

# Aplikace matematiky

---

Ladislav Frýba

Nekonečně dlouhý nosník na pružném podkladě zatížený pohyblivým břemenem

*Aplikace matematiky*, Vol. 2 (1957), No. 2, 105–132

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102560>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1957

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## NEKONEČNĚ DLOUHÝ NOSNÍK NA PRUŽNÉM PODKLADĚ ZATÍŽENÝ POHYBLIVÝM BŘEMENEM

LADISLAV FRÝBA

(Došlo dne 23. července 1956.)

DT.534.11 624.042.3:625.14.03

V této práci se studuje dynamické namáhání nekonečně dlouhého nosníku na pružném podkladě, který je zatížen rovnoměrně se pohybujícím břemenem. Je podáno řešení pro případ pohyblivé síly konstantní velikosti a přibližné řešení (s odhadem chyby) pro případ pohybující se síly obecně v čase proměnné. Metoda je použita v případě, kdy se po nosníku pohybuje odpružená hmota, jejíž valící se kolo sleduje libovolnou křivku. Výsledky jsou aplikovány při studiu svislého namáhání kolejnice dynamicky zatížené: osovým tlakem, odstředivou silou protizávaží u lokomotiv a účinkem plochých kol.<sup>1)</sup>

### A. Úvod

Účelem této práce bylo objasnit otázku působení plochého kola na namáhání kolejnice. Než k tomu přistoupíme, všimneme si i účinku osových tlaků kol železničních vozidel a účinku svislé složky odstředivých sil protizávaží u hnacích kol lokomotivy.

Statické a dynamické namáhání kolejnice od osových tlaků kol je důkladně zpracováno v četné literatuře, viz na př. [14], [13], [10], [1], [4], [12]. Účinky svislé složky odstředivé síly protizávaží u hnacího kola lokomotivy počítá TIMOŠENKO v [13], avšak neuvažuje zde pohyb takto vzniklé harmonicky proměnné síly. V této práci je podáno přibližné řešení tohoto problému, které však v praktických případech je dostatečně přesné.

Literatura o namáhání kolejnice účinkem plochých kol a nerovného povrchu kolejnice je chudá. (Oba druhy namáhání jsou co do vyjádření velmi podobné, a proto je probíráme současně.) SALLER ve své práci [9] uvažuje kolo, jehož ploché místo je vytvořeno přímkou-sečnou. Takto však ploché místo ve skutečnosti nevypadá. Timošenko v [12], [13], [15] uvažuje kolejnici s nerovností

<sup>1)</sup> Poznámka: Označení v této práci je provedeno podle knihy prof. KOLOUŠKA [3].

tvary  $\frac{1}{2}a(1 - \cos \omega_1 t)$ , po níž přejíždí samotné kolo bez odpruženého vozu. SCHRAMM uvádí v [10] empirický vzorec pro ohybový moment od plochého kola bez odvození. Odvolává se při tom na teoretické zkoumání a na výsledky měření, uveřejněné v časopise „*Archiv für Eisenbahntechnik*“. Avšak tento časopis u nás není a nepodařilo se nám ho zatím opatřit.

V této práci je problém plochého kola formulován značně obecněji než ve výše uvedených člancích, avšak je řešen pro svou přílišnou složitost pouze přibližně a to jen v případě, kdy se kolo neodloučí od kolejnice (to znamená, že nenastane ráz). Je zapotřebí ještě dalšího teoretického a experimentálního zkoumání k objasnění problému.

Plochá kola vznikají na nákolcích kol železničních vozidel při brzdění tím, že se brzděné kolo zablokuje, neotáčí se a smyká se po kolejnici. Tím se kolo v místě styku s kolejnicí obrušuje a vytváří se tak zv. ploché místo zvané též „smyk“. Na obr. 6 je podélný řez plochým kolem.

Našimi předpisy [8] je dovoleno používat kol, jež nemají plochá místa hlubší než 2 mm (u lokomotiv 1 mm). Prakticky ovšem bývají hluboká 0 až 20 mm, ba dokonce i 31 mm, viz [9], [10]. Plochá místa způsobují velká přídavná namáhání kolejnic. Za větších mrazů, kdy jsou kolejnice namáhány značným tahovým napětím, mohou zavinit i zlom kolejnice. Saller uvádí v [9], že ploché kolo o délce smyku asi 30 cm způsobilo na 4 km dlouhé trati 19 lomů kolejnic. Jinde bylo zaznamenáno až 81 zlomů z téže příčiny. Z uvedených příkladů je vidět, že plochá kola působí na kolejnice velmi nepříznivě; proto je nutno se zabývat touto otázkou teoreticky i experimentálně.

## B. Nekonečně dlouhý nosník na pružném podkladě zatížený pohyblivým břemenem

### Teorie

Diferenciální rovnice příčného kmitání nosníku konstantního průřezu ležícím na pružném podkladě má tvar:

$$EJ \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + kv(x, t) = p(x, t), \quad (1)$$

kde značí:  $v(x, t)$  — průhyb nosníku v místě  $x$  a čase  $t$ ,

$E$  — modul pružnosti nosníku,

$J$  — moment setrvačnosti příčného průřezu nosníku,

$\mu$  — hmota nosníku na jednotku délky,

$k$  — koeficient podloží,

$p(x, t)$  — zatížení nosníku na jednotku délky.

Odvození této rovnice (viz na př. SNIČKO [11]) je provedeno za těchto předpokladů:

1. Platí zákon Hookův, hypotesa Navierova a princip Saint-Venantův.
2. Platí teorie malých deformací.
3. Nosník je uložen celou svou délkou na souvislém pružném podkladě a to na takovém, že při prohnutí nosníku je velikost spojitě rozložené reakce v každém průřezu nosníku úměrná průhybu v tomto průřezu. Je to tak zv. podklad Winklerův. Setrvačnost podloží se neuvažuje.
4. Neuvažuje se útlum a podélné kmitání nosníku.
5. Neuvažuje se vliv smykových napětí a setrvačných momentů na průhyb nosníku.

Rovnice (1) je obecně pro dané okrajové a počáteční podmínky jednoznačně řešitelná. Avšak pro praktické případy zatížení je obvykle řešení této rovnice velmi pracné. Ukážeme si, že velmi jednoduše lze řešit tuto rovnici v případě nekonečně dlouhého nosníku, po němž se pohybuje břemeno konstantní rychlostí.

## I. Síla v čase neproměnná pohybující se konstantní rychlostí

### a) Kvasistacionární stav.

Uvažujme případ, kdy se po nekonečně dlouhém nosníku pohybuje zatížení  $p(x, t)$  od nekonečna do nekonečna konstantní rychlostí  $c$ , aniž při tom mění svou velikost. Pak je výhodné zavést místo souřadné soustavy  $x, t, v$  soustavu souřadnou  $\xi, v$  pohybující se se zatížením konstantní rychlostí  $c$ . Vztah mezi původní a novou souřadnou soustavou je dán rovnicí:

$$\xi = x - ct. \quad (2)$$

Pak za předpokladu, že  $v(x, t) = v(\xi)$ , přejde parciální diferenciální rovnice (1) v obyčejnou diferenciální rovnici:

$$EJ \frac{d^4 v(\xi)}{d\xi^4} + \mu c^2 \frac{d^2 v(\xi)}{d\xi^2} + kv(\xi) = p(\xi). \quad (3)$$

Pozorovatel, který by se pohyboval rovnoměrnou rychlostí  $c$  společně se souřadným systémem  $\xi, v$ , nepozoroval by žádné kmitání nosníku. Takto nastává tak zv. kvasistacionární stav, který tedy znamená, že nosník je vzhledem k pohyblivé souřadné soustavě v relativním klidu.

Přesněji řečeno je kvasistacionární stav definován takto: zatížení  $p(\xi)$  se pohybuje rovnoměrnou rychlostí po nosníku, ale samo závisí jen na  $\xi$ , nikoli již na čase  $t$ . Řešení r. (1)  $v(x, t)$  závisí pak jen na  $\xi$ ,  $v(x, t) = v(\xi)$ . Řešení r. (3) je partikulárním integrálem r. (1) a vyjadřuje tak vlastně vynucené kmitání ustálené; nespĺňuje sice počáteční podmínky, ale lze ukázat, že v poměrně krátkém časovém intervalu po začátku působení pohyblivé síly nastává s dostatečnou přesností kvasistacionární stav.

Předpokládejme nyní, že se po nosníku pohybuje osamělé břemeno  $P$ . Pak zatížení  $p(x, t)$  z r. (1) má tento tvar:

$$p(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{pro} & x < ct - \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{P}{\varepsilon} & \text{pro} & ct - \frac{\varepsilon}{2} < x < ct + \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{pro} & x > ct + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \quad (4)$$

Při tom  $\lim \varepsilon \rightarrow 0$ . Kvůli stručnosti budeme takovéto zatížení v této práci označovat takto:

$$p(x, t) = \delta(\xi) \cdot P, \quad (5)$$

kde  $\delta(\xi)$  je t. zv. Diracovou funkcí (což je derivace nespojitě funkce po částech konstantní se skokem v místě břemene rovným jedné).

b) *Osamělé břemeno pohybující se konstantní rychlostí.*

Řešme tuto základní úlohu: *nekonečně dlouhý nosník na pružném podkladě je zatížen osamělým břemenem konstantní velikosti  $P$ , které se pohybuje po nosníku od nekonečna do nekonečna rovnoměrnou rychlostí  $c$ .* Máme zjistit:

průhybovou čáru nosníku  $v(x, t)$ , dále sklon  $\frac{\partial v(x, t)}{\partial x}$ , ohybový moment

$M(x, t) = -EJ \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}$  a posouvající sílu  $T(x, t) = -EJ \frac{\partial^3 v(x, t)}{\partial x^3}$  v každém

průřezu nosníku za předpokladů, které jsou uvedeny na začátku kap. B.<sup>2)</sup>

Tuto úlohu řeší rovnice (1) a příslušné okrajové a počáteční podmínky, které předepíšeme tímto způsobem: v každém okamžiku je průhyb  $v(x, t)$  a sklon průhybové čáry  $\partial v(x, t)/\partial x$  v nekonečně velké vzdálenosti vpravo i vlevo od břemene  $P$  roven nule. Pod břemenem  $P$  (tak jako v kterémkoli jiném průřezu) jsou v každém okamžiku průhybová čára  $v(x, t)$ ,  $\partial v(x, t)/\partial x$  a  $\partial^2 v(x, t)/\partial x^2$  funkce spojité a v posouvající síle je v tomto bodě skok rovný hodnotě břemene  $P$ . Při této úloze nastává kvasistacionární stav. Úloha je řešena v [4] a zde jen shrneme výsledky:

Řešení r. (3) s pravou stranou dle (5) je:

$$v(x, t) = v(\xi) = \frac{P}{8\alpha\beta^2\gamma EJ} e^{-\alpha|\xi|} (\gamma \cos \gamma\xi + \alpha \sin \gamma|\xi|) = \bar{v}(\xi) \cdot P. \quad (6)$$

Dosadíme-li sem za  $\xi$  výraz  $x - ct$  dle r. (2), dostaneme partikulární řešení  $v(x, t)$  rovnice (1) s pravou stranou (4). V r. (6) značí:

$$\alpha = \sqrt{\beta^2 - \frac{\mu c^2}{4EJ}}; \quad \gamma = \sqrt{\beta^2 + \frac{\mu c^2}{4EJ}}; \quad \beta^4 = \frac{k}{4EJ}. \quad (7) \quad (8) \quad (9)$$

<sup>2)</sup> Získat funkce  $v(x, t)$ ,  $M(x, t)$  a  $T(x, t)$  z uvedených předpokladů je cílem ve všech úlohách v této práci řešených.

