_{k+1,0} = h'_{k+1}q_{k0} \,; \quad k = 1, 2, \ldots, n-2 \,, \tag{4.37}$$

$$h_n\varkappa_{n0} = - h_n'q_{n-1,0} \,. \tag{4.38}$$

Příslušné partikulární integrály mají tvar

$$\begin{aligned} v_k(x, y, z; 0, 0;, \xi, \eta) &= X_{k0}Y_{k0}\varepsilon_{k0}[1 + q_{k0}(z - z_k)] = \\ &= p_{k0}\frac{1 + q_{k0}(z - z_k)}{1 + q_{10}(z - z_1)} v_1(x, y, z; 0, 0; \xi, \eta) \,, \\ -\infty < x, y < +\infty \,, \quad & z_k < z < z_{k+1} \,; \quad \lambda = 0 \,, \ \mu = 0 \,; \\ -\infty < \xi, \eta < +\infty \,; \quad & k = 1, 2, \ldots, n-1 \,, \end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned} v_n(x, y, z; 0, 0; \xi, \eta) &= X_{n0}Y_{n0}\varepsilon_{n0}(z_{n+1} - z) = \\ &= p_{n0}\frac{z_{n+1} - z}{1 + q_{10}(z - z_1)} v_1(x, y, z; 0, 0; \xi, \eta) \,, \\ -\infty < x, y < +\infty \,, \quad & z_n < z < z_{n+1} \,; \quad \lambda = 0 \,, \ \mu = 0 \,; \\ & -\infty < \xi, \eta < +\infty \,. \end{aligned} \tag{4.40}$$

5. Vlastnosti a vzájemná souvislost získaných částečných řešení

Všimněme si nejprve, že pro všechna $\nu \geq 0$ a pro všechna $k = 1, 2, \ldots, n - 1$ jsou koeficienty $q_{k\nu}$ konečné a záporné[1]), dále že všechna $\varkappa_{k\nu}$ a $p_{k\nu}(\nu \geq 0$; $k = 1, 2, \ldots, n)$ jsou konečná, obojí nezávisle na ξ a η. Připomeňme ještě, že libovolným dvěma dvojicím λ_1, μ_1 a λ_2, μ_2 nezáporných hodnot parametrů λ a μ, pro něž $\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2} = \sqrt{\lambda_2^2 + \mu_2^2} = \nu$, přísluší tytéž koeficienty $q_{k\nu}$, $\varkappa_{k\nu}$ a $p_{k\nu}$, které jsou tedy funkcemi jedné nezávisle proměnné ν, a to funkcemi spojitými. Obraťme nyní s ohledem na pozdější potřebu svůj zřetel na chování jednotlivých částečných řešení (4.24) a (4.25), platných pro $\nu > 0$, jednak při $\nu \to 0+$, jednak při $\nu \to +\infty$, kde je možno vzhledem k povaze vyskytujících se výrazů očekávat určité singularity. Stanovme nejprve limitu těchto řešení při

α) $\nu \to 0+$.

Zaveďme za tím účelem označení

$$V_k(\lambda, \mu) = v_k(x, y, z; \lambda, \mu; \xi, \eta)\,, \quad \lambda \geq 0\,, \quad \mu \geq 0\,; \quad k = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{5.1}$$

kde výraz na pravé straně rovnice je shodný s výrazem ze vztahu (4.1) a dokažme, že za určitého předpokladu platí mezi řešeními (4.24), (4.25) a (4.39), (4.40) případů α) $(\lambda > 0, \mu > 0)$ a δ) $(\lambda = 0, \mu = 0)$ z předchozího odstavce, jakkoli se tato řešení od sebe formálně liší, tato souvislost:

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0+ \\ \mu \to 0+}} V_k(\lambda, \mu) = V_k(0, 0)\,; \quad k = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{5.2}$$

Je přitom zřejmé, že není nutno zmiňovati se zvláště o případech β) a γ), které mohou být prakticky zahrnuty do případu α).

Protože limitní procesy $\lambda \to 0+$, $\mu \to 0+$ (současně a na sobě nezávisle) a $\nu \to 0+$ mají v našem případě tytéž důsledky, budeme všude v následujícím užívat přehlednějšího značení $\nu \to 0$ s vědomím, že jde o blížení v definičním oboru parametru ν, t. j. zprava.

Podle (4.24) a (4.25) je

$$\lim_{\nu \to 0} V_k(\lambda, \mu) = \lim_{\nu \to 0} p_{k\nu} \frac{\operatorname{ch} \nu(z - z_k) + q_{k\nu} \operatorname{sh} \nu(z - z_k)}{\operatorname{ch} \nu(z - z_1) + q_{1\nu} \operatorname{sh} \nu(z - z_1)} V_1(\lambda, \mu)\,;$$
$$k = 1, 2, \ldots, n - 1\,, \tag{5.3}$$

$$\lim_{\nu \to 0} V_n(\lambda, \mu) = \lim_{\nu \to 0} p_{n\nu} \frac{\operatorname{sh} \nu(z_{n+1} - z)}{\operatorname{ch} \nu(z - z_1) + q_{1\nu} \operatorname{sh} \nu(z - z_1)} V_1(\lambda, \mu)\,. \tag{5.4}$$

K limitování těchto výrazů potřebujeme znát následující limitní vztahy. Vzniknou (případně po malé úpravě) limitováním vzorců:

---

[1]) Můžeme to dokázat úplnou indukcí pomocí vzorce (4.16) se zřetelem k tomu, že $q_{n-1,\nu}$ je záporné.

