

Aplikace matematiky

Jiří Klátíl

Přibližné určení největšího smykového napětí v kroucené prismatické tyči s obecným průřezem

Aplikace matematiky, Vol. 2 (1957), No. 3, 202–214

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102567>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1957

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

PŘIBLIŽNÉ URČENÍ NEJVĚTŠÍHO SMYKOVÉHO NAPĚTÍ V KROUCENÉ PRISMATICKÉ TYČI S OBECNÝM PRŮŘEZEM

JIRÍ KLÁTIL

(Došlo dne 3. července 1956.)

DT: 539.385 : 539.386

V článku je popsána jednoduchá metoda pro přibližný výpočet velikosti i směru největšího smykového napětí v kroucené prismatické tyči. V této metodě, založené na membránové analogii, je za podklad výpočtů vzat snímek odrazu pravoúhlé sítě na mydlinové bláně, vyklenuté nad rovinným profilem tvarově shodným s průřezem namáhané tyče. Rovněž je proveden jistý odhad vzniklých chyb.

Úvod

Metody řešení technických problémů pomocí matematicko-fyzikálních analogií jsou známé a velmi často se jich používá s výhodou v praxi. Náš příspěvek využívá metody membránové analogie k přibližnému stanovení největšího smykového napětí v prismatické tyči o libovolném průřezu, namáhané na krut.

1. Membránová analogie a způsoby zpracování získaných údajů

Je známo, že diferenciální rovnice pro funkci napětí $f(x, y)$ v prismatické tyči, kolmé k rovině Oxy a namáhané na krut, má tvar (viz na př. [1], str. 170 nebo [2], str. 194)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2G\theta, \quad (1.1)$$

v níž G značí modul pružnosti ve smyku a θ poměrný úhel zkroucení. Podobné diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{p}{s} \quad (1.2)$$

vyhovuje funkce $z(x, y)$, vyjadřující výchylku membrány, vyklenuté nad daným rovinným profilem působením rovnoměrně rozloženého tlaku o in-

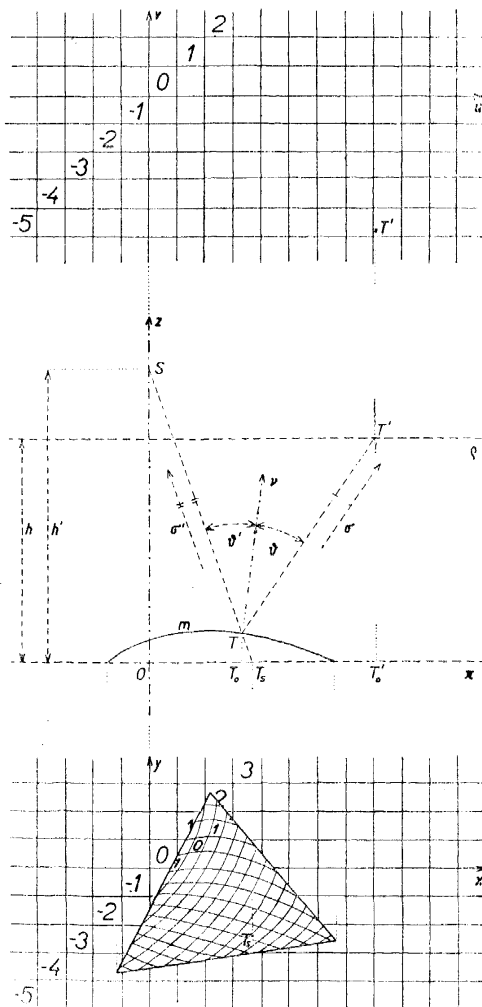
tensitě p (t. zv. Prandtlova vřehlíku), od roviny tohoto profilu; s je tahové napětí blány, vztažené na délkovou jednotku. V případě jednoduchého profilu jsou analogické i okrajové podmínky obou zmíněných problémů.

Tato analogie umožňuje sledovat rozložení smykového napětí v kroucené prismatické tyči měřením výchylek vyklenuté membrány nad daným profilem. V literatuře (na př. [2], [3]) bývají uváděny různé způsoby určení těchto výchylek, jako je jejich měření pomocí mikrometrického šroubu nebo studium odrazu sítě čar na lesklé membráně, zachycené na fotografickém snímku. Výhodou této druhé metody proti ostatním je okamžité zachycení situace na celé membráně, takže je do značné míry vyloučen vliv pozvolné deformace proměřované blány. V následujícím předkládáme metodu, která na základě vhodně pořízeného snímku dovolu-
je stanovit přibližnou velikost i směr největšího smykového napětí v libovolném místě průřezu kroucené tyče.