Řešení platí pouze pro  $\alpha$  reálné, musí totiž být  $\beta^2 - \frac{\mu c^2}{4EJ} > 0$ . Z toho vychází podmínka pro rychlost  $c$ :

$$c < c_{kr}; \quad c_{kr} = \beta \sqrt{\frac{4EJ}{\mu}}. \quad (10)$$

Pro  $c \geq c_{kr}$  je nutno vzít v úvahu útlum při kmitání nosníku; o tom viz [2] a [4]. Avšak v praktických případech je kritická rychlost  $c_{kr}$  podle (10) velmi vysoká, takže jí není možno dosáhnout (viz kap. C. I. a).

Sklon, ohybový moment a posouvající sílu v každém průřezu nosníku vypočteme derivováním r. (6):

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = \frac{dv(\xi)}{d\xi} = -\frac{P}{4\alpha\gamma EJ} e^{-\alpha|\xi|} \sin \gamma\xi = \bar{\xi}(\xi) \cdot P, \quad (11)$$

$$M(x, t) = M(\xi) = \frac{P}{4\alpha\gamma} e^{-\alpha|\xi|} (\gamma \cos \gamma\xi - \alpha \sin \gamma|\xi|) = \bar{M}(\xi) \cdot P, \quad (12)$$

$$T(x, t) = T(\xi) = -\frac{P}{4\alpha\gamma} e^{-\alpha|\xi|} [(\gamma^2 - \alpha^2) \sin \gamma\xi + \\ + \operatorname{sgn} \xi \cdot 2\alpha\gamma \cos \gamma\xi] = \bar{T}(\xi) \cdot P. \quad (13)$$

c) *Vliv setrvačnosti při kvasistacionárním stavu.*

V rovnici (1) jsme brali zatížení  $p(x, t)$  pouze s jeho silovými účinky. Avšak každé zatížení působí dynamicky ještě svými setrvačnými účinky, jak je to vyjádřeno principem D'Alembertovým. Pro zatížení pohybující se konstantní rychlostí  $c$  bereme pravou stranu r. (1) ve tvaru (viz [7]):

$$p(x, t) - m_p \frac{d^2v(ct, t)}{dt^2}, \quad (14)$$

kde  $m_p$  je hmota zatížení  $p(x, t)$ .

Uvažujeme-li nyní kvasistacionární stav, pro nějž platí  $v(x, t) = v(\xi)$ ,  $\xi = x - ct$ , snadno vypočteme, že druhá derivace z r. (14) je pro všechna  $\xi$  rovna nule:  $d^2v(ct, t)/dt^2 = 0$ .

Z toho vyplývá důležitý poznatek: *při kvasistacionárním stavu — zatížení nepůsobí žádnými setrvačnými silami.*<sup>3)</sup>

<sup>3)</sup> V [4] je mylně uvedeno, že druhá derivace z r. (14) je rovna  $c^2 \cdot d^2v(\xi)/d\xi^2$ , čímž autoři došli k nesprávným závěrům o vlivu setrvačnosti pohybujícího se osamělého břemene na nekonečně dlouhý nosník na pružném podkladě. Odvodili totiž, že v tomto případě je kritická rychlost značně menší a tím i nebezpečnější, protože je dosažitelná i v praktických případech.

## II. Síla obecně v čase proměnná pohybující se konstantní rychlostí

### a) Přibližné řešení.

Budeme nyní řešit složitější úlohu: *nekonečně dlouhý nosník na pružném podkladě je zatížen osamělým břemenem  $Q(t)$ , obecně v čase proměnným, které se pohybuje po nosníku od nekonečna do nekonečna rovnoměrnou rychlostí  $c$ .*

Tuto úlohu řeší opět diferenciální rovnice (1), jejíž pravá strana je

$$p(x, t) = \delta(\xi) \cdot Q(t) \quad (15)$$

a příslušné okrajové a počáteční podmínky. Pro tento případ lze odvodit přibližné řešení, jestliže na něj aplikujeme kvasistacionární stav vyložený v předchozích odstavcích. Musíme se ovšem na konec přesvědčit, zda chyba, které se dopustíme tímto přibližným řešením, není příliš velká.

Při odvození přibližného řešení budeme postupovat stejně jako v úloze v odst. B. I. b).

Přibližné řešení rovnice (1) s pravou stranou (15) je analogicky jako u kvasistacionárního stavu:

$$v(x, t) = \frac{Q(t)}{8\alpha\beta^2\gamma EJ} e^{-\alpha|\xi|} (\gamma \cos \gamma\xi + \alpha \sin \gamma|\xi|) = \bar{v}(\xi) \cdot Q(t), \quad (16)$$

kde  $\xi = x - ct$  a platí r. (7) až (10). Pak také:

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = \bar{\zeta}(\xi) \cdot Q(t), \quad M(x, t) = \bar{M}(\xi) \cdot Q(t), \quad (17) \quad (18)$$

$$T(x, t) = \bar{T}(\xi) \cdot Q(t). \quad (19)$$

### b) Odhad chyby.

Podmínkou kvasistacionárního stavu bylo, že zatížení se vzhledem k pohyblivé souřadné soustavě neměnilo. Jestliže bylo aplikováno řešení takové úlohy i pro případ, kdy se zatížení vzhledem k pohyblivé souřadné soustavě v čase mění, dopouštíme se tím jisté chyby. Naše přibližné řešení (16) této úlohy splňuje okrajové podmínky; avšak přesné řešení také musí vyhovovat původní rovnici:

$$EJ \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + kv(x, t) = \delta(\xi) \cdot Q(t). \quad (20)$$

Ale této rovnici naše řešení (16) nevyhovuje. Dosadíme-li výraz (16) do levé strany r. (20), dostaneme jakési zatížení  $p(x, t)$  na jednotku délky:

$$p(x, t) = \kappa\mu e^{-\alpha|\xi|} \left[ \ddot{Q}(t) \gamma \cos \gamma\xi + \left( \ddot{Q}(t) + \operatorname{sgn} \xi \cdot 4\dot{Q}(t) \frac{c\beta^2}{\alpha} \right) \alpha \sin \gamma|\xi| \right], \quad (21)$$

kde

$$\kappa = \frac{1}{8\alpha\beta^2\gamma EJ}; \quad \dot{Q}(t) = \frac{dQ(t)}{dt}; \quad \ddot{Q}(t) = \frac{d^2Q(t)}{dt^2}.$$

Výraz (21) představuje vlastně zatížení v místě  $i$  v čase proměnné, které zatěžuje nosník kromě našeho daného břemene  $Q(t)$ . Jestliže je zatížení  $p(x, t)$  podle r. (21) „dostatečně malé“ (správně by mělo být nulové), můžeme r. (16) považovat za přibližné řešení naší úlohy. K tomu je nutno vysvětlit pojem „dostatečně malé“ zatížení: zatížení  $p(x, t)$  dle r. (21) musíme nějakým způsobem srovnat s břemenem  $Q(t)$ , jehož působení na nosník chceme vypočítat. Toto srovnání lze provést několika způsoby, z nichž nejjednodušší je tento:

Břemeno  $Q(t)$  — jako každou fyzikální veličinu — určíme nikoli absolutně přesně, nýbrž s jistou přesností  $\pm q\%$ . Jestliže celková hodnota zatížení  $p(x, t)$  podle (21) na celém nosníku je v každém okamžiku menší než chyba, které se dopustíme, bereme-li břemeno  $Q(t)$  s přesností  $\pm q\%$ , pak můžeme tvrdit, že řešení (16) je dostatečně přesné. Toto srovnání matematicky vyjádřené vypadá takto:

$$+ \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(x, t) dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq |qQ(t)|. \quad (22)$$

(Tím, že bereme  $p(x, t)$  ve druhé mocnině, odstraňujeme vliv případného záporného  $p(x, t)$ .) V praktických případech však úplně postačí toto kritérium:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t) dx \right| \leq |qQ(t)|, \quad (23)$$

protože účinek opačných znamének u  $p(x, t)$  je vlivem exponenciální funkce velmi malý. Dosadíme-li sem za  $p(x, t)$  hodnotu z r. (21) (bez ohledu na  $\operatorname{sgn} \xi$ ) a vypočteme-li příslušné integrály, obdržíme podmínku:

$$\left| \frac{\mu}{k} \left[ \ddot{Q}(t) + 2\dot{Q}(t) \frac{c\beta^2}{\alpha} \right] \right| \leq |qQ(t)|. \quad (24)$$

K tomu je nutno ještě poznamenat, že výraz (21) — jako spojité zatížení — nahrazuje při našem přibližném řešení osamělé břemeno  $Q(t)$  a že toto nahrazení můžeme učinit s dostatečnou přesností proto, protože se  $p(x, t)$  vlivem exponenciální funkce roznáší na poměrně malém úseku nosníku.

Tedy závěrem: úlohu zadanou v odst. a) řeší přibližně r. (16). Chyba, které se dopouštíme tímto přibližným řešením, není větší než chyba v břemenu  $Q(t)$  zadaném s přesností  $\pm q\%$ , jestliže platí nerovnost (24). Úsilí o větší přesnost, vycházíme-li již z přibližných předpokladů, by byla celkem zbytečná. Ovšem číselné srovnání v každém daném konkrétním případě  $Q(t)$  je nutné, abychom se nedopustili větších chyb.



c) *Vliv setrvačnosti.*

Protože v nynějším případě pohyblivé síly  $Q(t)$  obecně v čase proměnné nejde již o kvasistacionární stav, je nutno vzít v úvahu i setrvačné účinky břemene. Pravá strana r. (1) má pak tvar:

$$p(x, t) = \delta(\xi) \left[ Q(t) - m_Q \frac{d^2 v(ct, t)}{dt^2} \right], \quad (25)$$

kde  $m_Q$  je hmota břemene  $Q(t)$ .