(4.14) s přihlédnutím k (4.32)

$$\lim_{\nu\to 0} \nu q_{n-1,\nu} = -\frac{h_n}{1 + h'_n(z_{n+1} - z_n) + h_n(z_n - z_{n-1})} = q_{n-1,0} \tag{5.5}$$

(t. j. $q_{n-1,\nu} \cong \frac{1}{\nu} q_{n-1,0}$ při $\nu \to 0$; protože je $q_{n-1,0}$ konečné a záporné, má $q_{n-1,\nu}$ jako funkce parametru ν v bodě $\nu = 0$ pól 1. řádu s limitou $-\infty$);

(4.16) s ohledem na (4.34) — vztah lze vzhledem k předchozímu snadno dokázat metodou úplné indukce —

$$\lim_{\nu\to 0} \nu q_{k\nu} = -\frac{h_{k+1}q_{k+1,0}}{q_{k+1,0} - h'_{k+1} + h_{k+1}q_{k+1,0}(z_{k+1} - z_k)} = q_{k0};$$
$$k = 1, 2, \ldots, n-2 \tag{5.6}$$

(t. j. $q_{k\nu} \cong \frac{1}{\nu} q_{k0}$ při $\nu \to 0$; protože je q_{k0} konečné a záporné, má opět $q_{k\nu}$ jako funkce parametru ν v bodě $\nu = 0$ pól 1. řádu s limitou $-\infty$);

(4.19) s ohledem na (4.37)

$$\lim_{\nu\to 0} \varkappa_{k+1,\nu} = \frac{h'_{k+1}q_{k0}}{h_{k+1}q_{k+1,0}} = \varkappa_{k+1,0}\,; \quad k = 1, 2, \ldots, n-2 \tag{5.7}$$

(všechna $\varkappa_{k+1,0}$ jsou konečná a kladná);

(4.21) s ohledem na (4.38)

$$\lim_{\nu\to 0} \nu \varkappa_{n\nu} = -\frac{h'_n q_{n-1,0}}{h_n} = \varkappa_{n0} \tag{5.8}$$

(t. j. $\varkappa_{n\nu} \cong \frac{1}{\nu} \varkappa_{n0}$ při $\nu \to 0$; protože je $\varkappa_{n0}$ konečné a kladné, má $\varkappa_{n\nu}$ jako funkce parametru ν v bodě $\nu = 0$ pól 1. řádu s limitou $+\infty$);

(4.22) s přihlédnutím k předchozím dvěma vztahům a s ohledem na (4.36)

$$\lim_{\nu\to 0} p_{k\nu} = p_{k0}\,; \quad k = 1, 2, \ldots, n-1\,, \tag{5.9}$$

$$\lim_{\nu\to 0} \nu p_{n\nu} = p_{n0}\,. \tag{5.10}$$

Všechna p_{k0} i p_{n0} jsou zde konečná a kladná. K singularitě vede pouze $p_{n\nu} \cong \cong \frac{1}{\nu} p_{n0}$ při $\nu \to 0$; $p_{n\nu}$ má jako funkce parametru ν v bodě $\nu = 0$ pól 1. řádu s limitou $+\infty$.

Dosadíme-li právě získané hodnoty limit do vztahů (5.3) a (5.4) a porovnáme-li získané výsledky s výrazy (4.39) a (4.40), shledáváme, že stačí dokázat již jedině platnost vztahu

$$\lim_{\nu\to 0} V_1(\lambda, \mu) = V_1(0, 0)\,. \tag{5.11}$$

O jeho správnosti se můžeme snadno přesvědčiti ze vzorců (4.24) a (4.39), učiníme-li dodatečný předpoklad, že dosud neurčené faktory $X_{k\lambda} Y_{k\mu} \varepsilon_{k\nu}$ vyhovují podmínce

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0+ \\ \mu \to 0+}} X_{k\lambda} Y_{k\mu} \varepsilon_{k\nu} = X_{k0} Y_{k0} \varepsilon_{k0} \; ; \quad k = 1, 2, \ldots, n \, . \tag{5.12}$$

Můžeme nyní souhrnně říci, že částečná řešení z odstavce 4, δ) ($\lambda = 0, \mu = 0$) je možno považovat za limitní případ částečných řešení z odstavce 4, α) ($\lambda > 0$, $\mu > 0$), je-li splněn požadavek (5.12). Této skutečnosti později použijeme.

Sledujme nakonec zbývající limitu při

β) $\nu \to +\infty$.

