Vladimír Klega

O useknutém Maxwellově rozdělení

Aplikace matematiky, Vol. 2 (1957), No. 4, 243–250

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102574

ČLÁNKY

O USEKNUTÉM MAXWELLOVĚ ROZDĚLENÍ

VLADIMÍR KLEGA

(Došlo dne 23. dubna 1956.) DT:519.24:330.655

V článku jsou stanoveny maximálně věrohodné odhady parametru oboustranně a jednostranně useknutého Maxwellova rozdělení a jejich asymptotické rozptyly. V případě levostranně useknutého Maxwellova rozdělení je odvozeno rozdělení příslušného odhadu.

1. Úvod

Problém odhadu parametrů useknutého rozdělení při daném bodě useknutí řešil po prvé R. A. Fisher [1] pro normální rozdělení. V článku je řešen týž problém pro parametr m t. zv. Maxwellova rozdělení (dále jen M-rozdělení), které v poslední době nachází významné uplatnění v technice (viz na př. A. K. Kutaj [2]). Tímto rozdělením se totiž úspěšně aproximuje rozdělení úchylek geometrického tvaru součástí (na př. ovalita, hranatost). Když mají součásti drsný povrch (při soustružení, broušení před kalením) nenaměříme při zjišťování úchylky geometrického tvaru žádnou hodnotu v jistém intervalu $(0, y)$. Když zjišťujeme úchylku geometrického tvaru u souboru součástí, které již prošly stoprocentní přejímkou, nenaměříme žádnou hodnotu v jistém intervalu (z, ∞). To znamená, že se setkáváme při odhadu parametru m s oboustranně useknutým M-rozdělením i jeho speciálními případy.

Při tom se vychází z maximálně věrohodného odhadu parametru oboustranně useknutého M-rozdělení, když oba body useknutí jsou dány. Případ pravostranně a levostranně useknutého M-rozdělení pak vyplyne jako speciální. Pro odhad parametru levostranně useknutého M-rozdělení je odvozeno jeho rozdělení, což je především umožněno tím, že odhad lze vyjádřit explicitně. Konečně je přesnost odhadů charakterisována jejich asymptotickým rozptylem.

2. Odhady parametru m

M-rozdělení má tvar

$$f(x) = \frac{x}{m} e^{-\frac{x^2}{2m}}, \quad x > 0, \quad m > 0, \tag{1}$$

kde m je parametr. Distribuční funkce náhodné proměnné, která má M-rozdělení, je pak

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2m}}. \tag{2}$$

Jestliže jsou dány levý bod useknutí y a pravý bod useknutí z, potom oboustranně useknuté M-rozdělení je

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x}{m[F(z) - F(y)]} e^{-\frac{x^2}{2m}}, \quad y < x < z, \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad , \quad x \leqq y, \quad x \geqq z, \end{aligned} \tag{3}$$

a oboustranně useknutý náhodný výběr $(x_1, x_2, \dots x_n)$ má rozdělení

$$g(x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{\Pi x_k}{m^n[F(z) - F(y)]^n} e^{-\frac{\Sigma x^2_k}{2m}},$$

kde součet resp. součin se vždy provádí pro $k = 1, 2, \dots n$. Pro stanovení maximálně věrohodného odhadu parametru m (dále jen m. v. odhadu) vyjdeme od funkce maximální věrohodnosti, která je v našem případě

$$L = \lg g(x_1, x_2, \dots x_n) = \Sigma \lg x_k - \frac{\Sigma x_k^2}{2m} - n \lg (m[F(z) - F(y)]).$$

Položíme-li

$$t_1 = \frac{y^2}{2m}, \quad z = y + r, \tag{4}$$

lze rozdíl distribuční funkce (2) v bodech y a z upravit tak, že

$$F(z) - F(y) = e^{-t_1}(1 - e^{-At_1}),$$

kde

$$A = \frac{2r}{y} + \frac{r^2}{y^2}.$$

Nahradíme-li parametr m parametrem t_1 podle vztahu (4), dostaneme m. v. odhad parametru t_1 řešením rovnice maximální věrohodnosti $\frac{\partial L}{\partial t_1} = 0$ pro t_1. Po úpravě můžeme tuto rovnici psát ve tvaru

$$\frac{A\hat{t}_1}{e^{A\hat{t}_1} - 1} = B\hat{t}_1 + 1, \tag{5}$$

kde

$$B = 1 - \frac{\Sigma x_k^2}{n y^2}\,,$$

a $\hat{t}_1$ značí m. v. odhad parametru t_1. Řešením rovnice (5) pro $\hat{t}_1$ a dosazením $\hat{t}_1$ do rovnice (4) pro t_1 a m získáme m. v. odhad $\hat{m}_{yz}$ parametru m oboustranně useknutého M-rozdělení ze vztahu