Řešení rovnice (1) s pravou stranou (25) budeme předpokládat podobně jako u r. (16) ve tvaru

$$v(x, t) = \bar{v}(\xi) \cdot \bar{Q}(t), \quad (26)$$

což je vlastně přibližné (ve smyslu odst. b) řešení případu, kdy se po nosníku pohybuje síla  $\bar{Q}(t)$ , u které zanedbáváme setrvačné účinky. Myšlenou sílu  $\bar{Q}(t)$  určíme z podmínky, že posouvající síla řešení (26) pro  $\xi = 0$  bude rovna síle, která se po nosníku skutečně pohybuje:

$$\bar{Q}(t) = Q(t) - m_Q \frac{d^2 v(ct, t)}{dt^2}.$$

Do této rovnice dosadíme za  $d^2 v(ct, t)/dt^2$  příslušnou derivaci r. (26), totiž  $\ddot{\bar{Q}}(t) \cdot \bar{v}_0$ . Zde  $\bar{v}_0 = [\bar{v}(\xi)]_{\xi=0} = 1/8\alpha\beta^2 EJ$ . Pak nám z této podmínky vychází diferenciální rovnice

$$\bar{Q}(t) = Q(t) - m_Q \bar{v}_0 \ddot{\bar{Q}}(t),$$

jejíž řešení je:

$$\bar{Q}(t) = \omega_Q \int_0^t Q(\tau) \sin \omega_Q(t - \tau) d\tau + C_1 \cos \omega_Q t + C_2 \sin \omega_Q t, \quad (27)$$

kde  $\omega_Q^2 = 1/m_Q \bar{v}_0$  a  $C_1, C_2$  jsou integrační konstanty, které určíme z počátečních podmínek.

Tímto způsobem jsme velmi jednoduchým obratem převedli *případ břemene  $Q(t)$  a jeho setrvačných účinků na nosník na případ pohyblivé síly  $\bar{Q}(t)$  bez setrvačných účinků.*

Řešení (26), kam za  $\bar{Q}(t)$  dosadíme (27), je ovšem přibližné ve smyslu odst. b), a proto bychom se museli na konec přesvědčit podle kriteria (24), zda se tímto nedopouštíme nepřípustné chyby. Sklon průhybové čáry, ohybový moment a posouvající sílu v každém průřezu nosníku bychom dostali derivováním r. (26) podobně, jak to bylo provedeno v předchozích odstavcích.

### III. Odpružená hmota jejíž valící se kolo sleduje křivku $f(t)$

Nyní se budeme zabývat takovouto úlohou: *po nekonečně dlouhém nosníku na pružném podkladě se pohybuje od nekonečna do nekonečna konstantní rychlostí  $c$*

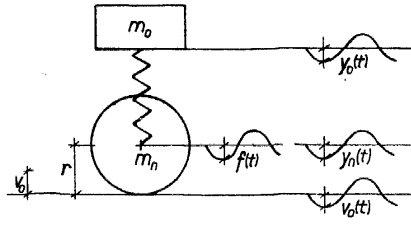
hmota  $m_n$ , jež na peru nese odpruženou hmotu  $m_0$ . Vzdálenost těžiště hmoty  $m_n$  (kola) od nosníku se při tomto pohybu mění o  $f(t)$ , viz obr. 1. To může být způsobeno na př. vlivem nerovností na obvodu kola nebo nerovnostmi na jízdni dráze a pod.

a) Předpoklady úlohy.

Předpoklady pro nosník na pružném podkladě, uvedené na začátku kap. B., platí i v tomto případě. Kromě nich předpokládáme ještě:

1. Odpružené břemeno má váhu  $P_0$  a hmotu  $m_0$ , kde  $m_0 = P_0/g$ . Neodpružené břemeno má váhu  $P_n$  a hmotu  $m_n$ , kde  $m_n = P_n/g$ . Při tom platí:  $P = P_0 + P_n$ .

2. Soustava dvou hmotných bodů  $m_n$  a  $m_0$  se pohybuje přímočaře vodorovně konstantní rychlostí  $c$  a kromě toho těžiště hmotného bodu  $m_n$  vykonává nucený pohyb podle křivky  $f(t)$ , závislé pouze na čase. Časové rozvinutí této křivky je na obr. 1, kde kladný směr  $f(t)$  je dolů. O křivce  $f(t)$  předpokládáme, že je to funkce spojitá, má spojitou první derivaci  $\dot{f}(t)$  a že existuje její druhá derivace  $\ddot{f}(t)$ .



Obr. 1.

3. Za předpokladu, že se  $m_n$  dotýká nosníku, vzniká vlivem přítomnosti  $f(t)$  jistá síla  $Q(t)$ , jakési dynamické přitížení, jehož kladný směr na nosník je směrem dolů a na  $m_n$  směrem nahoru.  $Q(t)$  je osamělé břemeno, obecně v čase proměnné (jeho časový průběh však dosud neznáme), které se pohybuje konstantní rychlostí po nosníku.

4. Mezi kolem a nosníkem působí při  $f(t) = 0$  síla  $P$ ; je-li  $f(t) \neq 0$ , přistupuje tam ještě síla  $Q(t)$ . Nosník je pak zatížen silou  $P + Q(t)$ . Je-li  $P + Q(t) > 0$ , dotýká se kolo nosníku; je-li  $P + Q(t) = 0$ , nepůsobí kolo žádným tlakem na nosník. Příklad  $P + Q(t) < 0$  nemůže nastat.

5. Je-li  $f(t) = 0$ , pohybuje se  $m_n$  a  $m_0$  po vodorovné přímce a nosník má pod pohybujícím se břemenem  $P$  konstantní průhyb  $v_0$  (viz obr. 1). Je-li  $f(t) \neq 0$ , pohybuje se  $m_n$  po křivce  $y_n(t)$ ,  $m_0$  po křivce  $y_0(t)$  a nosník má pod břemenem přídavný průhyb  $v_0(t)$ . Kladné směry jsou ve všech případech dolů (viz obr. 1).

6. Kolo, pod kterým si představujeme neodpruženou hmotu  $m_n$ , má poloměr  $r$  a je absolutně tuhé, nedeformuje se.

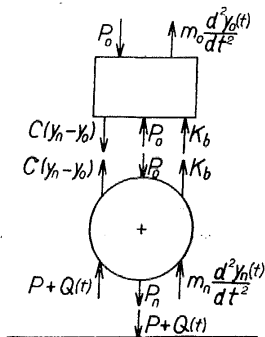
7. Pružné pero spojující hmoty  $m_n$  a  $m_0$  má pérovou konstantu  $C$ , jež znamená sílu, které je třeba ke stlačení pera o jednotku délky.

8. V peru nastává vlivem smykového tření síla  $K_b$ , která vždy směřuje proti pohybu. Má tedy vždy opačné znaménko než výraz  $\dot{y}_n(t) - \dot{y}_0(t)$ . Přesné

analytické vyjádření smykového tření je velmi složité, a proto zde budeme postupovat podle [3] tak, že na konec vždy připojíme konstantní tlumící sílu  $\pm K_b$ .

9. Předpokládáme okamžité působení pera. Jistá jeho setrvačnost se neuvazuje.

Naším cílem je vypočítat:  $v(x, t)$ ,  $M(x, t)$  a  $T(x, t)$  v každém průřezu nosníku zatíženého výše uvedeným způsobem. Proto musíme zjistit také neznámé funkce  $Q(t)$ ,  $y_n(t)$  a  $y_0(t)$ .



Obr. 2.

b) *Přibližné řešení.*

Pro čtyři neznámé funkce  $v(x, t)$ ,  $Q(t)$ ,  $y_n(t)$ ,  $y_0(t)$  sestavíme čtyři rovnice:

1. Rovnice rovnováhy sil působících na hmotu  $m_0$ . Viz r. (28).

2. Rovnice rovnováhy sil působících na hmotu  $m_n$ . Viz r. (29).

V obou případech 1. a 2. musí být součet všech sil působících na  $m_0$  a na  $m_n$  roven nule, viz obr. 2. Pro sestavení těchto rovnic předpokládáme  $P + Q(t) > 0$ .

3. Pro nosník platí diferenciální rovnice rovnováhy elementu nosníku podle r. (1), kde pravá strana má tvar (5) a (15). Nosník je totiž zatížen pohybujícími se břemeny  $P$  a  $Q(t)$ , jako dynamickým přitížením vlivem přítomnosti  $f(t)$ . Viz r. (30).

4. Z předpokladu, že se kolo dotýká nosníku, vyplývá čtvrtá rovnice:

$$r + v_0(t) = y_n(t) + r - f(t).$$

Odtud pak r. (31):

$$P_0 - m_0 \frac{d^2 y_0(t)}{dt^2} + C[y_n(t) - y_0(t)] - P_0 - \operatorname{sgn} [\dot{y}_n(t) - \dot{y}_0(t)] K_b = 0, \quad (28)$$

$$P_n - m_n \frac{d^2 y_n(t)}{dt^2} - C[y_n(t) - y_0(t)] + P_0 - \operatorname{sgn} [\dot{y}_n(t) - \dot{y}_0(t)] K_b - [P + Q(t)] = 0, \quad (29)$$

$$EJ \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + kv(x, t) = \delta(\xi) [P + Q(t)], \quad (30)$$

$$v_0(t) = y_n(t) - f(t). \quad (31)$$

Při odvození rovnic (28) až (31) jsme předpokládali  $P + Q(t) > 0$ . Pak se ruší síly  $P_0$  a  $-P_0$  v r. (28) a síly  $P_n + P_0$  a  $-P$  v r. (29). Je-li  $P + Q(t) = 0$ , v r. (29) zůstává  $P_n + P_0$ , v r. (30) je na pravé straně nula a r. (31) pozbývá platnosti, protože pak je  $v_0(t) \geq y_n(t) - f(t)$ .

Zahrnují tedy rovnice (28) až (31) oba možné případy, ale vyřešeny jsou v této práci jen pro  $P + Q(t) > 0$ . V praxi se může stát případ, že po určité době je  $P + Q(t) > 0$ , při tom se kolo dotýká nosníku. Ale pak se stane  $P + Q(t) = 0$ . To potrvá tak dlouho až se zase kolo dotkne nosníku a nabude platnosti r. (31). Při tomto dotyku nastane ráz kola na nosník. Postupným používáním r. (28) až (31) pro  $P + Q(t) > 0$  a pro  $P + Q(t) = 0$  bychom tedy vypočetli i takovýto případ. Ovšem poměry při rázu, který by zde nastal, jsou poněkud jiné a nebudeme se v této práci o nich šířit.