Označme při podobné záměně limitního procesu jako v předchozím případě

$$\lim_{\nu \to +\infty} V_k(\lambda, \mu) = V_{k\infty} \; ; \quad k = 1, 2, \ldots, n \, . \tag{5.13}$$

Abychom mohli sledovati povahu této limity, stanovme podle příslušných vzorců nejprve

$$\lim_{\nu \to +\infty} q_{k\nu} = -1 \; ; \quad k = 1, 2, \ldots, n-1 \, , \tag{5.14}$$

$$\lim_{\nu \to +\infty} \varkappa_{1\nu} = 1 \, , \quad \lim_{\nu \to +\infty} \varkappa_{k\nu} = 0 \; ; \quad k = 2, 3, \ldots, n \, , \tag{5.15}$$

$$\lim_{\nu \to +\infty} p_{1\nu} = 1 \, , \quad \lim_{\nu \to +\infty} p_{k\nu} = 0 \; ; \quad k = 2, 3, \ldots, n \, . \tag{5.16}$$

Na základě těchto hodnot je již ze vztahů (4.24) a (4.25) vidět, že k tomu, aby

$$V_{k\infty} = 0 \; ; \quad k = 1, 2, \ldots, n \, , \tag{5.17}$$

stačí, je-li

$$X_{1\lambda} Y_{1\mu} \varepsilon_{1\nu} = O\,[1] \quad \text{při} \quad \nu \to +\infty \tag{5.18}$$

(symbol $O\,[1]$ značí, že výraz na levé straně je pro dostatečně veliká ν omezený).

6. Výsledné řešení prvního částečného problému

Z výsledků předcházejících odstavců vyplývá, že partikulární řešení $v_k(x, y, z; \lambda, \mu; \xi, \eta)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ prvního částečného problému ze vztahu (5.1), vyhovující podmínkám (1.1), (1.3) a (2.1), mají při splněných požadavcích (5.12) a (5.18) tyto vlastnosti:

α) pro každou skupinu daných hodnot x, y, z, ξ a η, vzatých z příslušných oborů jednotlivých proměnných, jsou zmíněná řešení spojitými funkcemi obou proměnných parametrů λ a μ v oboru $0 \leqq \lambda, \mu < +\infty$ za předpokladu, že rovněž dosud neurčené obecné integrační konstanty $\alpha_{k\lambda}$, $\beta_{k\lambda}$, $\gamma_{k\mu}$, $\delta_{k\mu}$ a $\varepsilon_{k\nu}$ jsou rovněž spojitými funkcemi těchto parametrů v uvedeném oboru;

β) limitou řešení $v_k(x, y, z; \lambda, \mu; \xi, \eta)$, kde $\lambda > 0$ a $\mu > 0$, pro případ nezávislého blížení $\lambda \to 0+$ a $\mu \to 0+$ je opět partikulární řešení $v_k(x, y, z; 0, 0; \xi, \eta)$;

γ) všechna tato řešení jsou v oboru $0 \leqq \lambda, \mu < +\infty$ omezenými funkcemi obou parametrů λ a μ, vyhovujícími dokonce vztahům $\lim\limits_{\nu \to +\infty} v_k(x, y, z; \lambda, \mu; \xi, \eta) = 0$ nezávisle na způsobu limitování.

Abychom nyní splnili i zbývající podmínku (1.2), předpokládejme řešení $u^{(1)}$ prvního částečného problému ve tvaru

$$u_k^{(1)}(x, y, z) = \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_0^{+\infty} d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} v_k(x, y, z; \lambda, \mu; \xi, \eta)\, d\eta\,,$$
$$-\infty < x, \quad y < +\infty\,, \quad z_k < z < z_{k-1}\,; \quad k = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{6.1}$$

Omezíme se tu jen na takové funkce $v_k(x, y, z; \lambda, \mu; \xi, \eta)$, pro něž příslušná $u_k^{(1)}(x, y, z)$ splňují podmínku (1.1) a ukážeme, že mezi nimi existuje hledané řešení našeho problému. Za tohoto omezení vyhovují funkce $u_k^{(1)}(x, y, z)$ také požadavkům (1.3) a (2.1), jak se můžeme snadno přesvědčiti. Zbývá proto zřejmě v integrovaných funkcích $v_k(x, y, z; \lambda, \mu; \xi, \eta)$ stanovit dosud blíže neurčené koeficienty v činitelích $X_{k\lambda}Y_{k\mu}\varepsilon_{k\nu}$, které — jak bylo výše ukázáno — lze však všechny vyjádřit pomocí jediného činitele $X_{1\lambda}Y_{1\mu}\varepsilon_{1\nu}$. K určení tohoto činitele — a tím i příslušných integrandů $v_k(x, y, z; \lambda, \mu; \xi, \eta)$ — užijeme podmínky (1.2); z ní plyne

$$u_1^{(1)}(x, y, z_1) = \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_0^{+\infty} d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} v_1(x, y, z_1; \lambda, \mu; \xi, \eta)\, d\eta = f(x, y)\,,$$
$$-\infty < x, y < +\infty\,. \tag{6.2}$$

O funkci $f(x, y)$ jsme podle požadavku δ) 1. odstavce předpokládali, že existují vyjádření

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, y) \cos \lambda(\xi - x)\, d\xi =$$
$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \lambda(\xi - x)\, d\xi \int_0^{+\infty} d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) \cos \mu(\eta - y)\, d\eta\,,$$
$$-\infty < x, y < +\infty\,. \tag{6.3}$$