2. Způsob pořízení snímku a označení útvarů

Pořídme fotografický snímek obrazu síta (v praxi bývá představováno šachovnicí) na vyklenuté membráně tímto způsobem:

Základní rovina π — fotografovaná rovina nosné destičky (obr. 1) — nechť je kolmá k optické ose z fotografického přístroje se středem objektivu S . Buď h' vzdálenost středu S od základní roviny π . Za počátek O souřadnicového systému $Oxyz$ pravoúhlých přímočarých souřadnic x , y a z zvolme průsečík optické osy z se základní rovinou π . Síto umístíme do roviny ϱ , rovnoběžné



Obr. 1.

se základní rovinou π a ve vzdálenosti h od této roviny (na téže straně jako je střed S). Nechť síto je rovnoběžné s osami x a y (obr. 1 nahoře), osou z nechť prochází po jedné z přímek omezujících pole síta. Nazvěme tyto přímky osami u a v síta a jejich průsečík počátkem síta. Je tedy střed S objektivu umístěn „nad“ počátkem síta. Na obr. 1 je schematicky znázorněn kolmý průmět uvedených útvarů do některé roviny rovnoběžné s osou z , na př. do roviny Oxz (prostřední část).

Podle obr. 1 odráží membrána ve svém bodě T bod T' síta. Fotografickým obrazem bodu T na snímku (jeho středovým průmětem z bodu S) nechť je bod T_s . Na obr. 1 ztotožňujeme mlčky snímek s rovinou π , což je vždy možno provést při vhodném zvětšení snímku. Prostřednictvím bodu T_s na snímku jsou v prostoru sobě přiřazeny dva body: bod T na membráně a bod T' v rovině ρ . Toto přiřazení bude základem našeho početního postupu v následujícím odstavci. Než však k tomu přistoupíme, zavedeme ještě některá další označení.

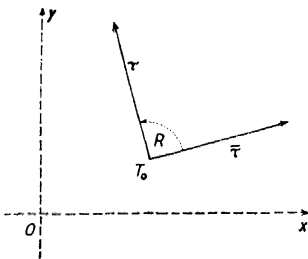
Ortogonální průměty dosud zmíněných bodů do základní roviny π označme týmiž znaky opatřenými indexy „nula“ a zavedme dále následující označení souřadnic těchto bodů:

$$S(0, 0, h'), \quad T(x, y, z), \quad T'(u, v, h), \quad T'_s(\bar{x}, \bar{y}, 0).$$

Vyklenutí membrány stanoví nyní souřadnici z bodu T jako určitou funkci $z = z(x, y)$ zbývajících souřadnic x a y , definovanou nad zkoumaným profilem. O této funkci můžeme podle charakteru problému zřejmě předpokládat, že je i s oběma svými 1. parciálními derivacemi spojitá všude ve svém definičním oboru (plocha membrány je všude hladká).

Při tomto označení můžeme nyní zmíněnou analogii mezi průběhem největšího smykového napětí τ a plochou $z = z(x, y)$ vyklenuté membrány zapsati ve vektorovém tvaru

$$\tau = \bar{\tau}, \quad \tau \perp \bar{\tau}; \quad \tau = k \left(\frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} \right), \quad (2.1)$$



Obr. 2.

kde \mathbf{i} a \mathbf{j} jsou jednotkové vektory ve směru os x a y a k je kladný koeficient úměrnosti závislý na velikosti kroučícího momentu; smysl vektoru τ buď určen pomocným vektorem $\bar{\tau}$ podle obr. 2, což odpovídá určitému smyslu kroučícího momentu. K vyřešení naší úlohy stačí tedy zřejmě stanovit uvnitř daného průřezu vektorové pole

$$\text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j}, \quad (2.2)$$

vektor τ největšího smykového napětí pak bude pomocným vektorem $\bar{\tau}$ určen nejen co do své velikosti $\tau = k|\text{grad } z|$, ale i co do svého směru a smyslu. V dalším se proto omezíme pouze na stanovení pomocného vektoru $\bar{\tau}$.

3. Odvození systému diferenciálních rovnic průhybu membrány

V tomto odstavci se budeme zabývat odvozením systému diferenciálních rovnic průhybu membrány, vhodného pro přibližné řešení našeho problému s ohledem na použití fotografického snímku.

Ke stanovení požadovaného gradientu výchylky (2.2) jako vektorové funkce polohy stačí určit výrazy $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}$ závislé na x a y . To je naším nejbližším úkolem.