$$\hat{m}_{yz} = \frac{y^2}{2\hat{t}_1}\,.$$

Rovnice (5) nemá však pro $\hat{t}_1 > 0$ vždy řešení. Především funkce $h_1(\hat{t}_1) = A\hat{t}_1(e^{A\hat{t}_1} - 1)^{-1}$ je ryze konvexní a klesající v intervalu $(0, \infty)$, $h_1(0) = 1$ a $h_1'(0) = -\frac{A}{2} < 0$. Poněvadž pak pro směrnici přímky $h_2(\hat{t}_1) = B\hat{t}_1 + 1$ plyne z nerovnosti $x_k > y$, že $B < 0$ a $h_2(0) = 1$, má rovnice (5) v intervalu $(0, \infty)$ jediný reálný kořen jen když

$$-\frac{A}{2} < B \quad \text{resp.} \quad y^2 + z^2 > \frac{2}{n}\,\Sigma x_k^2\,.$$

Uvažujme nyní jednostranně useknuté M-rozdělení. Jestliže v rozdělení (3) je $y = 0$, potom pravostranně useknuté M-rozdělení je

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \frac{x}{mF(z)}\,e^{-\frac{x^2}{2m}}\,, && 0 < x < z\,, \\ &= 0 &&, \quad x \leqq 0\,, \quad x \geqq z\,, \end{aligned} \tag{6}$$

a jestliže v témže rozdělení (3) je $z = \infty$, potom levostranně useknuté M-rozdělení je

$$\begin{aligned} g_2(x) &= \frac{x}{m[1 - F(y)]}\,e^{-\frac{x^2}{2m}}\,, && x > y\,, \\ &= 0 &&, \quad x \leqq y\,. \end{aligned} \tag{7}$$

M. v. odhad parametru m pravostranně resp. levostranně useknutého M-rozdělení můžeme získat buď pomocí příslušných rozdělení náhodného výběru $g_1(x_1, x_2, \dots x_n)$ resp. $g_2(x_1, x_2, \dots x_n)$, nebo snadněji přímo z rovnice maximální věrohodnosti (5) s ohledem na uvedené podmínky. Budeme zřejmě postupovat druhým způsobem; především

$$At_1 = \frac{r}{m}\,y + \frac{r^2}{2m}\,,$$

a

$$Bt_1 = \frac{y^2}{2m} - \frac{\Sigma x_k^2}{2mn}\,.$$

Položíme-li v případě pravostranně useknutého M-rozdělení

$$t_2 = \frac{z^2}{2m}\,, \tag{8}$$

dále $y = 0$, takže $z = r$, pak je

$$At_1 = t_2\,, \quad Bt_1 = -\frac{\Sigma x_k^2}{nz^2}\,t_2\,,$$

a rovnice (5) má tvar

$$\frac{\hat{t}_2}{e^{\hat{t}_2} - 1} = C\hat{t}_2 + 1\,, \tag{9}$$

kde

$$C = -\frac{\Sigma x_k^2}{nz^2}\,,$$

a $\hat{t}_2$ značí m. v. odhad parametru t_2. Rovnici (9) obdržel v poněkud jiné formě rovněž A. C. Cohen [3]. Řešením uvedené rovnice pro $\hat{t}_2$ a dosazením $\hat{t}_2$ do (8), získáme m. v. odhad $\hat{m}_z$ parametru m pravostranně useknutého M-rozdělení ze vztahu

$$\hat{m}_z = \frac{z^2}{2\hat{t}_2}\,.$$

V tomto případě má rovnice (9) pro $\hat{t}_2 > 0$ jediný reálný kořen jen když

$$C > -\frac{1}{2} \quad \text{resp.} \quad z^2 > \frac{2}{n}\,\Sigma x_k^2\,.$$

Položíme-li v případě levostranně useknutého M-rozdělení $z = r = \infty$, je $At_1 = \infty$ a

$$\lim_{A\hat{t}_1 \to \infty} \frac{A\hat{t}_1}{e^{A\hat{t}_1} - 1} = 0\,.$$

Potom má rovnice (5) tvar

$$B\hat{t}_1 + 1 = 0\,,$$

takže po dosazení za B a $\hat{t}_1$ a úpravě je m. v. odhad $\hat{m}_y$ parametru m tohoto rozdělení roven

$$\hat{m}_y = \frac{1}{2n}\,[\Sigma x_k^2 - ny^2]\,. \tag{10}$$

3. Rozdělení odhadu $\hat{m}_y$

Nyní dokážeme následující větu.

Věta. *Rozdělení m. v. odhadu $\hat{m}_y$ parametru m levostranně useknutého M-rozdělení nezávisí na bodu useknutí y a má tvar* (11).