Řešme tedy simultánní diferenciální rovnice (28) až (31) pro  $P + Q(t) > 0$ . Předpokládejme na okamžik, že již známe funkci  $Q(t)$ . Pak řešení rovnice (30) je součtem rovnic (6) a (16), protože r. (30) je lineární diferenciální rovnicí, pro kterou platí zákon superposice. Je to ovšem řešení přibližné ve smyslu odst. B. II. b). Průhybová čára nosníku je tedy:

$$v(x, t) = \bar{v}(\xi) \cdot [P + Q(t)]. \quad (32)$$

Při označení  $[\bar{v}(\xi)]_{\xi=0} = \bar{v}_0$  je průhyb pod pohyblivým břemenem:

$$[v(x, t)]_{x=ct} = v_0 + v_0(t) = \bar{v}_0 P + \bar{v}_0 Q(t). \quad (33)$$

Sklon průhybové čáry, ohybový moment a posouvající sílu dostaneme obdobně jako v r. (32) součtem příslušných r. (11) až (13) a (17) až (19).

Nyní nám zbývá určit funkce  $Q(t)$ ,  $y_n(t)$  a  $y_0(t)$ . Ty stanovíme z r. (28), (29) a (31). Současné řešení těchto simultánních diferenciálních rovnic je zdlouhavé a nepřehledné. Budeme je řešit postupnými aproximacemi. Všimneme si totiž, že v praktických případech je břemeno  $m_0$  mnohokrát větší než  $m_n$ . Z toho plyne, že  $y_0(t)$  bude malé. Vezměme tedy jako první aproximaci  $y_0(t) = 0$  v r. (29). Vyřešením takto upravené r. (29) dostaneme:

$$y_n(t) = -\frac{1}{m_n \omega_n} \int_0^t Q(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \mp y_k + C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t, \quad (34)$$

kde

$$\omega_n^2 = \frac{C}{m_n}, \quad (35)$$

$$y_k = \frac{K_b}{C}$$

a  $C_1$ ,  $C_2$  jsou integrační konstanty. Řešení (34) platí pro  $\omega_n \neq j\omega_1$ ,  $\omega_n \neq \omega_2$ , předpokládáme-li, že  $Q(t)$  je složeno z harmonických funkcí o kruhové frekvenci  $j\omega_1$  resp.  $\omega_2$ .<sup>4)</sup>

Druhou rovnici pro  $y_n(t)$  obdržíme z r. (31) za pomoci (33):

$$y_n(t) = v_0(t) + f(t) = \bar{v}_0 Q(t) + f(t). \quad (36)$$

<sup>4)</sup> Viz kap. C. III. b);  $j = 1, 2, 3, \dots$

Srovnáním r. (34) a (36) dostaneme integrální rovnici Volterrova typu pro neznámou funkci  $Q(t)$ . Jejím vyřešením dostaneme:

$$Q(t) = -\frac{1}{v_0 \omega_2} \int_0^t [\omega_n^2 f(\tau) + \ddot{f}(\tau)] \sin \omega_2(t - \tau) d\tau \mp \frac{K_b}{1 + C v_0} + \\ + A \cos \omega_2 t + B \sin \omega_2 t, \quad (37)$$

kde

$$\omega_2^2 = \omega_n^2 \left( 1 + \frac{1}{C v_0} \right) \quad (38)$$

a  $A$ ,  $B$  jsou integrační konstanty. Jsou-li  $f(t)$  a  $\ddot{f}(t)$  složeny z harmonických funkcí o kruhové frekvenci  $j\omega_1$ , platí (37) při  $\omega_2 \neq j\omega_1$ .<sup>4)</sup>

Tím je první aproximace pro určení  $Q(t)$ ,  $y_n(t)$  a  $y_0(t)$  hotova. Při druhém přiblížení dosadíme  $y_n(t)$  z r. (34) nebo (36) do r. (28), z níž vypočteme druhou aproximaci pro  $y_0(t)$ :

$$y_0(t) = \omega_0 \int_0^t y_n(\tau) \sin \omega_0(t - \tau) d\tau \mp y_k + C_3 \cos \omega_0 t + C_4 \sin \omega_0 t, \quad (39)$$

kde

$$\omega_0^2 = \frac{C}{m_0}, \quad (40)$$

$\omega_0 \neq j\omega_1$ ,  $\omega_0 \neq \omega_2$ ,  $\omega_0 \neq \omega_n$  za předpokladu, že  $y_n(t)$  je složena z harmonických funkcí o kruhových frekvencích  $j\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_n$ <sup>4)</sup> a  $C_3$ ,  $C_4$  jsou integrační konstanty.

Rovnici (39) bychom dosadili do (29) a celý postup bychom znovu opakovali a tak bychom se postupně blížili přesným hodnotám  $Q(t)$ ,  $y_n(t)$  a  $y_0(t)$ . Integrační konstanty z r. (34), (37) a (39) dostaneme z počátečních podmínek při konkrétní úloze a daném  $f(t)$ .

Rovnicemi (32), (36), (37) resp. i (39) je naše úloha rozřešena (aspoň v první aproximaci). Na konec se nesmíme zapomenout přesvědčit podle podmínky (24), zda naše přibližně řešení r. (30) při  $Q(t)$  daném rovnicí (37) je dostatečně přesné.

### C. Aplikace

#### Svislé namáhání kolejnice

Existuje několik způsobů výpočtu namáhání kolejnice — této nejdůležitější části železničního svršku. Za nejmodernější je nyní považována teorie Timošenkova (viz [12] až [14], [1]), která považuje kolejnici za nekonečně dlouhý nosník na pružném podkladě Winklerově. Toto zjednodušení vlivu uložení kolejnice je na místě, uvážíme-li, že podklad je fyzikálně velmi různorodý

a matematicky téměř nevystihnutelný. Spojité pružné podloží je jakýmsi statistickým průměrem všech proměnlivých okolností, které se zde vyskytují. Výsledky experimentálního měření potvrzují oprávněnost Timošenkovy teorie. Proto jsme přijali takovouto idealisaci kolejnice i v naší práci.

## I. Osový tlak železničních vozidel

Osový tlak kola  $P$  železničního vozidla, které pojíždí rychlostí  $c$  po kolejnici, si můžeme představit jako osamělé břemeno  $P$ , které se pohybuje konstantní rychlostí po nosníku. Vidíme, že je to případ probraný v kap. B. I. Pro kolejnice namáhanou osovým tlakem kola  $P$  tedy platí r. (6) až (13).

### a) Vliv rychlosti $c$ .

Všimněme si vlivu rychlosti  $c$  na rovnice (6) až (13). Při těchto úvahách (i v celé této kap. C.) budeme počítat s železničním svrškem soustavy  $T$ , kde kolejnice má  $J = 1862 \text{ cm}^4$ ,  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$  a hmotu nosníku (kolejnice, drobné kolejivo a dřevěné pražce o vzdálenosti 65 cm) na jednotku délky béréme  $\mu = 1,275 \cdot 10^{-3} \text{ kg sec}^2 \text{ cm}^{-2}$ .

Odvodili jsme v kap. B. I. b), že řešení (6) platí jen v tom případě, když rychlost  $c$  je menší než kritická rychlost  $c_{kr}$ , daná rovnicí (10). Pro svršek soustavy  $T$  a pro různé hodnoty  $k$  jsou kritické rychlosti  $c_{kr}$  udány na obr. 3. Odtud vidíme, že jsou to rychlosti velmi vysoké, které se v dnešním železničním provozu nevyskytují.

Z podrobnějšího zkoumání vlivu rychlosti (viz [16]) plyne velmi důležitý závěr: *pro běžné rychlosti do 300 km/hod. je vliv rychlosti zanedbatelný.* Dopustíme se tím chyby maximálně 2 až 3%; tedy dostaneme výsledky s velmi dobrou přesností.

Důsledkem toho je, že můžeme pro běžné rychlosti přibližně brát:

$$\alpha \doteq \gamma \doteq \beta; \quad \bar{v}_0 \doteq \tilde{v}_0; \quad \bar{M}_0 \doteq \tilde{M}_0,$$

kde

$$\bar{v}_0 = \frac{1}{8\alpha\beta^2 EJ}; \quad \tilde{v}_0 = \frac{1}{8\beta^3 EJ}; \quad \bar{M}_0 = \frac{1}{4\alpha}; \quad \tilde{M}_0 = \frac{1}{4\beta}.$$

Pak rovnice (6), (11) až (13) mají tvar:

$$v(x, t) = v(\xi) = \frac{P}{8\beta^3 EJ} e^{-\beta|\xi|} (\cos \beta\xi + \sin \beta|\xi|) = \tilde{v}(\xi) \cdot P, \quad (41)$$

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = \frac{dv(\xi)}{d\xi} = -\frac{P}{4\beta^2 EJ} e^{-\beta|\xi|} \sin \beta\xi = \tilde{\zeta}(\xi) \cdot P, \quad (42)$$

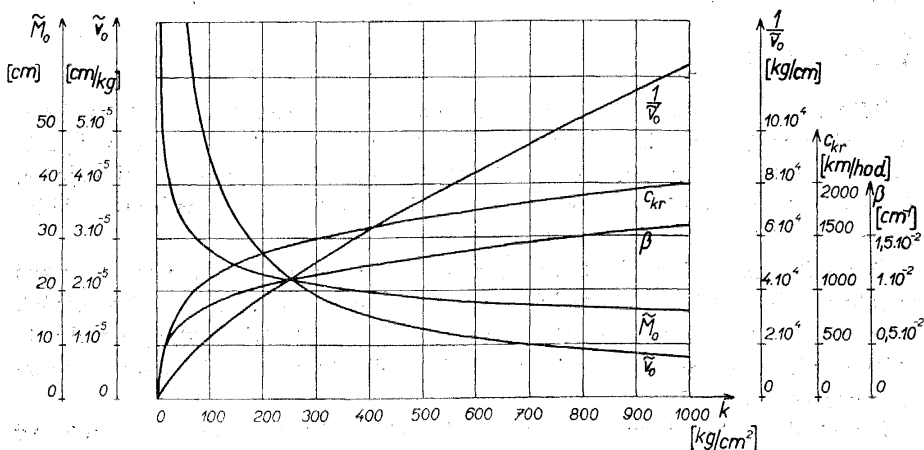
$$M(x, t) = M(\xi) = \frac{P}{4\beta} e^{-\beta|\xi|} (\cos \beta\xi - \sin \beta|\xi|) = \tilde{M}(\xi) \cdot P, \quad (43)$$

$$T(x, t) = T(\xi) = -\operatorname{sgn} \xi \cdot \frac{P}{2} e^{-\beta|\xi|} \cos \beta\xi = \tilde{T}(\xi) \cdot P. \quad (44)$$

Tím jsme dospěli k řešení, které pro  $\xi = x$  souhlasí s Timošenkovým statickým řešením nekonečně dlouhého nosníku na pružném podkladě zatíženém nepohyblivým osamělým břemenem (viz [14]). Tam je také možno nalézt tabelované a vyobrazené funkce  $\tilde{v}(\xi)$ ,  $\tilde{\zeta}(\xi)$ ,  $\tilde{M}(\xi)$ ,  $\tilde{T}'(\xi)$ . Funkce  $\tilde{v}(\xi)/\tilde{v}_0$  a  $\tilde{M}(\xi)/\tilde{M}_0$  jsou graficky znázorněny též v autorově práci [16].

b) Vliv koeficientu podloží  $k$ .