Podle obr. 1 stanovíme směry σ a σ' vektorů $\overline{TT'}$ a $\overline{T'S}$ (a to i co do smyslu) a dále směr ν normály plochy $z = z(x, y)$ v jejím bodě T rovněž některým způsobem orientovaný. Označíme-li znaky $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ resp. $\cos \alpha'$, $\cos \beta'$, $\cos \gamma'$ směrové kosiny směru σ resp. σ' , je

$$\cos \alpha = \frac{u-x}{s}, \quad \cos \beta = \frac{v-y}{s}, \quad \cos \gamma = \frac{h-z}{s};$$

$$s = s(z) = \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2 + (h-z)^2}; \quad s > 0, \quad (3.1)$$

$$\cos \alpha' = -\frac{x}{s'}, \quad \cos \beta' = -\frac{y}{s'}, \quad \cos \gamma' = \frac{h'-z}{s'};$$

$$s' = s'(z) = \sqrt{x^2 + y^2 + (h'-z)^2}, \quad s' > 0. \quad (3.2)$$

Připomeňme ještě, že za směrové parametry normály plochy $z = z(x, y)$ v místě $T(x, y, z)$ je možno vzít hodnoty ([4], str. 248)

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad -1 \quad (3.3)$$

v bodě T .

Podmínku rovnosti úhlů ϑ a ϑ' mezi směry ν , σ a ν' , σ' ,

$$\cos \vartheta = \cos \vartheta',$$

lze psát ve tvaru ([4], str. 14 nebo [5], str. 18)

$$\cos \alpha \frac{\partial z}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial z}{\partial y} - \cos \gamma = \cos \alpha' \frac{\partial z}{\partial x} + \cos \beta' \frac{\partial z}{\partial y} - \cos \gamma'. \quad (3.4)$$

Druhou nezávislou podmínku potřebnou pro stanovení dvou neznámých $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}$ obdržíme ze skutečnosti, že směry σ , σ' a ν jsou rovnoběžné s touže rovinou (s rovinou odrazejšího se světelného paprsku, určenou body T' , T a S). Analytické vyjádření této podmínky ve tvaru ([4], str. 16 nebo [5], str. 11)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & -1 \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \cos \alpha' & \cos \beta' & \cos \gamma' \end{vmatrix} = 0 \quad (3.5)$$

znamená zřejmě lineární závislost směrových parametrů uvažovaných směrů. Podmínky (3.4) a (3.5) vedou na soustavu dvou lineárních rovnic pro určení hledaných parciálních derivací:

$$\begin{aligned} (\cos \alpha - \cos \alpha') \frac{\partial z}{\partial x} + (\cos \beta - \cos \beta') \frac{\partial z}{\partial y} &= \cos \gamma - \cos \gamma', \\ (\cos \beta \cos \gamma' - \cos \gamma \cos \beta') \frac{\partial z}{\partial x} + (\cos \gamma \cos \alpha' - \cos \alpha \cos \gamma') \frac{\partial z}{\partial y} &= \\ &= \cos \alpha \cos \beta' - \cos \beta \cos \alpha'. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Tato soustava má vzhledem k povaze problému zřejmě určité řešení

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\begin{vmatrix} \cos \gamma - \cos \gamma' & \cos \beta - \cos \beta' \\ \cos \alpha \cos \beta' - \cos \beta \cos \alpha' & \cos \gamma \cos \alpha' - \cos \alpha \cos \gamma' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \alpha - \cos \alpha' & \cos \beta - \cos \beta' \\ \cos \beta \cos \gamma' - \cos \gamma \cos \beta' & \cos \gamma \cos \alpha' - \cos \alpha \cos \gamma' \end{vmatrix}}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\begin{vmatrix} \cos \alpha - \cos \alpha' & \cos \gamma - \cos \gamma' \\ \cos \beta \cos \gamma' - \cos \gamma \cos \beta' & \cos \alpha \cos \beta' - \cos \beta \cos \alpha' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \alpha - \cos \alpha' & \cos \beta - \cos \beta' \\ \cos \beta \cos \gamma' - \cos \gamma \cos \beta' & \cos \gamma \cos \alpha' - \cos \alpha \cos \gamma' \end{vmatrix}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Zavedme do těchto vzorců místo směrových kosinů pravé strany rovnic (3.1) a (3.2). Po malé úpravě dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\begin{vmatrix} hs' - h's - (s' - s)z & s'v - (s' - s)y \\ vx - uy & -h'u + (h' - h)x + uz \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s'u - (s' - s)x & s'v - (s' - s)y \\ h'v - (h' - h)y - vz & -h'u + (h' - h)x + uz \end{vmatrix}}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\begin{vmatrix} s'u - (s' - s)x & hs' - h's - (s' - s)z \\ h'v - (h' - h)y - vz & vx - uy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s'u - (s' - s)x & s'v - (s' - s)y \\ h'v - (h' - h)y - vz & -h'u + (h' - h)x + uz \end{vmatrix}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Právě odvozené rovnice (3.8), platné uvnitř celého průřezu, tvoří systém parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu; jemu vyhovuje uvažovaný průhyb $z = z(x, y)$ membrány. Prohlédněme si poněkud stavbu rovnic tohoto systému.