Dosadíme-li toto vyjádření do vztahu (5.2), porovnáme-li integrály na obou stranách a přihlédneme-li ke vztahu (4.24), vidíme, že stačí položit

$$v_1(x, y, z_1; \lambda, \mu; \xi, \eta) = X_{1\lambda}Y_{1\mu}\varepsilon_{1\nu} = \frac{1}{\pi^2} f(\xi, \eta) \cos \lambda(\xi - x) \cos \mu(\eta - y)\,,$$
$$-\infty < x, y < +\infty\,, \quad 0 < \lambda\,, \mu < +\infty\,, \quad -\infty < \xi, \eta < +\infty\,. \tag{6.4}$$

Odtud plyne, že pro uvedená λ, μ, ξ a η je

$$\alpha_{1\lambda}\gamma_{1\mu}\varepsilon_{1\nu} = \frac{1}{\pi^2} f(\xi, \eta) , \quad \beta_{1\lambda} = 0 , \quad \delta_{1\mu} = 0 . \tag{6.5}$$

Tyto koeficienty vůbec nezávisí na parametrech λ a μ, takže vyhovují požadavku (5.18). Dále je možno ve vztahu (6.5) zvolit hodnoty parametrů $\alpha_{1\lambda}, \gamma_{1\mu}$ a $\varepsilon_{1\nu}$ tak, že je splněn i předpoklad, uvedený pod znakem α) tohoto odstavce. Tento předpoklad mohou rovněž splňovat i ostatní koeficienty pro $k = 2, 3, \ldots, n$, jak se můžeme snadno přesvědčit (stačí zvolit na př. $\alpha_{k\lambda} = \gamma_{k\mu} = 1$; $k = 1, 2, \ldots, n$).

Dosadíme-li tento výsledek (6.5) do vztahů (4.24) a (4.25), můžeme již hledané řešení prvního částečného problému zapsat ve výsledném tvaru

$$\begin{gathered} u_k^{(1)}(x, y, z) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\lambda(\xi - x)\, \mathrm{d}\xi \int_0^{+\infty} p_{k\nu}\,[\mathrm{ch}\,\nu(z - z_k) + \\ + q_{k\nu}\, \mathrm{sh}\,\nu(z - z_k)]\, \mathrm{d}\mu \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) \cos\mu(\eta - y)\, \mathrm{d}\eta , \\ -\infty < x, y < +\infty , \quad z_k < z < z_{k+1} ; \quad k = 1, 2, \ldots, n - 1 , \end{gathered} \tag{6.6}$$

$$\begin{gathered} u_n^{(1)}(x, y, z) = \\ = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\lambda(\xi - x)\, \mathrm{d}\xi \int_0^{+\infty} p_{n\nu}\, \mathrm{sh}\,\nu(z_{n+1} - z)\, \mathrm{d}\mu \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) \,. \\ . \cos\mu(\eta - y)\, \mathrm{d}\eta , \quad -\infty < x, y < +\infty , \quad z_n < z < z_{n+1} . \end{gathered} \tag{6.7}$$

Koeficienty $p_{k\nu}$ a $q_{k\nu}$ zde vystupující jsou dány vzorci (4.22), (4.16) a (4.14).

Je však nutno se ještě zmínit o konvergenci získaných integrálů. Ve vzorci (6.4), z něhož jsme v právě provedeném závěru vyšli, nebyly totiž brány v úvahu nulové hodnoty parametrů λ a μ, tedy hodnoty dolních mezí příslušných integrálů. Důsledkem toho bylo, že se ve výsledných integrálech objevily koeficienty $p_{k\nu}$ a $q_{k\nu}$, definované výše zmíněnými vzorci z případu α) 4. odstavce. Protože k týmž vzorcům vedou i případy β) a γ) zmíněného odstavce, můžeme platnost vztahů (6.5) rozšířit i na nezáporné hodnoty parametrů λ a μ, pro něž není současně $\lambda = \mu = 0$. Zvláště je však nutno všimnouti si případu nyní vyloučeného. Jak jsme v 5. odstavci zjistili, mají totiž některé z výše uvedených koeficientů $p_{k\nu}$ a $q_{k\nu}$, definované vzorci (4.22), (4.16) a (4.14) v bodě $\lambda = \mu = 0$ póly 1. řádu. Rovněž v 5. odstavci jsme však dokázali, že všechny tyto singularity jsou vesměs odstranitelné. Rozšíříme-li proto platnost vztahu (6.5) i na tento případ, aby byla splněna podmínka (5.12), vyplývá již konvergence integrálů na pravých stranách vztahů (6.6) a (6.7) přímo z předpokládané existence vyjádření (6.3) a z vlastností α) až γ) integrovaných funkcí, jak byly uvedeny na počátku tohoto odstavce. Je tím současně řešení prvního částečného problému zcela uzavřeno.

D. Řešení druhého částečného problému a řešení výsledné

7. Řešení druhého částečného problému

Tento problém je určen vztahy (1.1), (2.2), (1.3) a (1.4). Tyto rovnice můžeme získati také postupně z rovnic (1.1), (2.1), (1.3) a (1.2) prvního částečného problému nahrazením některých veličin v něm se vyskytujících novými veličinami (zaměníme-li v nerovnosti pro z ve vztahu (1.1) současně její smysl) podle transformační matice

$$\begin{pmatrix} u_i^{(1)} , & z_j , & h_m , & h'_m , & f(x, y) \\ u_{n-i+1}^{(2)} , & z_{n-j+2} , & -h'_{n-m+2} , & -h_{n-m+2} , & F(x, y) \end{pmatrix} ;$$

$$i = 1, 2, \ldots, n , \quad j = 1, 2, \ldots, n + 1 ; \quad m = 2, 3, \ldots, n . \qquad (7.1)$$