Největší námitkou proti všem přesnějším výpočtům namáhání kolejnice je argument, že koeficient podloží má velmi proměnné hodnoty a že ho tedy



Obr. 3

není možno dostatečně přesně určit. Podívejme se podrobněji, jaký vliv má  $k$  na naše řešení (41) až (44). (Viz též v [16].)

Pro různé hodnoty  $k$  od 50 do 1000 kg/cm<sup>2</sup> byly při svršku  $T$  vypočteny hodnoty  $\beta$ ,  $\tilde{v}_0$ ,  $\frac{1}{\tilde{v}_0}$ ,  $\tilde{M}_0$ ,  $c_{kr}$  a graficky jsou znázorněny na obr. 3.

Můžeme očekávat, že koeficient  $k$  se nám nepodaří určit s větší přesností než  $\pm 100$  kg/cm<sup>2</sup>. Díváme-li se s tohoto hlediska na obr. 3, vidíme, že tato nepřesnost v určení  $k$  má velký vliv pouze na  $\tilde{v}_0$  a  $\frac{1}{\tilde{v}_0}$  pro  $k$  od 100 asi do 400 kg/cm<sup>2</sup>. U ostatních funkcí to způsobí chyby ve stavební praxi ještě přijatelné.

Protože pro namáhání kolejnice není rozhodující průhyb, nýbrž napětí, které určujeme z ohybového momentu, vyplývá nám důležitý závěr: *napětí v ohybu kolejnice určíme dostatečně přesně pomocí ohybového momentu (43),*

i když koeficient  $k$  neznáme úplně přesně. Nesmí být tedy vliv  $k$  na namáhání kolejnice přeceňován. Zato při určení průhybu podle (41) je možná i dosti velká chyba, jež plyne z nepřesně udané hodnoty  $k$ .

## II. Vliv protizávaží lokomotiv

Svislá složka odstředivých sil nevyvážených hmot u protizávaží na hnacím kole lokomotivy způsobuje přidavné zatížení kolejnice, které se harmonicky mění. Tento případ si představujeme jako osamělé břemeno  $R \sin \omega t$ , které se pohybuje konstantní rychlostí  $c$  po nosníku. Vidíme, že zde můžeme aplikovat výsledky kap. B. II. pro  $Q(t) = R \sin \omega t$ . Pro kolejnici namáhanou odstředivou silou protizávaží platí tedy r. (16) až (19) pro  $Q(t) = R \sin \omega t$ . To je řešení přibližné a musíme se tedy v konkrétním případě přesvědčit o chybě, kterou tím učiníme.

Protože i zde prakticky dosažitelné rychlosti jsou malé vůči rychlosti kritické, platí i pro tento případ vývoody odstavce C. I. a) o vlivu rychlosti  $c$ . Užijeme tedy rovnice (41) až (44), kde však místo síly  $P$  dáváme sílu  $R \sin \omega t$ .

### a) Odhad chyby.

Přesvědčme se zde, jaký průběh má zatížení (21) pro náš případ  $Q(t) = R \sin \omega t$ . Dosadíme-li tuto funkci do r. (21), pak při  $\alpha \doteq \gamma \doteq \beta$  dostaneme:

$$p(x, t) = R \frac{\mu\omega\beta}{2k} e^{-\beta|\xi|} [-\omega \sin \omega t \cos \beta\xi + (\operatorname{sgn} \xi \cdot 4c\beta \cos \omega t - \omega \sin \omega t) \sin \beta|\xi|]. \quad (45)$$

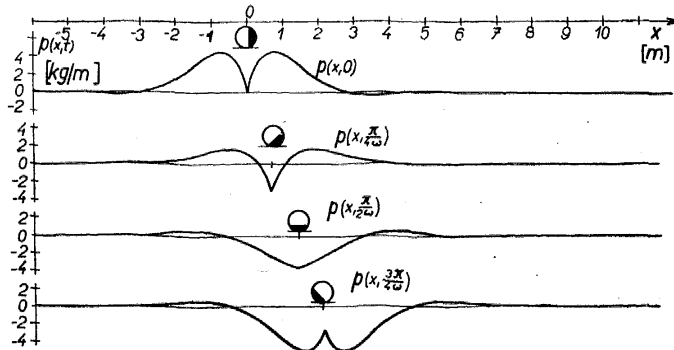
Toto zatížení na jednotku délky bylo vyčísleno pro lokomotivu řady 475.1, která má největší amplitudu odstředivé síly  $R = 1130$  kg při max. rychlosti  $c = 100$  km/hod; průměr hnacího kola  $D = 175$  cm a z toho max. kruhová frekvence  $\omega = 2c/D = 31,7$  sec<sup>-1</sup>. Výpočet je proveden pro okamžik  $t = 0$ ;  $\pi/4\omega$ ;  $\pi/2\omega$ ;  $3\pi/4\omega$ . Další hodnoty po osminách periody  $2\pi/\omega$  mají stejné hodnoty, jen znaménka se mění. Průběh zatížení  $p(x, t)$  podle r. (45) je znázorněn na obr. 4, kde poloha kola je dána kolečkem se začerněnou úsečí, která představuje polohu protizávaží. Při otáčení kola se zatížení opakuje s periodou  $2\pi/\omega$ .

Obr. 4 slouží jen k ilustraci o tom, jaké zatížení při našem přibližném řešení se vlastně pohybuje po nosníku. K odhadu chyby, jaké se tímto přibližným řešením dopouštíme, postačí nám podmínka (24), která pro náš případ  $Q(t) = R \sin \omega t$  dostává tvar (při  $\alpha \doteq \gamma \doteq \beta$ ):

$$\left| R \frac{\mu\omega}{k} (-\omega \sin \omega t + 2c\beta \cos \omega t) \right| \leq |qR \sin \omega t|. \quad (46)$$



K určení procenta přesnosti  $q$  musíme uvážit, jakým způsobem se dojde k amplitudě  $R$  odstředivé síly: velikosti protizávaží hnacích kol lokomotiv se vypočítávají z podmínky (viz [6]), že amplituda  $R$  nesmí být větší než 15% statického tlaku kola  $P$ . Ovšem statický tlak pro tento účel se bere jen prů-



Obr. 4.

Tabulka 1.

$t$	$R \frac{\mu\omega}{k} (-\omega \sin \omega t + 2c\beta \cos \omega t)$ [kg]	$qR \sin \omega t$ [kg]
0	13,5	0
$\pi/4\omega$	4,42	53
$\pi/2\omega$	- 7,22	75
$3\pi/4\omega$	- 14,65	53

měrnou hodnotou, která se může lišit od skutečného tlaku na kolo až o  $\pm 500$  kg (viz [5], kde jsou uváděny ještě větší naměřené odchylky). V našem příkladě tedy můžeme určit pro lokomotivu 475.1 kolový tlak  $P = 7500$  kg maximálně s přesností  $\pm 500/7500 = \pm 0,0667$ . Nanejvýše s toutéž přesností můžeme i určit amplitudu  $R$ , je tedy  $q = \pm 6,67\%$ .

Nyní již můžeme vyčíslit podmínku (46). Srovnání je provedeno v tab. I. pro časové okamžiky  $t = 0; \pi/4\omega; \pi/2\omega; 3\pi/4\omega$ , další hodnoty po osminách periody  $2\pi/\omega$  se liší jen znaménky.

Z tabulky je vidět, že největší hodnota levé strany r. (46) při  $t = 3\pi/4\omega$  je menší než největší hodnota pravé strany při  $t = \pi/2\omega$  ( $|- 14,65| < |75|$ ). Je tudíž podmínka (46) splněna. Podle našeho přibližného řešení ve smyslu odst. B. II. b) se tedy dopouštíme v našem příkladě při výpočtu kolejnice zatížené pohyblivým, osamělým břemenem harmonicky proměnným  $R \sin \omega t$  menší chyby, než jaké se dopouštíme tím, že vycházíme z nesprávných hodnot  $R$ .

b) *Vliv setrvačnosti.*

Vypočítejme pro naši lokomotivu 475.1 setrvačné účinky harmonicky proměnné síly  $R \sin \omega t$ . Vyjádříme proto sílu  $\bar{Q}(t)$  podle r. (27) pro  $Q(t) = R \sin \omega t$  a  $m_Q = m_R$ . Po integraci a při nulových počátečních podmínkách [ $\bar{Q}(0) = 0$ ,  $\dot{\bar{Q}}(0) = 0$ ], kdy bude  $C_1 = C_2 = 0$ , dostaneme:

$$\bar{Q}(t) = R \sin \omega t \frac{1 - \frac{\omega \sin \omega_R t}{\omega_R \sin \omega t}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_R^2}}. \quad (47)$$

Tato myšlená síla bude mít největší hodnotu při  $t = \pi/2\omega$ , pak obdržíme:

$$\bar{Q} \left( \frac{\pi}{2\omega} \right) = R \frac{1 - \frac{\omega \sin \frac{\pi}{2} \frac{\omega_R}{\omega}}{\omega_R \sin \frac{\pi}{2} \frac{\omega_R}{\omega}}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_R^2}}. \quad (48)$$

Vyčíslíme-li tuto sílu, dostaneme

$$\bar{Q} \left( \frac{\pi}{2\omega} \right) = 1,004R.$$

Pro zajímavost uvádíme ještě hodnoty r. (48) pro  $t = \pi/\omega$ , kde  $\bar{Q}(\pi/\omega) = -0,00545R$  a pro  $t = 3\pi/2\omega$  kdy  $\bar{Q}(3\pi/2\omega) = -0,994R$ .

Průhybovou čáru nosníku bychom pak dostali z r. (26). Z vypočteného příkladu vidíme, že *setrvačné účinky harmonicky proměnné síly mají velmi malý vliv*, zvětšují resp. zmenšují v našem příkladě její amplitudu o 0,4% resp. o 0,6%. To je vliv tak malý, že ho můžeme zanedbat.