Důkaz. Rozdělení (7) pišme ve tvaru

$$g_2(x) = \frac{x}{m}\,e^{-\frac{x^2 - y^2}{2m}}\,, \quad x > y\,.$$

Jestliže vzájemně nezávislé náhodné proměnné $\xi_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ mají všechny rozdělení (7), pak náhodné proměnné $\zeta_k = \frac{1}{2n}(\xi_k^2 - y^2)$ mají rozdělení

$$f\zeta_k(u_k) = \frac{n}{m} e^{-\frac{nu_k}{m}}, \quad u_k > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Distribuční funkci $F_{\hat{m}_y}(x)$ odhadu $\hat{m}_y$, pro který jako náhodnou proměnnou zřejmě platí podle (10)

$$\hat{m}_y = \Sigma\zeta_k = \frac{1}{2n}[\Sigma\xi_k^2 - ny^2],$$

lze psát

$$F_{\hat{m}_y}(x) = \frac{n^n}{m^n} \int_{\Sigma u_k < x} \overset{(n)}{\ldots} \int e^{-\frac{n\Sigma u_k}{m}} du_1 \, du_2 \ldots du_n.$$

Transformací

$$\begin{aligned} u_1 &= v \cos^2\alpha_1 \cos^2\alpha_2 \ldots \cos^2\alpha_{n-1} \\ u_2 &= v \cos^2\alpha_1 \cos^2\alpha_2 \ldots \cos^2\alpha_{n-2} \sin^2\alpha_{n-1} \\ &\vdots \\ u_n &= v \sin^2\alpha_1 \end{aligned}$$

upravíme $F_{\hat{m}_y}(x)$ na tvar

$$F_{\hat{m}_y}(x) = \frac{n^n}{m^n \Gamma(n)} \int_0^x v^{n-1} e^{-\frac{nv}{m}} dv,$$

a tedy rozdělení odhadu $\hat{m}_y$ je

$$f_{\hat{m}_y}(x) = \frac{n^n}{m^n \Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\frac{nx}{m}}, \quad x > 0, \tag{11}$$

čímž je věta dokázána. Z ní pak plyne následující

Důsledek. *M. v. odhady $\hat{m}_y$ parametru m levostranně useknutého M-rozdělení a $\hat{m}$ parametru m M-rozdělení jsou ekvivalentní a nestranné.*

Důkaz. Z (1) a (7) je zřejmo, že rozdělení $g_2(x)$ přechází v rozdělení $f(x)$ pro $y = 0$. Podle (10) je tedy m. v. odhad $\hat{m}$ parametru m v M-rozdělení

$$\hat{m} = \frac{1}{2n} \Sigma x_k^2,$$

když $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je náhodný výběr. Na základě uvedené věty pak pro rozdělení $f_{\hat{m}}(x)$ odhadu $\hat{m}$ plyne, že

$$f_{\hat{m}}(x) = f_{\hat{m}_y}(x).$$

Jsou tedy odhady $\hat{m}_y$ a $\hat{m}$ ekvivalentní.

Konečně pro matematickou naději uvažovaných odhadů platí

$$\mathsf{E}(\hat{m}_y) = \mathsf{E}(\hat{m}) = m\,,$$

takže oba odhady jsou nestranné; jejich rozptyl pak je

$$\mathsf{D}(\hat{m}_y) = \mathsf{D}(\hat{m}) = \frac{m^2}{n}\,.$$

4. Asymptotický rozptyl odhadů

V obecném případě oboustranně useknutého Maxwellova rozdělení, kdy neznáme rozdělení m. v. odhadu $\hat{m}_{yz}$, a tedy nemůžeme vypočítat přímo $\mathsf{E}(\hat{m}_{yz})$ a $\mathsf{D}(\hat{m}_{yz})$, odvodíme alespoň asymptotický rozptyl $\tilde{\mathsf{D}}(\hat{m}_{yz})$ m. v. odhadu $\hat{m}_{yz}$, pro který platí

$$\tilde{\mathsf{D}}(\hat{m}_{yz}) = \frac{1}{-n\displaystyle\int_y^z \frac{\partial^2 \lg g(x)}{\partial m^2}\, g(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

Pro druhou parciální derivaci dostaneme

$$\frac{\partial^2 \lg g(x)}{\partial m^2} = a - \frac{x^2}{m^3}\,,$$

kde

$$a = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3 F_{yz}}\left(y^2\,\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2m}} - z^2\,\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2m}}\right) + \frac{b^2}{m^4 F_{yz}^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{y^2+z^2}{2m}}\,,$$

když

$$F_{yz} = F(z) - F(y)\,,\quad b = -\frac{Ay^2}{2}\,.$$

Dále

$$-\frac{1}{n\tilde{\mathsf{D}}(\hat{m}_{yz})} = a - \frac{2}{m^2} - \frac{1}{m^3 F_{yz}}\left(y^2\,\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2m}} - z^2\,\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2m}}\right),$$

a tedy asymptotický rozptyl odhadu $\hat{m}_{yz}$

$$\tilde{\mathsf{D}}(\hat{m}_{yz}) = \frac{m^4}{n\left[m^2 - \dfrac{b^2}{F_{yz}^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{y^2+z^2}{2m}}\right]}\,. \tag{12}$$