Můžeme proto bezprostředně použíti výsledného řešení předchozího problému; stačí provést transformaci (7.1) ve vzorcích (6.6) a (6.7). Nahraďme ještě pro přehlednost veličiny $q_{k\nu}$, $\varkappa_{k\nu}$ a $p_{k\nu}$ v těchto vzorcích novými pomocí matice

$$\begin{pmatrix} q_{r\nu} , & \varkappa_{r\nu} , & \varkappa_{n\nu} , & p_{r\nu} , & p_{n\nu} \\ -\bar{q}_{n-r+1,\nu} , & \bar{\varkappa}_{n-r+1,\nu} , & -\bar{\varkappa}_{1\nu} , & \bar{p}_{n-r+1,\nu} , & -\bar{p}_{1\nu} \end{pmatrix} ;$$

$$r = 1, 2, \ldots, n - 1 . \qquad (7.2)$$

Nové koeficienty vypočteme pomocí transformací (7.1) a (7.2) ze vzorců (4.14), (4.16), (4.19), (4.21) a (4.22). Vychází

$$\bar{q}_{2\nu} = - \frac{h'_2 \operatorname{ch} \nu(z_3 - z_2) + [\nu + h_2 \operatorname{th} \nu(z_2 - z_1)] \operatorname{sh} \nu(z_3 - z_2)}{[\nu + h_2 \operatorname{th} \nu(z_2 - z_1)] \operatorname{ch} \nu(z_3 - z_2) + h'_2 \operatorname{sh} \nu(z_3 - z_2)} , \qquad (7.3)$$

$$\bar{q}_{k\nu} = - \frac{h'_k \bar{q}_{k-1,\nu} \operatorname{ch} \nu(z_{k+1} - z_k) + (\nu \bar{q}_{k-1,\nu} - h_k) \operatorname{sh} \nu(z_{k+1} - z_k)}{(\nu \bar{q}_{k-1,\nu} - h_k) \operatorname{ch} \nu(z_{k+1} - z_k) + h'_k \bar{q}_{k-1,\nu} \operatorname{sh} \nu(z_{k+1} - z_k)} ;$$

$$k = 3, 4, \ldots, n , \qquad (7.4)$$

$$h'_k \bar{q}_{k-1,\nu} \bar{\varkappa}_{k-1,\nu} = h_k \bar{q}_{k\nu} \operatorname{ch} \nu(z_{k+1} - z_k) + h_k \operatorname{sh} \nu(z_{k+1} - z_k) ; \quad k = 3, 4, \ldots, n , \qquad (7.5)$$

$$h'_2 \bar{\varkappa}_{1\nu} \operatorname{ch} \nu(z_2 - z_1) = - h_2 \bar{q}_{2\nu} \operatorname{ch} \nu(z_3 - z_2) - h_2 \operatorname{sh} \nu(z_3 - z_2) , \qquad (7.6)$$

$$\bar{p}_{k\nu} = \bar{\varkappa}_{n\nu} \bar{\varkappa}_{n-1,\nu} \ldots \bar{\varkappa}_{k\nu} , \quad \bar{\varkappa}_{n\nu} = 1 ; \quad k = 1, 2, \ldots, n . \qquad (7.7)$$

Řešení druhé částečné úlohy má tedy tvar

$$u_1^{(2)}(x, y, z) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \lambda(\xi - x) \, d\xi \int_0^{+\infty} \bar{p}_{1\nu} \operatorname{sh} \nu(z - z_1) \, d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, \eta) \cos \mu(\eta - y) \, d\eta ,$$

$$- \infty < x, y < + \infty , \quad z_1 < z < z_2 , \qquad (7.8)$$

$$u_k^{(2)}(x, y, z) = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_0^{+\infty} d\lambda \int\limits_{\infty}^{+\infty} \cos \lambda(\xi - x)\, d\xi \int\limits_0^{+\infty} \bar{p}_{k\nu}[\text{ch}\, \nu(z_{k+1} - z) +$$

$$+ \bar{q}_{k\nu}\, \text{sh}\, \nu(z_{k+1} - z)]\, d\mu \int\limits_{\infty}^{+\infty} F(\xi, \eta) \cos \mu(\eta - y)\, d\eta\,,$$

$$-\infty < x, y < +\infty\,, \quad z_k < z < z_{k+1}\,; \quad k = 2, 3, \ldots, n\,. \qquad (7.9)$$

Koeficienty $\bar{p}_{k\nu}$ a $\bar{q}_{k\nu}$ jsou určeny vzorci (7.7), (7.3) a (7.4).

8. Řešení původního problému (1.1)—(1.4)

Jak jsme se již ve 2. odstavci zmínili, získáme výsledné řešení $u(x, y, z)$ daného problému, určeného vztahy (1.1)—(1.4), superposicí jednotlivých řešení $u^{(1)}(x, y, z)$ a $u^{(2)}(x, y, z)$ obou částečných problémů podle vztahu (2.3). Má tedy toto řešení tvar

$$u_k(x, y, z) = u_k^{(1)}(x, y, z) + u_k^{(2)}(x, y, z)\,,$$

$$-\infty < x, y < +\infty\,, \quad z_k < z < z_{k+1}\,; \quad k = 1, 2, \ldots, n\,. \qquad (8.1)$$

Složky $u_k^{(1)}(x, y, z)$ resp. $u_k^{(2)}(x, y, z)$ jsou určeny vzorci (6.6) a (6.7) resp. (7.8) a (7.9).