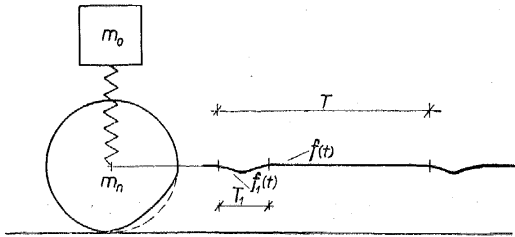
### III. Účinek plochých kol

Železniční vozidlo si idealisujeme takto: kolo s ostatními neodpruženými částmi (jako ložiska a pod.) tvoří hmotu  $m_n$ , část vozidla i s nákladem připadající na kolo je hmotu  $m_o$ . Kolo a vůz nejsou vzájemně pevně spojeny, nýbrž nosný rám vozidla spočívá pružnicemi na nápravě. Takovouto idealisací tedy vzniká pohyblivá soustava: hmotu  $m_n$ , pero, hmotu  $m_o$ , jak o ní bylo teoreticky pojednáno v kap. B. III. Pro kolejnici uvažovanou jako nekonečně dlouhý nosník na pružném podkladě, po níž se pohybuje rovnoměrnou rychlostí železniční vozidlo s plochým kolem, platí pak všechny vývody kap. B. III.

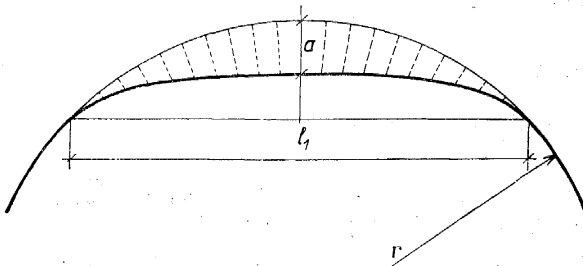
Je-li na kole ploché místo, pohybuje se jeho střed při pomalé jízdě (vlastně v limitě při nekonečně malé rychlosti) po křivce  $f(t)$  (viz obr. 5, kde je časové rozvinutí dráhy středu kola).

Křivka  $f(t)$  je dána v případě plochého kola takto:

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= f_1(t) \dots \text{ pro } iT < t < iT + T_1 \\ f(t) &= 0 \dots \text{ pro } iT + T_1 < t < (i+1)T \end{aligned} \right\} \quad (49)$$



Obr. 5.



Obr. 6.

kde značí:  $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  (máme na mysli pohyb od nekonečna do nekonečna),

$T$  — doba potřebná k jednomu otočení kola,

$T_1$  — doba potřebná k projetí přes ploché místo,

$f_1(t)$  — pořadnice plochého místa v určitém okamžiku. Udává jí vlastně délku, oč se zkrátil poloměr kola na plochem místě<sup>5)</sup>. Na obr. 6 jsou tyto pořadnice vyznačeny čárkovanými dostřednými úsečkami. Zde znamená:

$a$  — hloubka plochého místa,

$l_1$  — délka plochého místa, je velmi přibližně rovna délce oblouku nebo sečny. Vztah mezi  $l_1$  a  $T_1$  je při rychlosti  $c$ :  $l_1 = cT_1$ .

#### a) Geometrický tvar plochého místa.

Abychom mohli postupovat dále, musíme znát geometrický tvar křivky  $f_1(t)$ . O tvaru plochého místa se v literatuře nemluví. Bylo tedy nutno měřením zjistit přesný tvar plochého místa.

Odměřovány byly dostředné úsečky (viz obr. 6) ve dvacetinách délky  $l_1$ . Naměřené hodnoty jsou udány v tab. II. (pro polovinu souměrné křivky) a na obr. 7. V druhém řádku tab. II. jsou skutečně naměřené hodnoty v cm, ve třetím řádku jsou pak tyto hodnoty vztáhnuty na měrnou jednotku  $a$ .

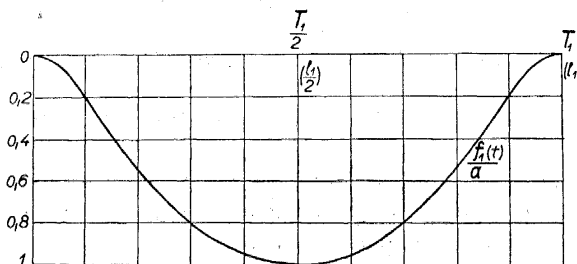
<sup>5)</sup> Předpokládá se při tom přibližně, že bod dotyku kola s kolejnicí je stále svisle pod středem kola.

Naměřenou funkci  $f_1(t)$  danou tabelárně vyjádříme pomocí Fourierovy řady jako periodickou funkci o periodě  $T_1$ :

$$f_1(t) = a_0 - \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\omega_1 t, \quad (50)$$

Tabulka 2.

$\frac{T_1}{20}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_1(t)$ [cm]	0,000	0,021	0,060	0,122	0,170	0,212	0,246	0,270	0,288	0,298	0,300
$\frac{f_1(t)}{a}$	0	0,0699	0,199	0,407	0,566	0,712	0,820	0,900	0,960	0,991	1
$\frac{f_{1(1)}(t)}{a}$	0,145		0,234		0,469		0,759		0,994		1,083
$\frac{f_{1(2)}(t)}{a}$	0,041		0,202		0,553		0,843		0,962		0,979
$\frac{f_{1(3)}(t)}{a}$	0,0139		0,2104		0,575		0,821		0,9536		1,0061



Obr. 7.

kde

$$j = 1, 2, 3, \dots; \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi c}{l_1}$$

a

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} f_1(t) dt; \quad a_j = -\frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} f_1(t) \cos j\omega_1 t dt$$

jsou Fourierovy koeficienty. Získáme je numerickou integrací z hodnot tab. II.:

$$a_0 = 0,614a, \quad a_1 = 0,469a, \quad a_2 = 0,104a, \quad a_3 = 0,0271a \text{ atd.} \quad (50')$$

Křivka  $f_1(t)$  daná rovnicí (50) konverguje velmi rychle k funkci  $f_1(t)$ , kterou jsme získali měřením. Hodnoty  $f_1(t)$  podle (50), běheme-li první, první dva,

resp. první tři členy řady, jsou vypočteny na 4., 5. resp. 6. řádku tab. II. (počítány pouze v desetinách  $l_1$ ). Odtud je vidět, že vezmeme-li pouze první tři členy nekonečné řady (50), je již shoda s naměřenou křivkou  $f_1(t)$  (podle 3. řádku tab. II.) velmi dobrá.

b) Řešení plochého kola s křivkou  $f_1(t)$ .

Pro řešení namáhání kolejnice vlivem plochého kola platí všechny vývoody z kap. B. III. a rovněž všechny předpoklady, které jsme tam učinili. V kap. B. III. jsme případ řešili pro obecnou křivku  $f(t)$ . V případě plochého kola má však tato křivka zvláštní tvar daný rovnicemi (49) a (50). Vyřešíme nyní tento případ pro takovéto konkrétní  $f(t)$ .

Síla  $Q(t)$  je dána rovnicí (37), do které dosadíme za  $f(t)$  rovnice (49) a (50). Po integraci dostaneme:

$$Q(t) = -\frac{1}{v_0} \left[ \frac{\omega_n^2}{\omega_2^2} a_0 (1 - \cos \omega_2 t) - \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{j^2 \omega_1^2 - \omega_n^2}{j^2 \omega_1^2 - \omega_2^2} (\cos j \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \right] \mp$$

$$\mp \frac{K_b}{1 + C v_0} + A \cos \omega_2 t + B \sin \omega_2 t \dots \quad \text{pro } iT < t < iT + T_1,$$

$$Q(t) = -\frac{1}{v_0} \left( \frac{\omega_n^2}{\omega_2^2} a_0 - \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{j^2 \omega_1^2 - \omega_n^2}{j^2 \omega_1^2 - \omega_2^2} \right) [\cos \omega_2 (t - T_1) - \cos \omega_2 t] \mp$$

$$\mp \frac{K_b}{1 + C v_0} + A \cos \omega_2 t + B \sin \omega_2 t \dots \quad \text{pro } iT + T_1 < t < (i + 1) T.$$

Integrační konstanty  $A$ ,  $B$  dostaneme z počátečních podmínek. Za předpokladu velkého útlumu v perech můžeme bezpečně předpokládat, že rozkmitání způsobené plochým místem bude úplně utlumeny do té doby, než kolo najede po druhé plochým místem na kolejnici. Z toho pak plynou počáteční podmínky (jež se ovšem periodicky opakují):

$$Q(iT) = 0, \quad \dot{Q}(iT) = 0, \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Z nich a z výše uvedených výrazů pro  $Q(t)$  plynou integrační konstanty:

$$A = -\frac{K_b}{1 + C v_0}, \quad B = 0.$$

Předpokládáme při tom, že tlumící síla  $\frac{K_b}{(1 + C v_0)}$  bude kladná, protože  $Q(t)$  očekáváme v prvních okamžicích záporné.

Dynamické přitížení je pak po úpravě:

$$Q(t) = -\frac{2}{v_0} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{1 - \frac{\omega_n^2}{j^2 \omega_1^2}}{1 - \frac{\omega_2^2}{j^2 \omega_1^2}} \sin j \frac{\omega_1 t}{2} \left( 1 + \frac{\omega_2}{j \omega_1} \right) \sin j \frac{\omega_1 t}{2} \left( 1 - \frac{\omega_2}{j \omega_1} \right) -$$

$$-\frac{2}{\bar{v}_0} \frac{\omega_n^2}{\omega_2^2} a_0 \sin^2 \frac{\omega_1 t \omega_2}{2 \omega_1} - \frac{K_b}{1 + C\bar{v}_0} \cos \omega_1 t \frac{\omega_2}{\omega_1} \mp \frac{K_b}{1 + C\bar{v}_0} \dots$$

... pro  $iT < t < iT + T_1$ ,

(51)

$$Q(t) = -\frac{2}{\bar{v}_0} \left( \frac{\omega_n^2}{\omega_2^2} a_0 - \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{1 - \frac{\omega_n^2}{j^2 \omega_1^2}}{1 - \frac{\omega_2^2}{j^2 \omega_1^2}} \right) \sin \pi \frac{\omega_2}{\omega_1} \sin \frac{\omega_2}{\omega_1} (\omega_1 t - \pi) -$$

$$-\frac{K_b}{1 + C\bar{v}_0} \cos \omega_1 t \frac{\omega_2}{\omega_1} \mp \frac{K_b}{1 + C\bar{v}_0} \dots \text{ pro } iT + T_1 < t < (i+1)T. \quad (52)$$

Přidavný průhyb kolejnice pouze od  $Q(t)$  je podle (33):

$$v_0(t) = \bar{v}_0 Q(t) \quad (53)$$

a pohyb středu kola je dán r. (31):

$$y_n(t) = \bar{v}_0 Q(t) + f_1(t) \quad \dots \text{ pro } iT < t < iT + T_1,$$

$$y_n(t) = \bar{v}_0 Q(t) \quad \dots \text{ pro } iT + T_1 < t < (i+1)T, \quad (54)$$

kam dosadíme za  $Q(t)$  z rovnic (51), (52).