Rozptyl odhadů $\hat{m}_z$ a $\hat{m}_y$ můžeme získat ze vztahu (12), poněvadž platí $\tilde{\mathsf{D}}(\hat{m}_z) = \tilde{\mathsf{D}}(\hat{m}_{yz})|_{y=0,\,z=r}$ a $\tilde{\mathsf{D}}(\hat{m}_y) = \tilde{\mathsf{D}}(\hat{m}_{yz})|_{z=r=\infty}$. Pro $y = 0$ a $z = r$ asymptotický rozptyl odhadu $\hat{m}_{yz}$ nabude tvaru

$$\tilde{\mathsf{D}}(\hat{m}_z) = \frac{m^4}{n\left[m^2 - \dfrac{z^4\,\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2m}}}{4\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2m}}\right)^2}\right]}\,.$$

Jestliže $z = r = \infty$, pak

$$\lim_{z=r\to\infty} b^2 \, e^{-\frac{y^2+z^2}{2m}} = 0 \,,$$

a tedy asymptotický rozptyl odhadu $\hat{m}_y$ (v tomto případě platný pro každé n) je

$$\tilde{\mathbf{D}}(\hat{m}_y) = \frac{m^2}{n} \,.$$

LITERATURA

[1] *R. A. Fisher:* The truncated normal distribution. Math. Tables I. (1931).

[2] *A. K. Кутай:* Изучение точности производства с применением законов распределения существенно положительных величин. Вестник ленинградского университета (1956).

[3] *A. C. Cohen:* Maximum likelihood estimation of the dispersion parameter of chi-distributed radial error from truncated and censored samples with applications to target analysis. Journal of the American Statistical Association (1955).

Резюме

ОБ УСЕЧЕННОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ МАКСВЕЛЛА

ВЛАДИМИР КЛЕГА (Vladimír Klega)

(Поступило в редакцию 23/IV 1956 г.)

Если мы усечем известное распределение Максвелла в точках y и z ($y < z$), будет иметь распределение, усеченное с двух сторон, вид

$$g(x) = \frac{x}{m[F(z) - F(y)]} \, e^{-\frac{x^2}{2m}} \,, \quad y < x < z \,,$$
$$= 0 \qquad\qquad\qquad , \quad x \leqq y \,, \quad x \geqq z \,.$$

Оценку наибольшего правдоподобия $\hat{m}_{yz}$ параметра m этого распределения получим из равенства (5); ее асимптотическая дисперсия $\tilde{\mathbf{D}}$ $(\hat{m}_{yz})$ дана выражением (12). Оценки наибольшего правдоподобия $\hat{m}_y$ или $\hat{m}_z$ параметра m в распределении Максвелла, усеченном с левой или с правой стороны, вытекают из (5) как частные случаи. Также их асимптотические дисперсии являются частным случаем дисперсии (12).

Для оценки $\hat{m}_y$ доказана следующая теорема:

Распределение оценки наибольшего правдоподобия $\hat{m}_y$ параметра m в распределении Максвелла, усеченного с левой стороны, не зависит от точки усечения y и имеет вид (11).

Summary

ON THE TRUNCATED MAXWELL'S DISTRIBUTION

VLADIMÍR KLEGA

(Received April 23, 1956.)

When the well known Maxwell's distribution is truncated at the points y and z ($y < z$), then this distribution truncated on both sides is given by the expression

$$g(x) = \frac{x}{m[F(z) - F(y)]} e^{-\frac{x^2}{2m}}, \quad y < x < z,$$
$$= 0 \quad , \quad x \leqq y, \quad x \geqq z.$$

The maximum likelihood estimate $\hat{m}_{yz}$ of the parameter m of this distribution is obtained by solving the equation (5) and the asymptotical variance $\tilde{\mathbf{D}}(\hat{m}_{yz})$ is given by (12). Then the maximum likelihood estimates $\hat{m}_y$ and $\hat{m}_z$ of the parameter m of Maxwell's distribution truncated on the left or on the right side respectively follow immediately from (5) as special cases. Also their asymptotical variances are special cases of variance (12).

For the estimate $\hat{m}_y$ the proof of the following theorem is given: The distribution of the maximum likelihood estimate $\hat{m}_y$ of the parameter m of Maxwell's distribution truncated on the left side does not depend on the point of truncation y and has the form (11).