9. Jednoznačnost řešení (8.1)

Ukažme si závěrem, že řešení (8.1), které jsme výše odvodili, je jediným řešením problému (1.1)—(1.4).

V každé vrstvě $z_k < z < z_{k+1}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) je podle (1.1) teplota $u_k(x, y, z)$ harmonickou funkcí. Je proto každá z těchto funkcí jednoznačně určena svými hodnotami $u_k(x, y, z_k)$ a $u_k(x, y, z_{k+1})$ na hranicích $z = z_k$ a $z = z_{k+1}$ příslušné vrstvy. Stačí tedy dokázat, že i tyto hraniční hodnoty existují pouze jediné. Předpokládejme proto, že vedle řešení u ze vztahu (8.1) známe ještě další řešení $\tilde{u}$ daného problému. Ukážeme, že toto řešení se nutně musí shodovat s naším řešením u. Musí být totiž pak rozdíl $U = u - \tilde{u}$ řešením problému určeného vztahy (1.1), (1.3) a podmínkami $U_1(x, y, z_1) = U_n(x, y, z_{n+1}) = 0$ ($-\infty < x, y < +\infty$). Protože tento problém má pouze triviální řešení $U = 0$ (v ustáleném stavu musí být extrémní teplota na hraničních stěnách), je $u = \tilde{u}$, čímž je jednoznačnost řešení (8.1) našeho původního problému zcela dokázána.

E. Závěr

Našimi výsledky je podáno theoretické řešení speciálního problému z vedení tepla, týkajícího se vedení tepla v deskách složených z více vrstev. Ačkoliv je v literatuře podáno řešení celé řady problémů toho druhu, není mi známo, že by tento problém byl již někde řešen.

Technický význam našeho problému je zřejmý již z jeho formulace. Výpočet integrálů ve výsledných vzorcích i v jednoduchých konkretních případech je ovšem velice pracný, takže prakticky jej lze provádět pouze s použitím moderních počitacích strojů.

LITERATURA

[1] *Klátil J.:* Ustálené teplotní pole v nekonečné rovinné desce ze dvou vrstev s obecným rozložením teploty na okrajových stěnách, Čs. Čas. Fys. 6 (1956), č. 4.

[2] *Jarník V.:* Integrální počet II, Praha 1955.

[3] *Carslaw H. S. — Jaeger J. C.:* Conduction of head in solids, Oxford 1947.

[4] *Соболев С. Л.:* Уравнения математической физики, Москва-Ленинград 1950.

Резюме

УРАВНОВЕШЕННОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В БЕСКОНЕЧНОЙ ДОСКЕ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ МНОГИХ СЛОЕВ, С ОБЩИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ТЕМПЕРАТУРЫ НА КРАЕВЫХ СТЕНКАХ

ИРЖИ КЛАТИЛ (Jiří Klátil)

(Поступило в редакцию 14/VI 1956 г.)

В работе выведены формулы для уравновешенной температуры в планпараллельной плоской доске, сложенной из n слоев, при условии, что на каждой из краевых стенок доски поддерживается одна и та же определенная (произвольная) температура и что между соседними слоями внутри доски осуществляется передача тепла. Работа является обобщением аналогичной проблемы для случая двух слоев, которую автор разрешил в своей работе [1].

Выберем по рис. 1 (на котором изображена лишь часть доски) координатную систему $0xyz$ прямоугольных прямолинейных координат x, y, z так, чтобы краевые плоскости доски имели в этой системе уравнения $z = z_1$ и $z = z_{n+1}$. Пусть при таком выборе k-тый слой ограничен плоскостями $z = z_k$ и $z = z_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ причем $z_1 < z_2 \ldots < z_k < z_{k+1} < \ldots < z_n < z_{n+1}$. Распределение температуры $u = u(x, y, z)$ в доске установим при следующих предположениях:

α) $u(x, y, z) = u_k(x, y, z)$, $-\infty < x, y < +\infty$, $z_k < z < z_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots,$ $\ldots, n$;

β) на нижней краевой стенке $z = z_1$ доски беспрерывно поддерживается температура $u_1(x, y, z_1) = f(x, y)$;

γ) аналогично и на верхней краевой стенке $z = z_{n+1}$ доски температура постоянна и равна $u_n(x, y, z_{n+1}) = F(x, y)$;

δ) функции $f(x, y)$ и $F(x, y)$ можно представить в виде интеграла Фурье относительно переменного x (соотв. y) при любом значении переменного y (соотв. x);

ε) на граничной плоскости между $(k-1)$-ым и k-тым слоем $(k = 2, 3, \ldots,$ $\ldots, n)$ осущесвляется передача тепла с коэффициентами h_k в направлении возрастающих ординат z, h'_k в направлении убывающих ординат z ($h_k > 0$, $h'_k > 0$). При этих обстоятельствах можно математическую формулировку проблемы записать в виде соотношений (1.1)—(1.4).