Za první aproximaci pohybu vozu  $y_0(t)$  jsme zde brali  $y_0(t) = 0$  jako v kap. B. III. Jestliže již známe  $y_n(t)$  dle r. (54), můžeme vypočítat i druhou aproximaci podle r. (39). Při tom zde budou počáteční podmínky:

$$y_0(iT) = 0, \quad \dot{y}_0(iT) = 0$$

a z nich a z r. (39) za předpokladu, že tlumící síla bude zpočátku záporná, protože očekáváme nejdřív pohyb vozu dolů, plynou integrační konstanty:

$$C_1 = y_k, \quad C_2 = 0.$$

Dosadíme-li do r. (39)  $y_n(t)$  podle (54), dostaneme po integrování:

$$y_0(t) = a_0 \left( 1 - \frac{\omega_n^2}{\omega_2^2} \right) (1 - \cos \omega_0 t) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - j^2 \omega_1^2} \cdot \frac{\omega_2^2 - \omega_n^2}{j^2 \omega_1^2 - \omega_2^2} (\cos j\omega_1 t -$$

$$- \cos \omega_0 t) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_2^2} \left( \frac{\omega_n^2}{\omega_2^2} - \frac{j^2 \omega_1^2 - \omega_n^2}{j^2 \omega_1^2 - \omega_2^2} \right) (\cos \omega_2 t - \cos \omega_0 t) +$$

$$+ \left[ -\frac{\omega_n^2}{\omega_2^2} \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_2^2} y_k (\cos \omega_2 t - \cos \omega_0 t) \mp \frac{\omega_n^2}{\omega_2^2} y_k (1 - \cos \omega_0 t) \right] +$$

$$+ y_k \cos \omega_0 t \mp y_k \dots \text{ pro } iT < t < iT + T_1, \quad (55)$$

$$y_0(t) = \left[ a_0 \left( 1 - \frac{\omega_n^2}{\omega_2^2} \right) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - j^2 \omega_1^2} \cdot \frac{\omega_2^2 - \omega_n^2}{j^2 \omega_1^2 - \omega_2^2} \right] \cdot [\cos \omega_0(t - T_1) -$$

$$- \cos \omega_0 t] + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_2^2} \left( \frac{\omega_n^2}{\omega_2^2} - \frac{j^2 \omega_1^2 - \omega_n^2}{j^2 \omega_1^2 - \omega_2^2} \right) \cdot [\cos \omega_0(t - T_1) \cos \omega_2 T_1 -$$

$$- \cos \omega_0 t - \frac{\omega_2}{\omega_0} \sin \omega_0(t - T_1) \sin \omega_2 T_1] + \left\{ -\frac{\omega_n^2}{\omega_2^2} \cdot \right.$$

$$\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_2^2} y_k \left[ \cos \omega_0(t - T_1) \cos \omega_2 T_1 - \cos \omega_0 t - \frac{\omega_2}{\omega_0} \sin \omega_0(t - T_1) \sin \omega_2 T_1 \right] \mp \\ \mp \frac{\omega_n^2}{\omega_2^2} y_k [\cos \omega_0(t - T_1) - \cos \omega_0 t] \Big\} + y_k \cos \omega_0 t \mp y_k \dots \\ \dots \text{ pro } iT + T_1 < t < (i+1)T.$$

Avšak v praktických případech je  $y_0(t)$  tak malé, že je úplně zanedbatelné. Tím se jenom potvrzuje oprávněnost výchozího předpokladu, že totiž jsme pokládali  $y_0(t) = 0$ .

Známe-li nyní  $Q(t)$  z r. (51) a (52), můžeme také vypočítat namáhání kolejnice od pojízdějího vozidla s plochým kolem podle rovnice (32) atp. Nakonec se, ovšem musíme přesvědčit, zda naše přibližné řešení, podle kterého jsme postupovali, vyhovuje podmínce (24).

### c) Příklad.

Po železničním svršku soustavy  $T$  jede nákladní vůz řady Vtr, na jehož kole je ploché místo. Máme vypočítat sílu  $Q(t)$ , průhyb kolejnice  $v_0(t)$ , pohyb středu kola  $y_n(t)$  a vozu  $y_0(t)$  způsobené plochým kolem. Dané hodnoty:

rychlost  $c = 50$  km/hod.

svršek  $T$  (viz kap. C. I. a),  $\bar{v}_0 = 2,65 \cdot 10^{-5}$  cm/kg,

vůz: kolový tlak  $P = 10\,000$  kg,  $P_n = 700$  kg,  $m_n = 7,14 \cdot 10^{-1}$  kg sec<sup>2</sup> cm<sup>-1</sup>,

$P_0 = 9300$  kg,  $m_0 = 9,48$  kg sec<sup>2</sup> cm<sup>-1</sup>,

pérová konstanta:  $C = 1380$  kg/cm,  $\omega_n^2 = 1935$  sec<sup>-2</sup>,  $\omega_0^2 = 145,6$  sec<sup>-2</sup>,

$\omega_2 = 234$  sec<sup>-1</sup>,  $\frac{\omega_n^2}{\omega_2^2} = 3,54 \cdot 10^{-2}$ ,

útlum: vůz řady Vtr má listové pružnice, ve kterých je silný útlum. Vzniká tím, že mezi listy pružnice je smýkové tření, které podle zkoušek činí asi 10% ze zatížení. Pružnice v našem případě je zatížena silou  $P_0 + Q(t)$ , takže tlumící síla by měla být:  $K_b = 0,1 \cdot [P_0 + Q(t)]$ , t. j. proměnná. To by však celý problém značně zkomplikovalo, proto bĕřeme tlumící sílu konstantní průmĕrnĕ velikosti  $K_b = 0,1P_0 = 930$  kg,  $K_b/(1 + C\bar{v}_0) = 898$  kg,  $y_k = 0,674$  cm,

ploché kolo:  $a = 0,3$  cm,  $l_1 = 13,45$  cm,  $\omega_1 = 650$  sec<sup>-1</sup>,  $T_1 = 9,68 \cdot 10^{-3}$  sec. Tvar plochého kola bĕřeme podle r. (50) s koeficienty (50').

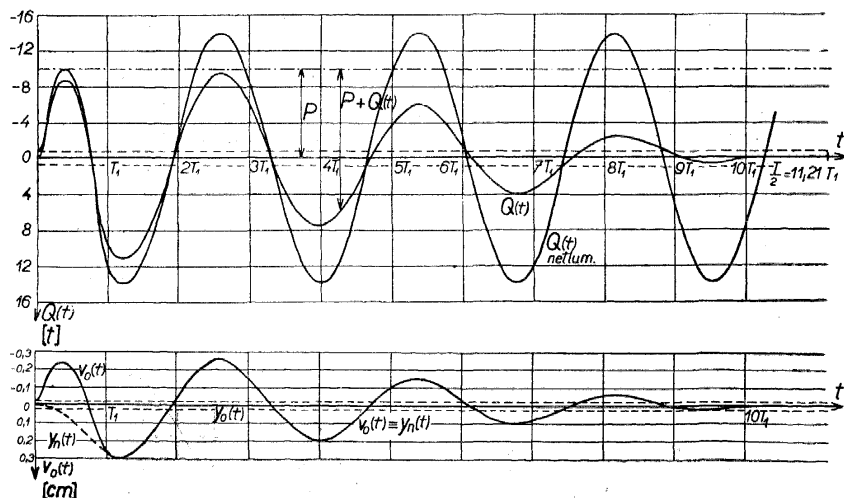
S těmito hodnotami je vypočteno  $Q(t)$  podle (51) a (52),  $v_0(t)$  podle (53),  $y_n(t)$  podle (54) a  $y_0(t)$  podle (55) a zobrazeno na obr. 8.

Z obr. 8 je vidĕt, že je zachován výchozí předpoklad, totiž že  $P + Q(t) > 0$  v každĕm okamžiku. To znamená, že v našem případě nenastane ráz kola na kolejnici. Největší přitížení kolejnice nastane v okamžiku  $t = 1,206T_1$ , kdy  $Q(t) = 11\,380$  kg, to značí, že kolejnice je v tomto okamžiku zatížena víc

jak dvojnásobnou silou, než je statický tlak  $P$ . Z obr. 8 je také vidět, že  $y_0(t)$  má nepatrné hodnoty, takže náš předpoklad, že  $y_0(t) = 0$ , je velmi blízký skutečnosti.

d) Odhad chyby.

Nyní musíme provést úvahu o tom, jaké chyby jsme se dopustili v předchozím příkladě tím, že jsme použili přibližného řešení ve smyslu odst. B. II. b).



Obr. 8.

Pro tento odhad jsme odvodili podmínku (24), do které za  $Q(t)$  bychom měli dosadit rovnice (51) a (52). Protože grafické znázornění křivky  $Q(t)$  (viz obr. 8) připomíná funkci harmonicky proměnnou o kruhové frekvenci  $\omega_2$ , nahradíme ji raději pro tento účel funkcí  $Q(t) \cong R \sin \omega_2 t$ , kde  $R = 11\,380$  kg je maximální hodnota  $Q(t)$  vůbec. Toto nahrazení můžeme učinit tím spíše, protože stejně v r. (24) srovnáváme největší hodnotu levé strany proti největší hodnotě pravé strany.

Tím ovšem dostaneme místo (24) podmínku (46), kde jsme již takovýto případ  $Q(t) = R \sin \omega t$  zkoumali. Zde jsme také zjistili, že levá strana nerovnosti (46) má největší hodnotu pro  $t = 3\pi/4\omega$ .