Neznámá funkce $z = z(x, y)$ se vyskytuje jednak na levých stranách v parciálních derivacích prvního řádu, jednak v determinantech na pravých stranách, a to jak explicitně, tak i uvnitř výrazů s a s' . Vedle nezávisle proměnných x a y se ve zmíněných determinantech vyskytují veličiny u a v . Z výše uvedené korespondence mezi body T a T' vyplývá vzájemná závislost proměnných x , y a u , v , kterou sice budeme moci na snímku přibližně sledovat, jejíž analytické

vyjádření — ku př. v příhodném tvaru $u = u(x, y)$ a $v = v(x, y)$ — však v obecném případě neznáme. Již z toho důvodu se v dalším ani nepokusíme složitý systém rovnic (3.8) analyticky řešit a obrátíme se k metodám, jimiž by bylo možno získat některé přibližné řešení s požadavkem na jeho jednoduhost i postačující přesnost tak, aby je bylo možno použít přímo v praxi.

4. Přibližné řešení systému (3.8)

Výsledků právě získaných použijeme k přibližnému výpočtu složek grad z . Jak je zřejmé z obr. 1, mají na snímku tutéž polohu bod $T_s(\bar{x}, \bar{y}, 0)$ jako fotografický obraz bodu $T'(x, y, z)$ a membránou odražený obraz bodu $T''(u, v, h)$. Zprostředkuje tedy fotografický snímek také korespondenci bodů T_s a T'' v prostoru, neboli — což je totéž — korespondenci bodů T_s a T'_0 v základní rovině π . Jsou tak prostřednictvím snímku souřadnicím \bar{x} a \bar{y} jednoznačně přiřazeny souřadnice u a v . Hodnoty prvních dvou v daném bodě získáme proměřením snímku, druhé dvě vyčteme se snímku pomocí obrazu šachovnice (obr. 1).

Abychom mohli tyto čtyři hodnoty se snímku získané použít k přibližnému řešení soustavy rovnic (3.8), všimněme si znovu výskytu veličiny z na pravých stranách těchto rovnic. Ve výrazech s a s' se tato veličina nalézá v rozdílech $h - z$ nebo $h' - z$. Protože v praxi bývají hodnoty h a h' značně větší než výchylka z (zpravidla aspoň stokrát), zkusme toto z vzhledem k hodnotám h a h' zanedbat a zanedbejme je rovněž i všude jinde. Jestliže současně nahradíme ve jmenovaných rovnicích souřadnice x a y bodu T_0 změřenými souřadnicemi \bar{x} a \bar{y} bodu T_s , můžeme již pomocí těchto vzorců určit přibližnou velikost i přibližný směr největšího smykového napětí materiálu v libovolném místě uvnitř profilu. Tato záměna bodů T_0 a T_s je při vhodném umístění membrány s ohledem na přesnost určování hodnot \bar{x} a \bar{y} zcela oprávněna, jak se můžeme přesvědčít jednoduchým výpočtem. Nebudeme se jí tedy dále zabývat a proto také pod znaky x a y budeme v dalším vždy uvažovati změřené hodnoty, určující polohu bodu T_s na snímku (tedy čísla \bar{x} a \bar{y}). Svůj zřetel obrátíme nyní k utvoření představy o přibližné velikosti chyb, jichž se dopustíme výše uvedeným zanedbáním veličiny z .

Zavedme za tím účelem tato označení:

Ve shodě s rovnicemi (3.1) a (3.2) nejprve položeme

$$s_0 = s(0) = \sqrt{(u - x)^2 + (v - y)^2 + h^2}, \quad s'_0 = s'(0) = \sqrt{x^2 + y^2 + h'^2}; \quad (4.1)$$

determinanty v čitatelích a determinant ve jmenovatelích zlomků na pravých stranách vzorců (3.8) označme postupně

$$D_x = D_x(z), \quad D_y = D_y(z), \quad D = D(z) \quad (4.2)$$

a položíme konečně

$$D_x(0) = D_{x_0}, \quad D_y(0) = D_{y_0}, \quad D(0) = D_0, \quad (4.3)$$

$$Z_x = Z_x(z) = \frac{D_x}{D}, \quad Z_y = Z_y(z) = \frac{D_y}{D}, \quad (4.4)$$

$$Z_x(0) = Z_{x_0}, \quad Z_y(0) = Z_{y_0}. \quad (4.5)$$

Naši další snahou bude získat vždy první dva členy Taylorových rozvoji výrazů Z_x a Z_y (pravých stran ve vzorcích (3.8)) podle mocnin proměnné z při pevných x, y, u a v . Proto i při výpočtu postačí omezit se ve všech výrazech, obsahujících veličinu z , rovněž na takovéto dvojčleny a zanedbat tedy všude druhé a vyšší mocniny proměnné z .