Решение u этой проблемы можно получить путем суперпозиции (2.3) решений $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ двух частичных проблем: первая из них охарактеризована условиями (1.1), (1.2), (1.3) и (2.1), а вторая — (1.1), (2.2), (1.3) и (1.4). Основательная часть работы посвящена нахождению функции $u^{(1)}(x, y, z)$, при помощи которой можно уже легко найти функцию $u^{(2)}(x, y, z)$ посредством преобразования (7.1).

При решении первой частичной проблемы ищем сначала частные интегралы вида (3.1) так, чтобы они удовлетворяли условиям (1.1) и (2.1). Имея в виду то, что нам будет необходимо в будущем, можем ограничиться соотношением (3.5) и ввести дальнейшие пригодные параметры ξ и η. Искомые частные интегралы даны соотношениями (4.1), (3.6) и (3.8).

Следствия условия (1.3) в случаях $\lambda^2 + \mu^2 > 0$ (пункт 4, α)—γ)), и $\lambda =$ $= \mu = 0$ (пункт 4, δ)) проявляются различным образом. Однако, в обоих случаях можно все неизвестные коэффициенты при выражениях (4.7), встречающиеся в частных интегралах, выразить через неопределенные пока коэффициенты из первого слоя ($k = 1$, коэффициенты $\varkappa_{k\nu}$). При этом используются оправданные предположения (4.13) и (4.15), соотв. (4.30) и (4,32); встречающиеся там коэффициенты $q_{k\nu}$ можно определить по рекурсивным формулам (4.14) и (4.16), соотв. (4.31) и (4,34). Методом математической индукции можно доказать, что все эти коэффициенты существуют (конечны) и что они отрицательны. Уместно заметить, что коэффициенты q_{k0} невозможно получить непосредственным предельным переходом от $q_{k\nu}$ при $\nu \to 0^+$; напротив имеют место соотношения (5.5) и (5.6). Следовательно коэффициенты $q_{k\nu}$, найденные по формулам (4.14) и (4.16) имеют в точке $\nu = 0$ полюсы первого порядка с правым пределом $-\infty$.

Однако, решения (4.25) и (4.39) только что упомянутых двух случаев тесно связаны друг с другом, а именно

$$v_k(x, y, z; 0, 0; \xi, \eta) = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \mu \to 0}} v_k(x, y, z, \lambda, \mu; \xi, \eta) ,$$

$$-\infty < x, y < +\infty, \; z_{k-1} < z < z_k; \; -\infty < \xi, \eta < +\infty; \; k = 1, 2, \ldots, n$$

как показано в пункте 5.

Об окончательном решении первой частичной проблемы предполагаем, что оно представимо в виде (6.1), где функция $v_k(x, y, z; \lambda, \mu; \xi, \eta)$ задана уравнениями (4.25), соотв. (4.26). Особость этой функции в точке $\lambda = \mu = 0$, обусловленная полюсами коэффициентов в этой точке, не существенна (устранима), как было показано в пункте 5. Из условия (1.1) и из представления (6.3) функции $f(x, y)$ $q_{k\nu}$ в виде интеграла Фурье получим затем, опираясь на (6.2), соотношение (6.5), определяющее последний свободный фактор, так что можем написать окончательное решение (6.6) и (6.7) первой частичной проблемы. Встречающиеся здесь коэффициенты $p_{k\nu}$ и $q_{k\nu}$ можно определить по формулам (4.14), (4.18) и (4.25).

Как мы уже упомянули, решение $u^{(2)}(x, y, z)$ можно получить из предыдущего посредством преобразования (7.1). Оно имеет вид (7.8) и (7.9). Необходимые вспомогательные коэффициенты в соотношении (7.2) можно получить по формулам (7.3), (7.4) и (7.7).

Наконец, искомое решение первоначальной проблемы (1.1)—(1.4) дано формулой (8.1). В пункте 9 доказана однозначность этого решения.

Résumé

CHAMP DE TEMPÉRATURE STATIONNAIRE DANS UNE PLAQUE PLANE INFINIE A PLUSIEURS COUCHES, AVEC UNE DISTRIBUTION ARBITRAIRE DE LA TEMPÉRATURE AUX FACES BORDANTES

JIŘÍ KLÁTIL

(Reçu le 14 juin 1956.)

On déduit dans cet article les formules exprimant la température stationnaire dans une plaque à faces parallèles plane, composée de n couches, pour le cas où, à chaque des deux faces de la plaque, on maintient une température arbitraire mais fixe, et où il y a transition de chaleur entre les couches voisines à l'intérieur de la plaque. Le présent travail constitue une généralisation des résultats établis, pour des problèmes semblables dans le cas de deux couches, dans l'article [1] du même auteur.