Budeme tedy v našem případě srovnávat levou stranu podmínky (46) pro  $t = 3\pi/4\omega_2$ , kterou zde označíme  $Q$ , s největší hodnotou pravé strany  $qR$ :

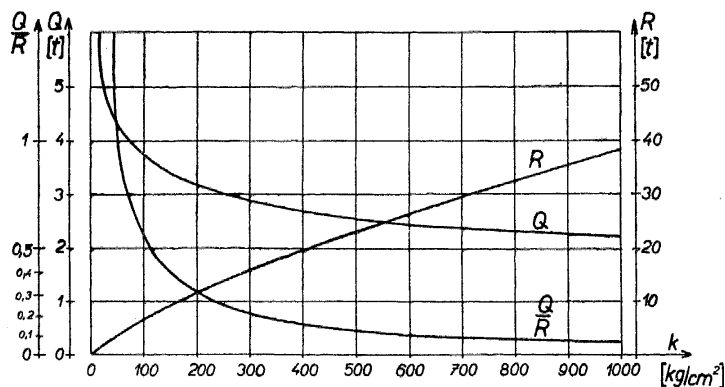
$$|Q| \leq |qR|. \quad (56)$$

Pro srovnání musíme ještě znát procento přesnosti  $q$ , s jakým určíme amplitudu  $R$ . Na  $R$  má velký vliv poměr  $1/\bar{v}_0 \cong 1/\bar{v}_0$ , jak vidíme z r. (52). Proto

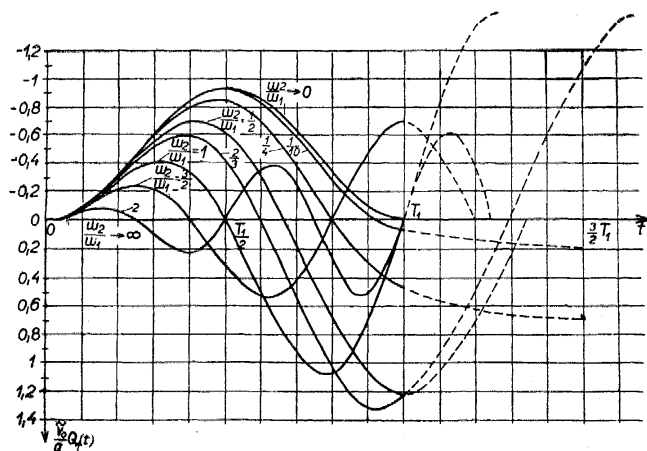


byly vypočteny hodnoty  $R$  a  $Q$  pro různé koeficienty podloží  $k$  a vyneseny na obr. 9.

Pro náš případ  $k = 200 \text{ kg/cm}^2$  můžeme z obr. 9 učinit tyto závěry: jestliže v hodnotě  $k$  se můžeme mýlit až o  $\pm 100 \text{ kg/cm}^2$ , pak vidíme, že v hodnotě  $R$



Obr. 9.



Obr. 10.

může být chyba až  $q = \pm 40\%$ , zatím co chyba v  $Q$  bude mnohem menší. Pak můžeme učinit srovnání podle podmínky (56):  $3160 < 0,4 \cdot 11\,380$ ;  $0,4 \cdot 11\,380 = 4550 \text{ [kg]}$ .

Vidíme tedy, že podmínka je splněna. Pro vyšší hodnoty  $k$  je přesnost výpočtu větší, jak je vidět z poměru  $Q/R$ , který je také zobrazen na obr. 9.

e) *Závislost dynamického přetížení  $Q(t)$  na poměru  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ .*

V r. (51) a (52) mají největší vliv první členy při  $j = 1$ . Proto byly vyčísle-  
ny pro různé hodnoty poměru  $\omega_2/\omega_1$  a zobrazeny na obr. 10.

#### D. Závěr a diskuse

Při platnosti všech předpokladů uvedených v této práci vyplývají pro dyna-  
mické namáhání kolejnice tyto závěry:

1. Namáhání kolejnice od osového tlaku a od účinků protizávaží hnacích  
kol lokomotivy je prakticky stejné jako od působení těchto dvou druhů  
zatížení v případě, že by se kola protáčela na místě (bez tření). Vliv rychlosti,  
s jakou se pohybují po kolejnici, je totiž zanedbatelný pro běžné rychlosti  
dosahované na železnicích.

2. Podloží má velký vliv na průhyb kolejnice, ale mnohem menší vliv na  
ohybový moment a tím i na namáhání kolejnice.

3. Osový tlak nemá žádných setrvačných účinků a setrvačné účinky odstře-  
divých sil protizávaží lokomotiv jsou zanedbatelně malé.

4. Naše přibližné řešení nekonečně dlouhého nosníku na pružném podkladě,  
po kterém se pohybuje konstantní rychlostí osamělé břemeno obecně v čase  
proměnné, je velmi vhodné a přesné v případě, kdy časová změna síly se děje  
poměrně pomalu vzhledem k rychlosti pohybu břemene po nosníku. Tak tomu  
bylo na př. při výpočtu účinků protizávaží hnacích kol lokomotivy. Mění-li  
se však síla poměrně rychle, je toto přibližné řešení již méně přesné (viz na př.  
účinky plochého kola).

5. *Dynamické přetížení  $Q(t)$ , které vzniká od plochého kola, závisí na hloubce  
plochého místa  $a$ , na poměru  $\frac{1}{v_0}$  (a tím i značně na koeficientu podloží  $k$ ) a dále  
na poměru  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ , v kterém je zahrnut vliv rychlosti  $c$ , délky plochého místa  $l_1$ ,  
váhy kola  $P_n$  a způsobu a síle odpružení  $C$ .  $Q(t)$  závisí také na útlumu v perech  
 $K_b$ , ale při velkých osových tlacích téměř nezávisí na váze vozu a nákladu  $P_0$ .  
V tomto případě také nenastává ráz kola na kolejnici. Je-li však  $\bar{P}_0$  malé a pérová  
konstanta  $C$  velká, má již váha vozu a nákladu větší vliv (v tomto případě  
bychom nemohli brát přibližně  $y_0(t) = 0$ ) a může snadno vzniknout ráz.*

6. *Největší hodnoty dynamického přetížení  $Q(t)$  nastávají při poměru  
 $\omega_2/\omega_1 = \frac{2}{3}$ . (Viz obr. 10.)*

To jsou závěry, ke kterým jsme dospěli z předem vyložených předpokladů.  
Ovšem jen některé předpoklady odpovídají skutečnosti, o jiných můžeme před-  
pokládat, že nemají příliš velký vliv na přesnost výsledků, a konečně jsou  
i takové, které mohou někdy značně ovlivnit výsledky. O těch se nyní zmíníme  
v diskusi:

1. O podloží jsme předpokládali, že je ideálně pružné. Ale skutečnost je daleko od tohoto předpokladu. Nestejnoměrné podbití pražců, špatné připevnění kolejnic na podkladnice a jiné vlivy způsobují, že koeficient podloží je vlastně proměnný. Kolejnicí jsme považovali, jako kdyby byla uložena na spojitém podloží; vliv plochého kola je však omezen na velmi malou délku maximálně do 20 cm. Zde již může mít vliv i to, působí-li ploché kolo na kolejnici mezi pražci nebo na pražci.

Podloží má také proti našemu předpokladu jistou setrvačnost, může působit v záporném směru jen do jisté míry a je v něm i útlum. S tímto vším jsme nepočítali.

2. Také pružnici mezi kolem a vozem jsme předpokládali ideálně pružnou a bez setrvačnosti, zatím co ve skutečnosti v případě plochého místa, které působí velmi krátkou dobu, pružnice sotva postačí v tomto okamžiku neustále přitlačovat kolo na kolejnici. Odloučení kola od kolejnice a tím i ráz pak nastane v mnohem častějších případech, než jak jsme odvodili v naší práci.

To jsou vlivy — některé téměř nevystihnutelné — které jsme v naší práci neuvažovali a jež podle našeho názoru ovlivňují namáhání kolejnice. Přes některá zjednodušení můžeme však považovat zde řešený problém plochého kola, o který šlo především, za dobré přiblížení skutečnosti.

#### LITERATURA

- [1] *Hanker R.*: Eisenbahnoberbau. Wien, Springer 1952.
- [2] *Kenney J. T.*: Steady — State Vibrations of Beam on Elastic Foundation for Moving Load. Journal of Applied Mechanics, 1954, str. 359.
- [3] *Koloušek V.*: Dynamika stavebních konstrukcí. Praha, SNTL 1954.
- [4] *Корнев Б. Г., Ручинский М. Н.*: Некоторые задачи динамики балок на упругом основании. Москва, Гос. изд. по стр. и арх. 1955.
- [5] *Lomonosov G.*: Über den dynamischen Druck der Lokomotivräder. Glasers Annalen, 1929, str. 80.
- [6] *Meineke — Röhrs*: Die Dampflokomotive, Lehre und Gestaltung. Berlin, Springer 1949.
- [7] *Мушиков В. М.*: Некоторые методы расчета упругих систем на колебания при подвижной нагрузке. Москва, Гос. изд. по стр. и арх. 1953.
- [8] *Pravidla technického provozu železnic*. Praha, Dopr. nakl. 1954.
- [9] *Saller H.*: Stosswirkung unrunder Bremsräder auf den Eisenbahnoberbau. Zentralblatt der Bauverwaltung, 1921, str. 115.
- [10] *Schramm G.*: Die Beanspruchung der Schienen durch die Eisenbahn-Fahrzeuge. Glasers Annalen, 1955, str. 317.
- [11] *Снитко Н. К.*: Методы расчета сооружений на вибрацию и удар. Ленинград — Москва, Гос. изд. по стр. и арх. 1953.
- [12] *Timoshenko S.*: Étude de l'action des charges roulantes sur les rails. Le Génie civil, 1921, str. 555.

- [13] *Timoshenko S.*: Statical and Dynamical Stresses in Rails. Zürich, Proceedings Intern. Congr. of Applied Mechanics, 1926, str. 407.
- [14] *Timošenko Š.*: Pružnost a pevnost, díl II. Praha, Techn. věd. vyd. 1951.
- [15] *Timoshenko S., Young D. H.*: Vibrations Problems in Engineering. New York, Nostrand Comp. 1955, 3. vyd.
- [16] *Frýba L.*: Dynamické namáhání kolejnice. Železniční technika, 1957, str. 10.

## Резюме

### БЕСКОНЕЧНО ДЛИННАЯ БАЛКА НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДВИЖУЩЕГОСЯ ГРУЗА

ЛАДИСЛАВ ФРЫБА, (Ladislav Frýba).

(Поступило в редакцию 23/VII 1956 г.)

В работе рассмотрено динамическое усилие бесконечно длинной балки на упругом основании под действием равномерно движущегося груза и его массы. Если движущаяся сила постоянна во времени, возникает квазистационарное положение. Применяя этот способ решения, автор выводит приближенное решение для случая движущегося груза вообще переменного во времени. В работе дается также оценка ошибки, которая возникает при этом приближенном решении. Метод применен для случая, когда на балке движется система: колесо, пружина, масса, причем колесо перемещается по произвольной кривой. Результаты использованы при расчете усилия рельсы, динамически нагруженного: давлением колеса, вертикальной составляющей центробежных сил избыточных противовесов паровозов и действием наличия выбоин в бандажах колес.

## Summary

### INFINITELY LONG BEAM ON ELASTIC FOUNDATION UNDER MOVING LOAD

LADISLAV FRÝBA

(Received July 23, 1956.)

This paper deals with the dynamical stress of an infinitely long beam on elastic foundation under the action of a moving load and its inertia. If moving force is constant in time, we have the quasistationar state. We deduce an

approximate solution for the case of moving force generally variable in time. The estimation of error of this approximate solution is also discussed in the paper. The method is used for a beam under the action of spring borne mass, the wheel of which moves along an arbitrary curve. The results are applied to the study of stresses in rails dynamical loaded due to loading per axle, to hammer-blows in locomotives and due to acting of flat spots on the wheels.