S ohledem na označení (4.1) dostáváme předně ze vzorců (3.1) a (3.2) vztahy

$$s \doteq \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2 + h^2 - 2hz} \doteq s_0 - \sigma_0 z, \quad \sigma_0 = \frac{h}{s_0^2}, \quad (4.6)$$

$$s' \doteq \sqrt{x^2 + y^2 + h'^2 - 2h'z} \doteq s'_0 - \sigma'_0 z, \quad \sigma'_0 = \frac{h'}{s_0'^2}. \quad (4.7)$$

Pomocí těchto vztahů je při označení (4.2) možno po malých úpravách zapsat přibližnou hodnotu determinantu D ve tvaru

$$D = \begin{vmatrix} s'_0 u - (s'_0 - s_0) x - [\sigma'_0 u - (\sigma'_0 - \sigma_0) x] z, & s'_0 v - (s'_0 - s_0) y - [\sigma'_0 v - (\sigma'_0 - \sigma_0) y] z \\ h'v - (h' - h) y - vz, & -h'u + (h' - h) x + uz \end{vmatrix}.$$

Odtud podle známých pravidel o sečítání determinantů a se zřetelem k označení (4.3) vychází

$$D \doteq D_0 + \delta z, \quad (4.8)$$

$$\delta = \begin{vmatrix} s'_0 u - (s'_0 - s_0) x, & -\sigma'_0 v + (\sigma'_0 - \sigma_0) y \\ h'v - (h' - h) y, & u \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} s'_0 v - (s'_0 - s_0) y, & \sigma'_0 u - (\sigma'_0 - \sigma_0) x \\ -h'u + (h' - h) x, & v \end{vmatrix}. \quad (4.9)$$

Podobně je dále

$$D_x \doteq \begin{vmatrix} hs'_0 - h's_0 - (h\sigma'_0 - h'\sigma_0 + s'_0 - s_0) z, & s'_0 v - (s'_0 - s_0) y - [\sigma'_0 v - (\sigma'_0 - \sigma_0) y] z \\ vx - uy, & -h'u + (h' - h) x + uz \end{vmatrix}, \\ D_x \doteq D_{x_0} + \delta_x z, \quad (4.10)$$

$$\delta_x = \begin{vmatrix} hs'_0 - h's_0, & -\sigma'_0 v + (\sigma'_0 - \sigma_0) y \\ vx - uy, & u \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} s'_0 v - (s'_0 - s_0) y, & h\sigma'_0 - h'\sigma_0 + s'_0 - s_0 \\ -h'u + (h' - h) x, & 0 \end{vmatrix}; \quad (4.11)$$

$$D_y \doteq \begin{vmatrix} s'_0 u - (s'_0 - s_0) x - [\sigma'_0 u - (\sigma'_0 - \sigma_0) x] z, & hs'_0 - h's_0 - (h\sigma'_0 - h'\sigma_0 + s'_0 - s_0) z \\ h'v - (h' - h) y - vz, & vx - uy \end{vmatrix}, \\ D_y \doteq D_{y_0} + \delta_y z, \quad (4.12)$$

$$\delta_y = \begin{vmatrix} hs'_0 - h's_0, & \sigma'_0 u - (\sigma'_0 - \sigma_0) x \\ vx - uy, & v \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} h\sigma'_0 - h'\sigma_0 + s'_0 - s_0, & s'_0 u - (s'_0 - s_0) x \\ 0, & h'v - (h' - h) y \end{vmatrix}. \quad (4.13)$$

Přibližné hodnoty pravých stran rovnic systému (3.8) jsou při označení (4.4) dány vzorci

$$Z_x \doteq \frac{D_{x0} + \delta_x z}{D_0 + \delta z} \doteq \frac{D_{x0}}{D_0} + \frac{\delta_x D_0 - \delta D_{x0}}{D_0^2} z, \\ Z_y \doteq \frac{D_{y0} + \delta_y z}{D_0 + \delta z} \doteq \frac{D_{y0}}{D_0} + \frac{\delta_y D_0 - \delta D_{y0}}{D_0^2} z, \quad (4.14)$$

takže je nyní možno rovnice (3.8) s přihlédnutím k označení (4.5) nahradit výslednými přibližnými vztahy

$$\frac{\partial z}{\partial x} \doteq Z_{x0} + \zeta_x z, \quad \zeta_x = \zeta_x(x, y; u, v) = \frac{\delta_x D_0 - \delta D_{x0}}{D_0^2}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} \doteq Z_{y0} + \zeta_y z, \quad \zeta_y = \zeta_y(x, y; u, v) = \frac{\delta_y D_0 - \delta D_{y0}}{D_0^2}. \quad (4.15)$$

Veličiny Z_{x0} , Z_{y0} , ζ_x a ζ_y , mající své hodnoty závislé na hodnotách proměnných x , y , u a v , je možno numericky určit podle příslušných vzorců (4.1)–(4.13).