Choisissons d'après la fig. 1 (où l'on ne voit qu'une partie de la plaque), un système rectangulaire de coordonnées rectilignes $Oxyz$ de manière que les plans déterminant la plaque soient décrits par les équations $z = z_1$ et $z = z_{n+1}$. Supposons que, dans ce cas, la k-ième couche soit déterminée par les plans $z = z_k, z = z_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, avec $z_1 < z_2 < z_{k+1} \ldots < z_k < \ldots < z_n < z_{n+1}$. Nous allons établir la distribution de la température $u = u(x, y, z)$ dans la plaque en supposant que:

α) $u(x, y, z) = u_k(x, y, z)\,, \quad -\infty < x, y < \infty\,, \quad z_k < z < z_{k+1}\,; \quad k = 1, 2, \ldots, n;$

β) pour $z = z_1$ on ait $u_1(x, y, z_1) = f(x, y)$ (on maintienne à la face inférieure de la plaque une température $f(x, y)$ ne variant pas avec le temps);

γ) d'une façon analogue $u_n(x, y, z_{n+1}) = F(x, y)$, (température constante à la face supérieure de la plaque);

δ) les fonctions f et F soient représentables par des intégrales de Fourier par rapport à la variable x (ou y) pout toute valeur de la variable y (ou x);

ε) au plan de contact de la $(k - 1)$-ième couche avec la k-ième, il y ait une transition de chaleur aux coefficients h_k (ou h'_k) dans la direction positive (ou négative) de l'axe des z, $(h_k > 0,\ h'_k > 0)$. Dans ces conditions, la formulation mathématique du problème est donnée par les relations (1.1) — (1.4).

La solution u de ce problème sera obtenue par superposition (2.3) des solutions $u^{(1)}$ et $u^{(2)}$ des deux problèmes partiels: le premier étant caractérisé par les conditions (1.1), (1.2), (1.3) et (2.1), le second par (1.1), (2.2), (1.3) et (1.4). L'établissement de la fonction $u^{(1)}(x, y, z)$ forme la partie essentielle de notre travail; quant à $u^{(2)}(x, y, z)$, on peut la déterminer aisément d'après $u^{(1)}$ moyennant la transformation (7.1).

En résolvant le premier problème partiel, nous cherchons d'abord des intégrales particulières de la forme (3.1) et qui satisfassent aux conditions (1.1) et (2.1). Compte tenant de ce dont on aura besoin dans la suite, il suffit de se borner alors à (3.5) et d'introduire d'autres paramètres convenables ξ et η. Ces intégrales particulières sont données par les relations (4.1), (3.6) et (3.8).

Les conséquences de la condition (1.3) se manifestent dans les cas de $\lambda^2 + \mu_2 > 0$ (voir § 4, α) — γ)) ou bien de $\lambda = \mu = 0$ (voir § 4, δ)) de manières différentes. Dans les deux cas il est toujours possible d'exprimer tous les coefficients inconnus auprès des expressions (4.7) figurant dans les intégrales particulières, à l'aide des coefficients $\varkappa_{k\nu}$, pas encore déterminés, de la première couche, $(k = 1)$. En établissant ces relations, on s'est servi des suppositions justifiables (4.13) et (4.15), ou bien (4.30) et (4.32); les coefficients $q_{k\nu}$ qui y figurent peuvent être déterminés par les relations de récurrence (4.14) et (4.16), soit (4.31) et (4.34). Par la méthode de récurrence on peut démontrer que tous ces coefficients existent (sont finis) et qu'ils sont négatifs. Il est bon de dire que l'on n'obtient pas les coefficients q_{k0} en faisant tout simplement tendre

$\nu \to 0_+$, dans $q_{k\nu}$, mais on a (5.5) et (5.6). Les coefficients $q_{k\nu}$ déterminés par (4.14) et (4.16) ont donc en $\nu = 0$, des pôles du premier ordre avec $\lim\limits_{\nu \to 0_+} q_{k\nu} = -\infty$.

Les solutions (4.25) et (4.39) des deux cas cités peuvent être mises en rapport immédiat par les relations

$$v_k(x, y, z; 0, 0; \xi, \eta) = \lim_{\substack{\lambda \to 0_+ \\ \mu \to 0_+}} v_k(x, y, z; \lambda, \mu; \xi, \eta)$$

$$-\infty < x, y < +\infty\,, \quad z_{k+1} < z < z_k\,; \quad -\infty < \xi, \eta < \infty\,; \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

comme c'est montré au paragraphe 5.

La solution résultante du premier problème partiel est mise sous la forme (6.1) où la fonction $v_k(x, y, z; \lambda, \mu; \xi, \eta)$ est donnée par les relations (4.24) et (4.25) respectivement. La singularité de cette fonction en $\lambda = \mu = 0$, due aux pôles des coefficients $q_{k\nu}$ en ce point, peut être écartée, comme on l'a montré au paragraphe 5. De la condition (1.1) et de l'expression (6.3) de la fonction $f(x, y)$ par une intégrale de Fourier, on obtient d'après (6.2) la relation (6.5) déterminant le dernier facteur libre de sorte que l'on peut écrire la solution finale (6.6) et (6.7) du premier problème partiel. Les coefficients $p_{k\nu}$ et $q_{k\nu}$ figurant dans ce résultat peuvent être déterminés d'après les formules (4.14), (4.16) et (4.24).

Comme on l'a déjà dit, la solution $u^{(2)}(x, y, z)$ peut être obtenue à partir de $u^{(1)}$ moyennant la transformation (7.1). On l'exprime sous la forme (7.8) et (7.9). Les coefficients dont on a besoin pour la relation (7.2) peuvent être déterminés d'après les formules (7.3), (7.4) et (7.7).

La solution cherchée du problème original (1.1) — (1.4) est enfin donnée par (8.1). Au paragraphe 9, on démontre l'unicité de cette solution.