5. Odhad vzniklých chyb

Níže uvedené vzorce jsou hlavním výsledkem naší práce. Abychom mohli lépe ocenit jejich praktickou hodnotu, budeme se v tomto odstavci zabývat výpočtem přibližné velikosti chyb, k nimž použití těchto vzorců vede.

V běžném případě stačí ve vzorcích (3.8) se omezit na zkrácený jejich tvar

$$\frac{\partial z}{\partial x} \doteq Z_{x0} = \frac{\begin{vmatrix} hs'_0 - h's_0, & s'_0 v - (s'_0 - s_0) y \\ vx - uy, & -h'u + (h' - h) x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s'_0 u - (s'_0 - s_0) x, & s'_0 v - (s'_0 - s_0) y \\ h'v - (h' - h) y, & -h'u + (h' - h) x \end{vmatrix}}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} \doteq Z_{y0} = \frac{\begin{vmatrix} s'_0 u - (s'_0 - s_0) x, & hs'_0 - h's_0 \\ h'v - (h' - h) y, & vx - uy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s'_0 u - (s'_0 - s_0) x, & s'_0 v - (s'_0 - s_0) y \\ h'v - (h' - h) y, & -h'u + (h' - h) x \end{vmatrix}}, \quad (5.1)$$

kde veličiny s_0 a s'_0 jsou dány vztahy (4.1). Tento tvar by se shodoval s rovnicemi (3.8), kdybychom v nich na pravé straně zanedbali veličinu z , jak jsme se již dříve zmínili. Z těchto rovnic je rovněž vidět, že numerické hodnoty Z_{x0} a Z_{y0} lze v daném místě snímku stanovit poměrně snadno.

Koeficienty ζ_x a ζ_y ve vztazích (4.15), jejichž výpočet dá již poněkud více práce, slouží především k odhadu velikosti chyby, již jsme se při použití vzorců (5.1) v daném bodě dopustili. Známe-li také aspoň přibližně hodnotu z v uvažovaném místě (lze ji získat předem vhodným měřením), můžeme pak použít vzorců (4.15) v plném znění a tak dostat výsledek opravený.

Udělejme si představu o chybě $\Delta\tau$, již se dopustíme při výpočtu velikosti $\tau = k\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$ největšího smykového napětí, počítáme-li je — se zřetelem ke vztahům (2.1) — podle vzorce

$$\tau = \tau_0 = k\sqrt{Z_{x0}^2 + Z_{y0}^2}, \quad (5.2)$$

k je koeficient úměrnosti ze vztahu (2.1). Podle (4.15) a (5.2) je

$$\Delta\tau \doteq \Delta\tau_0 = k[\sqrt{(Z_{x0} + \zeta_x z)^2 + (Z_{y0} + \zeta_y z)^2} - \sqrt{Z_{x0}^2 + Z_{y0}^2}]. \quad (5.3)$$

Při $z \geq 0$ je

$$|\Delta\tau_0| \leq kz\sqrt{\zeta_x^2 + \zeta_y^2}. \quad (5.4)$$

Právě provedený odhad je zřejmý z obr. 3, na němž vektor τ je nahrazen pomocným vektorem $\bar{\tau}$ určeným s týmiž chybami; symbolem $H(\Delta\tau_0)$ jsme zde označili výraz na pravé straně vztahu (5.4) (bylo zde položeno $k = 1$).

Jiný, a to přesnější odhad chyby $\Delta\tau_0$ získáme, upravíme-li výraz uvnitř hranaté závorky ve vztahu (5.3) podle Taylorova vzorce. Vychází

$$\Delta\tau_0 \doteq k \frac{\zeta_x Z_{x0} + \zeta_y Z_{y0}}{\sqrt{Z_{x0}^2 + Z_{y0}^2}} z; \quad (5.5)$$

tentokrát nejde o absolutní hodnotu, což lze při vypočtených hodnotách ζ_x a ζ_y případně použít k opravení hodnoty τ_0 , vypočtené ze vzorce (5.2).

Učiňme si rovněž představu o přesnosti stanovení směru největšího smykového napětí τ . Označme symbolem φ odchylku pomocného vektoru $\bar{\tau}$ od kladně orientované osy x (obr. 3). Omezíme-li se na přibližný výpočet této odchylky ze vzorců (5.1), dostáváme

$$\varphi \doteq \varphi_0, \quad \varphi_0 = \arccos \frac{Z_{x0}}{\sqrt{Z_{x0}^2 + Z_{y0}^2}}, \quad \varphi_0 = \arcsin \frac{Z_{y0}}{\sqrt{Z_{x0}^2 + Z_{y0}^2}}. \quad (5.6)$$

Oba vztahy určují jednoznačně odchylku φ_0 v intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Přibližná hodnota $\Delta\varphi_0$ chyby $\Delta\varphi$ odchylky φ ($\Delta\varphi \doteq \Delta\varphi_0$) je dána rozdílem

$$\Delta\varphi_0 = \arccos \frac{Z_{x0} + \zeta_x z}{\sqrt{(Z_{x0} + \zeta_x z)^2 + (Z_{y0} + \zeta_y z)^2}} - \arccos \frac{Z_{x0}}{\sqrt{Z_{x0}^2 + Z_{y0}^2}}. \quad (5.7)$$

Opět podle Taylorova vzorce dostáváme její přibližnou hodnotu

$$\Delta\varphi_0 \doteq \frac{\zeta_y Z_{x0} - \zeta_x Z_{y0}}{Z_{x0}^2 + Z_{y0}^2} z. \quad (5.8)$$

Odvozené vztahy (5.4), (5.5) a (5.8) do značné míry dovolují učinit si představu o přesnosti naší metody. Za částečnou kontrolu správného odvození těchto vztahů můžeme považovat skutečnost, že jejich pravé strany spolu s pravou stranou vztahu (5.2) vyhovují podmínce (obr. 3)

$$(\tau_0 \Delta\varphi_0)^2 + (\Delta\tau_0)^2 = [H(\Delta\tau_0)]^2, \quad (5.9)$$

jak se můžeme přesvědčiti dosazením.

6. Některé poznámky k pořízení snímků a k přesnosti získaných výsledků

Obraz síta na snímku určuje v libovolném místě profilu přímo hodnoty u a v . Při praktickém zajištění korespondence veličin x , y a u , v je proto nutno postarat se o to, aby bylo možno z pouhého snímku určit příslušná x a y , jak jich v našich výpočtech užíváme, k daným hodnotám u a v . Je tedy nutno opatřit fotografický snímek soustavou pravouhlých přímočarých souřadnic tak, aby bylo možno považovat tuto soustavu za fotografický obraz kolmého průmětu podobné soustavy na sítu do roviny nevyklenuté membrány. To je možno provést různými způsoby.

Zmíněná pravouhlá síť bude zřejmě určena, budeme-li znát přesnou polohu některého bodu, směr jedné z os (případně obou — při deformaci fotografického papíru během kopírování) a velikost délkové jednotky ve směru této osy (případně obou os). To je možno provést buď vhodným umístěním destičky s membránou již při pořízení snímku, nebo zajistit současným ofotografováním podobné sítě, umístěné v některé rovině rovnoběžně s rovinou základní. V obou případech je pochopitelně nutno provést některá pečlivá měření, na jejichž přesnosti značně závisí i přesnost našich výsledků, a příslušné pomocné výpočty. Rovněž ostatní předpoklady našeho postupu, jako je na př. kolmost optické osy k rovinám π a ρ či rovnoběžnost těchto rovin, je v praxi nutno co nejlépe splnit.

K určení velikosti a směru největšího smykového napětí podle výsledných vzorců (5.2) a (5.6) v jednom bodě je zapotřebí asi 50 jednoduchých početních úkonů (slučování, násobení či dělení vždy dvou čísel), použijeme-li přibližných vzorců (5.1). Při použití zpřesněných hodnot (4.15) se tato práce přibližně zdvojnásobí. Praktické výsledky ukazují, že zanedbání výchylky z , na základě čehož byly vzorce pro přibližný výpočet odvozeny, je zcela oprávněné. —

Vzorce (5.1) je možno za jistých okolností a při menším nároku na přesnost (na př. za účelem kontrolních výpočtů) ještě dále zjednodušit.

Potřebné výpočty je možno pohodlně provádět na logaritmickém pravítku, jehož přesnost je v souladu s přesností při běžném stanovení hodnot veličin x , y , u a v . Ize však i tímto způsobem docílit zcela uspokojivých výsledků.

Závěr

V článku jsem popsal jeden ze způsobů určení přibližné velikosti a směru největšího smykového napětí v libovolném místě průřezu kroucené prismatické tyče na základě fotografického snímku vyklenuté membrány a podal jsem odvození příslušných vzorců. Tyto vzorce byly odvozeny za předpokladu, že výchylka vyklenuté membrány je dosti malá ve srovnání se vzdáleností fotografického přístroje. Rovněž byl proveden odhad chyb způsobených zanedbáním této výchylky. Poukázal jsem dále na některé drobnosti týkající se pořizování snímků a zmínil jsem se stručně o praktických výsledcích této metody. O těchto výsledcích mám v úmyslu podat podrobnější samostatnou zprávu v některém našem časopise.¹⁾

Závěrem vyslovuji dík Ing. St. ŠTĚPÁNKOVÍ (z jehož podnětu tato práce vznikla) a Ing. J. ŠIROKÉMU za jejich ochotu, s níž mi vyšli vstříc při pořizování potřebných snímků.

LITERATURA

- [1] Kovář A.: Theorie kroucení, Praha, 1954.
- [2] Janátka J.: Nauka o pružnosti a pevnosti II. díl, Praha, 1952.
- [3] Беляев Н. М. Лабораторные работы по сопротивлению материалов, Москва -- Ленинград, 1951.
- [4] Hlavatý V.: Diferenciální geometrie křivek a ploch a tenzorový počet, Praha, 1937.
- [5] Ilkovič D.: Vektorový počet, Bratislava, 1945.

Резюме

ПРИБЛИЖЕННОЕ НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО НАПРЯЖЕНИЯ СКОЛЖЕНИЯ В ЗАКРУЧЕННОМ ПРИЗМАТИЧЕСКОМ СТЕРЖНЕ С ОБЩИМ СЕЧЕНИЕМ

ИРИЖИ КЛАТИЛ (Jiří Klátil)

(Поступило в редакцию 3/VII 1956 г.)

В статье описан способ нахождения приближенной величины и направления наибольшего напряжения скопления τ в произвольной точке

¹⁾ Činím tak v článku „Experimentální určení smykových napětí v kroucené tyči“, Strojírenství, 6 (1957).

призматического закрученного стержня с общим сечением. Приведенный метод основывается на математико-физической аналогии между напряжением τ и отклонением z мембраны m , выдвинутой над профилем, с виду схожим с профилем нагруженного стержня (рис. 1, уравнение (1.1) и (1.2)). Между указанными величинами τ и z справедливы соотношения (2.1), $k > 0$, $k = \text{const.}$ (рис. 2).

В основу расчетов положен фотографический снимок отраженной мембраной прямоугольной линейчатой сетки, расположенной в плоскости ρ , параллельной плоскости π невыдвинутой мембраны. Этот снимок позволяет найти для любой точки $T_0(x, y, 0)$ профиля к паре значений x и y соответствующие значения u и v (рис. 1). Чтобы бы можно было использовать это соответствие к нахождению величины и направления наибольшего подъема поверхности $z(x, y)$ в точке T (и тем самым к определению вектора τ), постараемся выразить вектор $\text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j}$ только при помощи величин x, y, u и v . При выводе искомых соотношений (5.1) были использованы: равенство (3.4), углы ϑ и ϑ' и условие (3.5) компланарности направлений σ, σ' и v . Так как в расчетах пренебрегается величиной z , которая на практике бывает очень малой, проводится и оценка ошибок $\Delta\tau_0$ (5.5) и $\Delta\varphi_0$ (5.8) в определении величины и направления вектора τ .

Описанным методом можно добиться вполне удовлетворительных результатов.

Résumé

DÉTERMINATION APPROXIMATIVE DE LA TENSION MAXIMUM DE CISAILLEMENT DANS UNE BARRE DE PROFIL GÉNÉRAL PRISMATIQUE TORDUE

JIRÍ KLÁTIL

(Reçu le 3 juillet 1956.)

On présente dans ce travail une méthode de détermination approximative de la grandeur et du sens de la tension maximum de cisaillement τ à un endroit quelconque d'une barre prismatique de profil général tordue. La méthode présentée est basée sur une analogie mathématique et physique existant entre la tension τ et la déviation z d'une membrane m voûtée au-dessus d'un profil semblable à celui de la barre soumise à la torsion (fig. 1, équations (1.1) et (1.2)). Les grandeurs τ et z vérifient les relations (2.1) où $k = \text{const.}$, $k > 0$ (fig. 2).

Pour base de calcul on a pris une épreuve photographique d'un réseau rectangulaire rectiligne, reflété par la membrane, le réseau étant placé dans un plan ρ

parallèle au plan π de la membrane non-voûtée. Cette photo permet de déterminer, à un endroit quelconque $T_0(x, y, 0)$ du profil, les valeurs u et v correspondant au couple de valeurs x et y (fig. 1). Afin d'utiliser cette correspondance pour déterminer la grandeur et la direction de l'accroissement maximum de la surface $z(x, y)$ au point T (et pour déterminer en même temps le vecteur τ), tâchons d'exprimer le vecteur

$$\text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j}$$

à l'aide des grandeurs x , y , u et v seulement. Pour établir les relations (5.1) on s'est servi de l'égalité (3.4) des angles ϑ et ϑ' ainsi que de la condition de complanarité des directions σ , σ' et ν . Comme la grandeur z , qui est pratiquement très petite, a été négligée, on a évalué les erreurs $\Delta\tau_0$ (5.5) et $\Delta\varphi_0$ (5.8) commises dans la détermination de la grandeur et de la direction du vecteur τ .

La méthode présentée permet d'obtenir des résultats tout à fait satisfaisants.